CHUYÊN ĐỀ MŨ – LOGARIT

HƯỚNG DẪN GIẢI

DẠNG 9. CÁC BÀI TOÁN HAY VÀ KHÓ CỦA MŨ - LOGARIT

Câu 1.

Hướng dẫn giải: Chọn B

♦ Tự luận:

$\log_a 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{a}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \ldots + n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 1008^2 \times 2017^2 \log_a 2019$

$\Leftrightarrow \log_a 2019 + 2^3 \log_a 2019 + 3^3 \log_a 2019 + \ldots + n^3 \log_a 2019 = 1008^2 \times 2017^2 \log_a 2019$

$\Leftrightarrow (1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) \log_a 2019 = 1008^2 \times 2017^2 \log_a 2019$

$\Leftrightarrow \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{2016.2017}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow n = 2017$

♦ Trắc nghiệm:

Câu 2.

Hướng dẫn giải: Chọn C

♦ Tự luận:

$\log_{\sqrt{2}}\left(mx - 6x^3\right) + 2\log_{\frac{1}{2}}\left(-14x^2 + 29x - 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \log_2\left(mx - 6x^3\right) - \log_2\left(-14x^2 + 29x - 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow mx - 6x^3 = -14x^2 + 29x - 2$

$\Leftrightarrow m = \frac{6x^3 - 14x^2 + 29x - 2}{x}$

$f(x) = \frac{6x^3 - 14x^2 + 29x - 2}{x} \Leftrightarrow f'(x) = 12x - 14 + \frac{2}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow f(1) = 19 \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{39}{2} \\ x = -\frac{1}{3} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{121}{3} \end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên suy ra đáp án C.

♦ Trắc nghiệm:

Câu 3.

Hướng dẫn giải: Chọn D

♦ Tự luận:

$\log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \Leftrightarrow \log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$

Đk: $\begin{cases} x > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \log_5\left(2\sqrt{x}+1\right) - \log_5 x = \log_3 (x-1)^2 - \log_3 4x$$

$$\Leftrightarrow \log_5\left(2\sqrt{x}+1\right) + \log_3 4x = \log_5 x + \log_3 (x-1)^2 \quad (1)$$

Đặt $t = 2\sqrt{x}+1 \Rightarrow 4x = (t-1)^2$

(1) có dạng $\log_5 t + \log_3 (t-1)^2 = \log_5 x + \log_3 (x-1)^2 \quad (2)$

Xét $f(y) = \log_5 y + \log_3 (y-1)^2$, do $x > 1 \Rightarrow t > 3 \Rightarrow y > 1$.

Xét $y > 1$: $f'(y) = \dfrac{1}{y\ln 5} + \dfrac{1}{(y-1)^2 \ln 3}.2(y-1) > 0$

$\Rightarrow f(y)$ là hàm đồng biến trên miền $(1;+\infty)$

(2) có dạng $f(t) = f(x) \Leftrightarrow t = x \Leftrightarrow x = 2\sqrt{x}+1 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = 1+\sqrt{2} \\ \sqrt{x} = 1-\sqrt{2} \quad (\text{vn}) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 3+2\sqrt{2}\ (tm)$.

Vậy $x = 3+2\sqrt{2}$

♦ Trắc nghiệm:

Câu 4.

Hướng dẫn giải: Chọn C

♦ Tự luận:

$\log_4 (x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8 (4+x)^3$ (1) Điều kiện: $\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ 4-x > 0 \\ 4+x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 4 \\ x \neq -1 \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \log_2 |x+1| + 2 = \log_2 (4-x) + \log_2 (4+x) \Leftrightarrow \log_2 |x+1| + 2 = \log_2 \left(16 - x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 4|x+1| = \log_2 \left(16-x^2\right) \Leftrightarrow 4|x+1| = 16 - x^2$$

+ Với $-1 < x < 4$ ta có phương trình $x^2 + 4x - 12 = 0$ (3); (3) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -6\ (\text{loại}) \end{array}\right.$

+ Với $-4 < x < -1$ ta có phương trình $x^2 - 4x - 20 = 0$ (4); (4) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2-\sqrt{24} \\ x = 2+\sqrt{24}\ (\text{loại}) \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 2$ hoặc $x = 2\left(1-\sqrt{6}\right)$, chọn C

♦ Trắc nghiệm:

Câu 5.

Hướng dẫn giải: Chọn **B**

♦ Tự luận: Công thức số vi khuẩn: $Q(x)=3000.1,2^{x}$

Hàm mũ nên loại A, D.

Xét $Q(5)=3000.(1,2)^{5}=7460$ nên chọn B.

♦ Trắc nghiệm:

Câu 6.

Hướng dẫn giải: Chọn **B**

♦ Tự luận:

Điều kiện x > 0

Phương trình tương đương với $\log_3\left(\frac{x^2+x+1}{x}\right)=2x-x^2$

Ta có $2x-x^2=1-(x-1)^2\le 1$

Và $\log_3\left(\frac{x^2+x+1}{x}\right)=\log_3\left(x+\frac{1}{x}+1\right)=\log_3\left(\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+3\right)\ge\log_3 3=1$

Do đó $\log_3\left(\frac{x^2+x+1}{x}\right)=2x-x^2\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2=0\\ \sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$

♦ Trắc nghiệm:

Câu 7.

Hướng dẫn giải: Chọn **B**

♦ Tự luận:

$M=\log A-\log A_0=\log\frac{A}{A_0}$

Trận động đất ở San Francisco: $M_1=8,3=\log\frac{A_1}{A_0}$ (1)

ở Nam Mỹ: $M_2=\log\frac{A_2}{A_0}$ (2)

Biên độ ở Nam Mỹ gấp 4 lần ở San Francisco nên $A_2=4A_1\Rightarrow\frac{A_2}{A_1}=4$

Lấy (2) - (1) ta được:

$M_2-8,3=\log\frac{A_2}{A_0}-\log\frac{A_1}{A_0}=\log\frac{A_2}{A_1}=\log 4\Rightarrow M_2=\log 4+8,3\approx 8,9$

♦ Trắc nghiệm:

Câu 8.

Hướng dẫn giải: Chọn **B**

♦ Tự luận:

Nếu $a+b=1$ thì $f(a)+f(b)=1$. Do đó $P=1+1+1+1=4$

♦ Trắc nghiệm:

Câu 9.

Hướng dẫn giải: Chọn B

♦Tự luận:

Dựa vào đồ thị ta có $a<1; b>1; c>1$; hơn nữa với cùng giá trị x thì $\log_c x < \log_b x \Rightarrow c>b$

♦Trắc nghiệm:

Câu 10.

Hướng dẫn giải: Chọn B

♦Tự luận:

Ta có : $300=100.e^{5r} \Leftrightarrow e^{5r}=3 \Leftrightarrow 5r=\ln 3 \Leftrightarrow r=\dfrac{\ln 3}{5}$

Gọi thời gian cần tìm là t .

Theo yêu cầu bài toán, ta có : $200=100.e^{rt} \Leftrightarrow e^{rt}=2$

$$\Leftrightarrow rt=\ln 2 \Leftrightarrow t=\frac{5.\ln 2}{\ln 3}\approx 3,15(h)$$

Vậy $t=$ 3 giờ 9 phút

♦Trắc nghiệm:

Câu 11.

Hướng dẫn giải: Chọn D

♦Tự luận: Áp dụng công thức lãi kép : $P_n = x(1+r)^n$, trong đó

P_n là tổng giá trị đạt được (vốn và lãi) sau n kì.

x là vốn gốc.

r là lãi suất mỗi kì.

Ta cũng tính được số tiền lãi thu được sau n kì là : $\boxed{P_n - x = x(1+r)^n - x = x\left[(1+r)^n - 1\right]}$ (*)

Áp dụng công thức (*) với $n=3, r=6,5\%$, số tiền lãi là 30 triệu đồng.

Ta được $30 = x\left[(1+6,5\%)^3 - 1\right] \Rightarrow x \approx 144,27$

Số tiền tối thiểu là 145 triệu đồng.

♦Trắc nghiệm: Nhập công thức và bấm sfift + slove tìm được x.

Câu 12.

Hướng dẫn giải: Chọn B

♦Tự luận: Đặt $t=\log_2 x \quad (x>0)$

Bất phương trình trở thành : $t^2+mt-m\ge 0,\forall t\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \Delta\le 0$ $\Leftrightarrow m^2+4m\le 0$ $\Leftrightarrow -4\le m\le 0$

Vì m nguyên nên $m\in\{-4;-3;-2;-1;0\}$. Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

♦Trắc nghiệm:

Câu 13.

Hướng dẫn giải: Chọn D

♦Tự luận: Xét các số thực $x>0$

Ta có : $\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}=\sqrt{\frac{(x^2+x+1)^2}{x^2(x+1)^2}}=\frac{x^2+x+1}{x^2+x}=1+\frac{1}{x(x+1)}=1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$.

Vậy, $f(1).f(2).f(3)...f(2017)=e^{\left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(1+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018}\right)}=e^{2018-\frac{1}{2018}}=e^{\frac{2018^2-1}{2018}}$,

hay $\frac{m}{n}=\frac{2018^2-1}{2018}$

Ta chứng minh $\frac{2018^2-1}{2018}$ là phân số tối giản.

Giả sử d là ước chung của 2018^2-1 và 2018

Khi đó ta có $2018^2-1\,\vdots\, d$, $2018\,\vdots\, d\Rightarrow 2018^2\,\vdots\, d$ suy ra $1\,\vdots\, d\Leftrightarrow d=\pm 1$

Suy ra $\frac{2018^2-1}{2018}$ là phân số tối giản, nên $m=2018^2-1, n=2018$.

Vậy $m-n^2=-1$.

♦Trắc nghiệm:

Câu 14.

Hướng dẫn giải: Chọn D

♦Tự luận:

Tập xác định $D=(0;+\infty)$

Ta có $4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2-\log_{\frac{1}{2}}x+m=0\Leftrightarrow(\log_2 x)^2+\log_2 x+m=0$

Đặt $t=\log_2 x$, bài toán trở thành tìm m sao cho $t^2+t+m=0$ $\Leftrightarrow t^2+t=-m$ có ít nhất 1 nghiệm $t<0$

Đặt $f(t)=t^2+t\Rightarrow f'(t)=2t+1=0\Leftrightarrow t=\frac{-1}{2}$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(t)=2t+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	

$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$		$+\infty$

Để pt $t^2+t=-m$ có ít nhất 1 nghiệm $t<0$ thì $-m\geq -\frac{1}{4}\Leftrightarrow m\leq \frac{1}{4}\Leftrightarrow m\in\left(-\infty;\frac{1}{4}\right]$

♦Trắc nghiệm:

Câu 15.

Hướng dẫn giải: Chọn C

♦Tự luận:

BPT thoã mãn với mọi $x\in\mathbb{R}$.$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} mx^2+4x+m>0 \\ 5\left(x^2+1\right)\geq mx^2+4x+m \end{cases}\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$ $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} mx^2+4x+m>0 \\ (5-m)x^2-4x+5-m\geq 0 \end{cases}\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\Leftrightarrow\begin{cases} m>0 \\ 16-4m^2<0 \\ 5-m>0 \\ 16-4(5-m)^2\leq 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m>0 \\ \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right. \\ m<5 \\ \left[\begin{array}{l} m\leq 3 \\ m\geq 7 \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow 2<m\leq 3.$$

♦Trắc nghiệm:

Câu 16.

Hướng dẫn giải: Chọn B

♦Tự luận:

• $y'=\left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^x+1}.\ln\left(\frac{4}{2017}\right).\left(e^{3x}-(m-1)e^x+1\right)'$

$=\left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^x+1}.\ln\left(\frac{4}{2017}\right).\left(3e^{3x}-(m-1)e^x\right)$

• Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$ $\Leftrightarrow$

$y'=\left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^x+1}.\ln\left(\frac{4}{2017}\right).\left(3e^{3x}-(m-1)e^x\right)\geq 0,\forall x\in(1;2)$ (*), mà

$\begin{cases} \left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^x+1}>0,\forall x\in\mathbb{R} \\ \ln\left(\frac{4}{2017}\right)<0 \end{cases}$. Nên (*) $\Leftrightarrow$ $3e^{3x}-(m-1)e^x\leq 0,\forall x\in(1;2)$ $\Leftrightarrow$

$3e^{2x}+1\leq m,\forall x\in(1;2)$

• Đặt $g(x)=3e^{2x}+1,\forall x\in(1;2)$, $g(x)=3e^{2x}.2>0,\forall x\in(1;2)$

x	1		2
$g'(x)$	|	+	|
$g(x)$	|		|

. Vậy (*) xảy ra khi $m \geq g(2) \Leftrightarrow m \geq 3e^4 + 1$.

♦Trắc nghiệm:

Câu 17. Anh Hưng đi làm được lĩnh lương khởi điểm là 3.000.000/ tháng. Cứ 3 năm, lương của anh Hưng lại được tăng thêm 7%/1 tháng. Hỏi sau 36 năm làm việc, anh Hưng nhận được tất cả bao nhêu tiền? (kết quả làm tròn đến hàng nghìn đồng)

A. 1.287.968.000 đồng **B.** 1.931.953.000 đồng

C. 2.575.937.000 đồng **D.** 3.219.921.000 đồng

Hướng dẫn giải: Chọn B

♦Tự luận:

Ta có sau 36 năm thì anh Hưng được 12 lần nâng lương

Gọi p là tiền lương khởi điểm, P_n là tiền lương sau lần nâng lương thứ n (chu kì thứ n) ,

T_n là tổng số tiền lương trong chu kì lương thứ n

Khi đó:

+ Trong 3 năm đầu ứng với chu kì 1 : $T_1 = 36P$

+Trong 3 năm tiếp theo ứng với chu kì 2 (được nâng lương lần thứ nhất):

$P_1 = P + \Pr = P(1+r)$, $T_2 = 36P_1 = 36P(1+r)$

+ Trong 3 năm tiếp theo ứng với chu kì 3 (được nâng lương lần thứ hai):

$P_2 = P_1 + \mathrm{P_1 r} = P_1(1+r) = P(1+r)^2$, $T_3 = 36P_2 = 36P(1+r)^2$

…

+ Trong 3 năm cuối cùng ứng với chu kì 12: $P_{11} = P(1+r)^{11}$, $T_{12} = 36P_{11} = 36P(1+r)^{11}$

Vậy tổng số tiền của anh Hưng sau 36 năm là:

$$T = T_1 + T_2 + ... + T_{12} = 36P + 36P(1+r) + ... + 36P(1+r)^{11}$$

$$= 36P\left(1 + (1+r) + ...(1+r)^{11}\right) = 36P\frac{(1+r)^{12} - 1}{r}$$

Thay vao ta có: $T = 36.10^6 \dfrac{(1+7\%)^{12}}{7\%} = 1.931.953.000$ đồng

♦Trắc nghiệm:

Câu 18. **(THPT CHUYÊN TUYÊN QUANG – LẦN 1).** Ông A vay ngân hàng 220 triệu đồng và trả góp trong vòng 1 năm với lãi suất 1,15% mỗi tháng. Sau đúng 1 tháng kể từ ngày vay, ông sẽ hoàn nợ cho ngân hàng với số tiền hoàn nợ mỗi tháng là như nhau, hỏi mỗi tháng ông A sẽ phải trả bao nhiêu tiền cho ngân hàng, biết lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

A. $\dfrac{220.(1,0115)^{12}.0,0115}{(1,0115)^{12} - 1}$ (triệu đồng). **B.** $\dfrac{220.(1,0115)^{12}}{(1,0115)^{12} - 1}$ (triệu đồng).

C. $\dfrac{55.(1,0115)^{12}.0,0115}{3}$ (triệu đồng). **D.** $\dfrac{220.(1,0115)^{12}}{3}$ (triệu đồng).

Hướng dẫn giải: Chọn A

♦ Tự luận:

Đặt $T = 220000000; r = 1,15\%$

a là số tiền ông A trả hàng tháng

Số tiền ông A còn nợ sau 1 tháng là $T_1 = T(1+r)^1 - a$

Số tiền ông A còn nợ sau 2 tháng là: $T_2 = \left[T(1+r) - a\right](1+r) - a$

$$T_2 = T(1+r)^2 - a(1+r) - a$$

Số tiền ông A còn nợ sau 3 tháng là: $T_3 = \left[T(1+r)^2 - a(1+r) - a\right](1+r) - a$

$$T_3 = T(1+r)^3 - a(1+r)^2 - a(1+r) - a$$

Số tiền ông A còn nợ sau n tháng là:

$T_n = T(1+r)^n - a(1+r)^{n-1} - a(1+r)^{n-2} - .... - a(1+r) - a$

$T_n = T(1+r)^n - a\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$

Để sau n tháng trả hết nợ thì

$T_n = 0 \Leftrightarrow T(1+r)^n = a\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{r.T(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$

Thay số vào ta được đáp án A

♦ Trắc nghiệm:

Câu 19. **(THPT CHUYÊN TUYÊN QUANG – LẦN 1).** Tìm giá trị của tham số m để phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 5 = 0$ có nghiệm trên đoạn $\left[1; 3^{\sqrt{3}}\right]$.

A. $m \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$.. **B.** $[-2; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; 0)$.. **D.** $m \in [-2; 0]$..

Hướng dẫn giải: Chọn D

♦ Tự luận:

Ta có:

$x\in\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]\Leftrightarrow 0\le \log_3 x\le \sqrt{3}\Leftrightarrow 1\le \sqrt{\log_3{}^2 x+1}\le 2$

Đặt $t=\sqrt{\log_2^2 x+1}$, $t\in[1;\ 2]$

Phương trình trên trở thành:

$t^2+t-2m-6=0$, $t\in[1\ ;\ 2]\Leftrightarrow f\left(t\right)=t^2+t-6=2m, t\in[1;2]$

Số nghiệm của phương trình phụ thuộc số giao điểm của đồ thị hàm số $f\left(t\right)=t^2+t-6,\ t\in[1;2]$ và đường thẳng $y=2m$.Lập bảng biến thiên khảo sát hàm số ta được kết quả $m\in[-2;\ 0]$.

♦Trắc nghiệm:

Ta nhập $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-5$, dùng chức năng SOLVE với m thỏa mãn từng đáp án

+ Xét đáp án A và B ta thử với $m=1$ (thuộc A, B, không thuộc C, D) và SOLVE ta được $x\approx 0,094\ \in\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$, loại A, B

+ Xét đáp án C và D ta chọn $m=-3$ (thuộc A nhưng không thuộc B) , sau đó SOLVE ta được nghiệm $x\approx 1,21$

Suy ra ta chọn D

Câu 20. Cho $\log_7 12=x$, $\log_{12} 24=y$ và $\log_{54}168=\dfrac{axy+1}{bxy+cx}$, trong đó a,b,c là các số nguyên. Tính giá trị biểu thức $S=a+2b+3c$.

A. $S=4$ **B.** $S=19$. **C.** $S=10$. **D.** $S=15$.

Hướng dẫn giải: Chọn D

♦Tự luận:

$\log_7 12=x\Leftrightarrow \log_7 3+2\log_7 2=x$ (1)

$xy=\log_7 12.\log_{12}24=\log_7 24\Rightarrow \log_7 3+3\log_7 2=xy$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $\log_7 2=xy-x,\ \log_7 3=3x-2xy$.

Do đó $\log_{54}168=\dfrac{\log_7 168}{\log_7 54}=\dfrac{\log_7(2^3.3.7)}{\log_7(3^3.2)}=\dfrac{3\log_7 2+\log_7 3+1}{\log_7 2+3\log_7 3}=\dfrac{xy+1}{-5xy+8x}$.

Do đó $a=1,b=-5,c=8\Rightarrow S=15$

♦Trắc nghiệm:

+ Tính $\log_7 12=x$, $\log_{12}24=y$, $\log_{54}168$, lưu lần lượt vào các biến B, C, A

+ Từ giả thiết, ta có: $a=S-2b-3c$.

Khi đó: $A=\dfrac{\left(S-2b-3c\right)xy+1}{bxy+cx}\Leftrightarrow A\left(bxy+cx\right)=Sxy-2bxy-3cxy+1\Leftrightarrow b=\dfrac{Sxy-3cxy-Acx+1}{Axy+2xy}$

Thay $\log_7 12 = x$, $\log_{12} 24 = y$, $\log_{54} 168$, lưu lần lượt bởi B, C, A, coi c là ẩn X , b là hàm F(X), ta có: $F(x) = \dfrac{SBC - 3BCx - ABx + 1}{ABC + 2BC}$

+ Bấm MODE\7

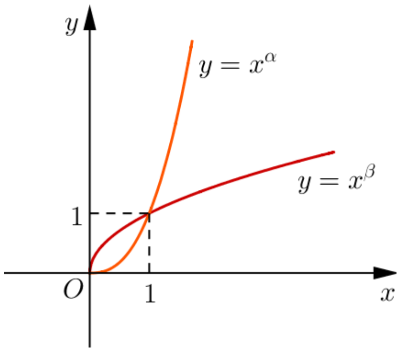
+ Nhập hàm $F(x) = \dfrac{SBC - 3BCx - ABx + 1}{ABC + 2BC}$ với S lấy từ đáp án

+ START:-10\END:10\STEP: 1

+ Khi đó với S = 15 ở cột $f(X)$ sẽ với $x = 8$ thì $f(x) = -5$

+ Vậy $c = 8, b = -5, a = 15 + 10 - 24 = 1$ nên chọn đáp án D

Câu 21. Cho α, β là các số thức. Đồ thị các hàm số $y = x^\alpha$, $y = x^\beta$ trên khoảng $(0; +\infty)$, được cho hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $0 < \beta < 1 < \alpha$.

B. $\beta < 0 < 1 < \alpha$.

C. $0 < \alpha < 1 < \beta$.

D. $\alpha < 0 < 1 < \beta$.

Hướng dẫn giải: Chọn D

♦ Tự luận:

Với $x_0 > 1$ ta có:

$x_0^\alpha > 1 \Rightarrow \alpha > 0; x_0^\beta > 1 \Rightarrow \beta > 0$.

$x_0^\alpha > x_0^\beta \Rightarrow \alpha > \beta$

Mặt khác, dựa vào hình dáng đồ thị ta suy ra $\alpha > 1$ và $\beta < 1$. Suy ra đáp án D

♦ Trắc nghiệm:

Câu 22. **(SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO HÀ NỘI – LẦN 1).** Cho $f(x) = e^{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết rằng $f(1).f(2).f(3)...f(2017) = e^{\frac{m}{n}}$ với m, n là các số tự nhiên và $\dfrac{m}{n}$ tối giản. Tính $m - n^2$.

A. $m - n^2 = 2018$ **B.** $m - n^2 = -2018$ **C.** $m - n^2 = 1$ **D.** $m - n^2 = -1$

Hướng dẫn giải: Chọn D

♦ Tự luận:

Xét các số thực $x > 0$

Ta có : $\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}=\sqrt{\frac{\left(x^2+x+1\right)^2}{x^2(x+1)^2}}=\frac{x^2+x+1}{x^2+x}=1+\frac{1}{x(x+1)}=1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$.

Vậy, $f(1).f(2).f(3)...f(2017)=e^{\left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(1+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018}\right)}=e^{2018-\frac{1}{2018}}=e^{\frac{2018^2-1}{2018}}$,

hay $\frac{m}{n}=\frac{2018^2-1}{2018}$

Ta chứng minh $\frac{2018^2-1}{2018}$ là phân số tối giản.

Giả sử d là ước chung của 2018^2-1 và 2018

Khi đó ta có $2018^2-1 \vdots d$, $2018 \vdots d \Rightarrow 2018^2 \vdots d$ suy ra $1 \vdots d \Leftrightarrow d=\pm 1$

Suy ra $\frac{2018^2-1}{2018}$ là phân số tối giản, nên $m=2018^2-1, n=2018$.

Vậy $m-n^2=-1$.

♦ Trắc nghiệm:

Câu 23. **(THPT CHUYÊN QUỐC HỌC HUẾ - LẦN I).** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy xét hai hình H_1, H_2, được xác định như sau:

$H_1=\left\{M(x,y)/\log\left(1+x^2+y^2\right)\le 1+\log(x+y)\right\}$;

$H_2=\left\{M(x,y)/\log\left(2+x^2+y^2\right)\le 2+\log(x+y)\right\}$

Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của các hình H_1, H_2. Tính tỉ số $\frac{S_2}{S_1}$

A. 99	**B.** 101	**C.**102	**D.** 100

Hướng dẫn giải: Chọn C

Chú ý:

+ $\log a \le \log b; (a>1) \Rightarrow a \le b$

+ Giả sử Trong mặt phẳng tọa độ Oxy xét hình H thỏa mãn:

$$H=\left\{M(x,y)/(x-a)^2+(y-b)^2\le R^2\right\}$$

Thì H là Hình tròn tâm (a,b) bán kính R.

♦ Tự luận:

$H_1 = \left\{ M(x,y) / \log\left(1+x^2+y^2\right) \le 1+\log(x+y) \right\}$

$\log\left(1+x^2+y^2\right) \le 1+\log(x+y)$

$\Rightarrow 1+x^2+y^2 \le 10(x+y)$

$\Rightarrow (x-5)^2+(y-5)^2 \le (7)^2$

=> H1 là Hình tròn tâm (5;5) bán kính 7

$H_2 = \left\{ M(x,y) / \log\left(2+x^2+y^2\right) \le 2+\log(x+y) \right\}$

$\Rightarrow (x-50)^2+(y-50)^2 \le \left(7\sqrt{102}\right)^2$

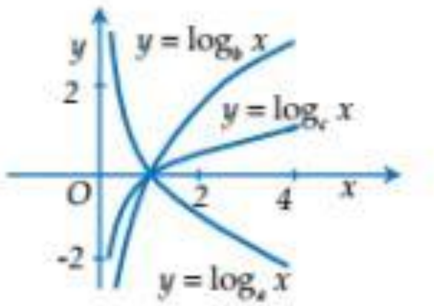
=> H2 là Hình tròn tâm (50;50) bán kính $7\sqrt{102}$

=> Tỉ lệ S là 102.

Suy ra đáp án C

♦Trắc nghiệm:

Câu 24. Cho 3 số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị hàm số $y=\log_a x; y=\log_b x$



A. $b<a<c$ **B.** $a<b<c$ **C.** $a<c<b$ **D.** $c<a<b$

Hướng dẫn giải: Chọn B

Chú ý: *Dựa vào tính đồng biến, nghịch biến của logarit:*

$a>1 \Rightarrow \log_a x$ *là hàm đồng biến;*

$0<a<1 \Rightarrow \log_a x$ *là hàm nghịch biến.*

♦Tự luận:

Dựa vào đồ thị ta có $a<1; b>1; c>1$; hơn nữa với cùng giá trị x thì $\log_c x < \log_b x \Rightarrow c>b$

♦Trắc nghiệm:

Câu 25

Hướng dẫn giải: Chọn D

♦Tự luận:

$$P=\log_{\frac{a}{b}}^2\left(a^2\right)+3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{\log_b a^2}{\log_b\frac{a}{b}}\right)^2+3\left(\log_b a-1\right)=\left(\frac{2\log_b a}{\log_b a-1}\right)^2+3\left(\log_b a-1\right)$$

Đặt $x=\log_b a-1$, do $a>b>1$ nên $x>0$. Ta có $f(x)=4\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+3x$ và $f'(x)=-\frac{8}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)+3$

Khi đó $-\frac{8}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)+3=0\Leftrightarrow 8(x+1)=3x^3\Leftrightarrow x=2$. Dễ thấy $P=f(x)\ge f(2)=15$.

♦Trắc nghiệm: MODE 7\nhập hàm $f(x)=4\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+3x$ \STAR: 1 \END: 25 \STEP: 1. Sau khi ta bằng thì máy tính ở cột $f(\mathrm{x})$ sẽ có giá trị nhỏ nhất là 15.

Câu 26.

Hướng dẫn giải: Chọn C

♦Tự luận:

Phương trình đã cho viết lại thành $m\left(2^x+1\right)=6^x+3.2^x$ hay $m=\frac{6^x+3.2^x}{2^x+1}=\frac{3^x+3}{2^{-x}+1}=f(x)$

Ta có $f'(x)=\frac{3^x.\ln 3.\left(2^{-x}+1\right)+\left(3^x+3\right)2^{-x}\ln 2}{\left(2^{-x}+1\right)^2}>0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó, với $x\in(0;1)$ thì $f(0)<f(x)<f(1)$ hay $2<f(x)<4$. Vậy $m\in(2;4)$.

♦Trắc nghiệm:

Câu 27.

Hướng dẫn giải: Chọn C

♦ Tự luận:

Ta có $M'=\log 4A-\log A_0=\log 4+\log A-\log A_0=\log 4+8,3\approx 8,9$.

♦ Trắc nghiệm:

Câu 28.

Hướng dẫn giải: Chọn A

♦ Tự luận:

Sau 5h có 300 con, suy ra $300=100.\mathrm{e}^{5r}\Rightarrow \mathrm{r}=\frac{\ln 3}{5}\approx 0.2197$

Vi khuẩn tăng số lượng gấp đôi sau thời gian $t \approx \frac{\ln 200 - \ln 100}{0,2197} \approx 3,15 = 3h15'$

♦ Trắc nghiệm:

Câu 29.

Hướng dẫn giải: Chọn B

♦ Tự luận:

Gọi T là chu kì bán rã, suy ra $\frac{1}{2}A = A.e^{r.T} \Rightarrow r = \frac{-\ln 2}{T}$. Do đó: $S = 5.e^{-\frac{\ln 2}{T}.4000} = 5.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4000}{1602}} \approx 0,886$.

♦ Trắc nghiệm:

Câu 30.

Hướng dẫn giải: Chọn D

♦ Tự luận:

$\log_7 12 = x \Leftrightarrow \log_7 3 + 2\log_7 2 = x$ (1)

$xy = \log_7 12.\log_{12} 24 = \log_7 24 \Rightarrow \log_7 3 + 3\log_7 2 = xy$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $\log_7 2 = xy - x, \log_7 3 = 3x - 2xy$.

Do đó $\log_{54} 168 = \frac{\log_7 168}{\log_7 54} = \frac{\log_7(2^3.3.7)}{\log_7(3^3.2)} = \frac{3\log_7 2 + \log_7 3 + 1}{\log_7 2 + 3\log_7 3} = \frac{xy+1}{-5xy+8x}$.

Do đó $a = 1, b = -5, c = 8 \Rightarrow S = 15$

♦ Trắc nghiệm:

Câu 31.

Hướng dẫn giải: Chọn B.

♦ Tự luận:

PT $\Leftrightarrow \log_2^2 x - 2\log_2 x + 3 = m$. Đặt $t = \log_2 x$, do $x \in \left[\frac{1}{2};4\right]$ nên $t \in [-1;2]$.

PT đã cho trở thành $t^2 - 2t + 3 = m$ (*) .

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t) = t^2 - 2t + 3$ trên đoạn $[-1;2]$ ta được (*) có nghiệm $t \in [-1;2]$ khi và chỉ khi $\min\limits_{[-1;2]} f(t) \le m \le \max\limits_{[-1;2]} f(t) \Leftrightarrow 2 \le m \le 6$.

♦ Trắc nghiệm:

Câu 32.

Hướng dẫn giải: Chọn D

♦ Tự luận:

$$y'=\frac{2\ln x-\ln^2 x}{x^2},\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\ln x=0\\ \ln x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=e^2\end{array}\right..$$

$$y(1)=0,\ y(e^2)=\frac{4}{e^2},y(e^3)=\frac{9}{e^3}\Rightarrow\max_{[1;e^3]}=y(e^2)=\frac{4}{e^2}\Rightarrow m=4,n=2\Rightarrow S=4^2+2.2^3=32$$

♦ Trắc nghiệm:

Câu 33.

Hướng dẫn giải: Chọn C

♦Tự luận:

• TXĐ: $(0;+\infty)$

Đặt $t=\ln^2 x, t\ge 0\to g(t)=t+\frac{1}{t+2}$.

$\to g'(t)=1-\frac{1}{(t+2)^2}>0, \forall t\ge 0$

$\to\max\limits_{[0;+\infty)} g(t)=\frac{1}{2}\to\max\limits_{(0;+\infty)} f(x)=\frac{1}{2}$

♦Trắc nghiệm: Mode + 7 nhập $f(x)=x+\frac{1}{x+2}$, start: 0,end: 20, step:1 $\to C$

Câu 34.

Hướng dẫn giải: Chọn B

♦Tự luận:

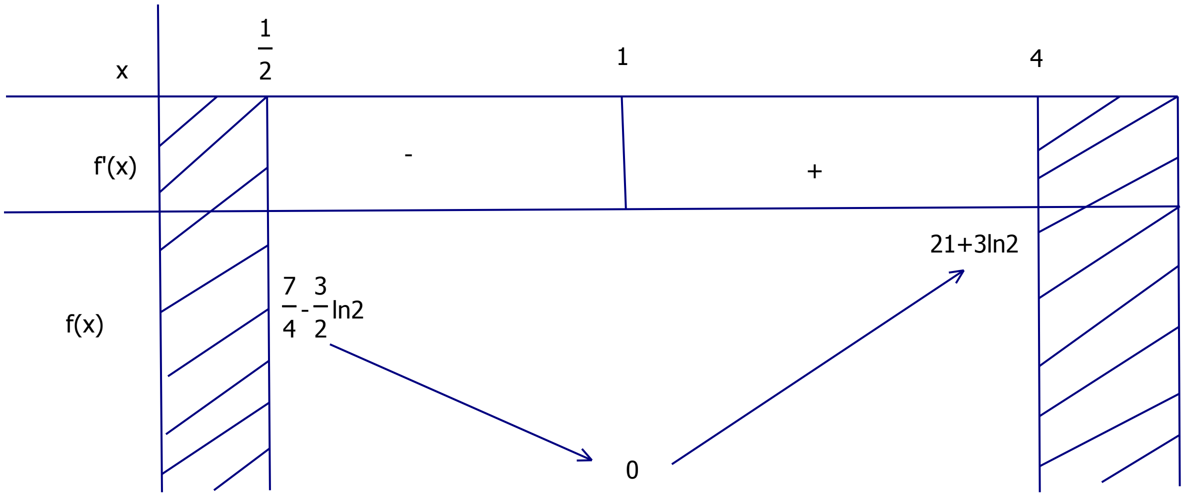
• Xét $x\in\left[\frac{1}{2};4\right]$

$$f(x)=\begin{cases}g(x)=-x^2-2x+3+\frac{3}{2}\ln x \text{ khi } x\in\left[\frac{1}{2};1\right]\\ h(x)=x^2+2x-3+\frac{3}{2}\ln x \text{ khi } x\in[1;4]\end{cases}$$

Với $x\in\left[\frac{1}{2};1\right]\to f'(x)=g'(x)=-2x-2+\frac{3}{2x}=\frac{(1-2x)(2x+3)}{2x}<0$

Với $x\in[1;4]\to f'(x)=h'(x)=2x+2+\frac{3}{2x}>0$

Ta có bảng biến thiên



Suy ra $a=21+3\ln 2, b=0 \to a + e^b = 22+3\ln 2$

♦Trắc nghiệm: Mode 7 nhập $f(x)=\left|x^2+2x-3\right|+\frac{3}{2}\ln x$, start: 1,end: 4, step:1 $\to a \approx 23,07944, b=0 \to a+e^b \approx 24,07944 \to B$

Câu 35.

Hướng dẫn giải: Chọn B

♦ Tự luận:

Xét $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, TXĐ $(0;+\infty)$

$\to y'=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}, y''=\frac{\sqrt{x}}{2x^3}(3\ln x-8)$. Từ đó tìm được $m=e^2, n=e^{\frac{8}{3}} \to \ln m+\frac{4}{\ln n}=\frac{7}{2}$

♦ Trắc nghiệm:

Nhập $\frac{\sqrt{x}}{2x^3}(3\ln x-8)$,calc x = e² $y''(e^2)<0 \to m=e^2$

Nhập $\frac{\sqrt{x}}{2x^3}(3\ln x-8)$,calc x = $e^{\frac{8}{3}}$-1$\to$ $y''(e^{\frac{8}{3}}-1)>0$,calc x = $e^{\frac{8}{3}}$+1$\to$ $y''(e^{\frac{8}{3}}+1)<0 \to n=e^{\frac{8}{3}}$

Câu 36.

Hướng dẫn giải: Chọn D

♦ Tự luận:

$P=\log_2^3 a-3\log_2^2 a-9\log_2 a+7, a\in[1;16]$

Đặt $t=\log_2 a, t\in[0;4] \to f(t)=t^3-3t^2-9t+7$

$\to f'(t)=3t^2-6t-9=0 \leftrightarrow t=3$

$f(0)=7; f(3)=-20; f(4)=-13 \to M=7, N=-20 \to M+N=-13$

♦Trắc nghiệm: Mode 7 nhập $f(x)=x^3-3x^2-9x+7$, start: 0 ,end: 4, step:1$\to M+N=-13$

Câu 37.

Hướng dẫn giải: Chọn A

♦Tự luận:

Ta có $P=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+a}$. Theo bất đẳng thức Nesbit, ta có $P\geq\frac{3}{2}$, dấu '' = '' khi a = b = c

$\to A \ge \log_3 \frac{3}{2} - 1 = -\log_2 3$

♦Trắc nghiệm:

P là biểu thức đối xứng với a, b, c nên P đạt giá trị nhỏ nhất khi a = b = c$\to P = \frac{3}{2} \to$ Kết quả

Câu 38.

Hướng dẫn giải: Chọn B

♦Tự luận:

Xét $y' + 3y\ln 2 = 0 (1)$

Nếu y = 0 thì (1) đúng

Nếu $y \ne 0$ thì $(1) \leftrightarrow \frac{y'}{y} = -3\ln 2 \to \ln|y| = -3\ln 2 + C \to |y| = e^{-3\ln 2 + C} = e^c.8^{-x}$

$\to y = \pm e^C.8^{-x} = A.8^{-x}\left(A = \pm e^C \ne 0\right)$

Theo trên y = 0 là nghiệm của (1) . Vậy $f(x) = A.8^{-x}\left(A \in \mathbb{R}\right)$

♦Trắc nghiệm: - Tính y′ ở các đáp án, thay y′ và y vào $y' + 3y\ln 2 = 0$ ta được kết quả.

Câu 39.

Hướng dẫn giải: Chọn C

♦ Tự luận:

Xét hệ: $\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 5 \\ \log_m(3x+2y) - \log_3(3x - 2y) = 1 \end{cases} (I)$ Đk : $\begin{cases} 0 < 3x + 2y \\ 0 < 3x - 2y \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} a = 3x + 2y \\ b = 3x - 2y \end{cases}$ Đk: $a, b > 0$, $0 < m \ne 1$.

Khi đó hệ (I) có dạng: $\begin{cases} a.b = 5 (1) \\ \log_m a - \log_3 b = 1 (2) \end{cases}$

Từ (1) ta có $b = \frac{5}{a}$ thay vào(2) ta tính được $\log_3 a = \frac{(\log_3 5 + 1)\log_3 m}{1 + \log_3 m}\left(m \ne \frac{1}{3}\right)$

Ta có $3x + 2y \le 5 \to a \le 5 \to \log_3 a \le \log_3 5$

$\to \frac{(\log_3 5 + 1)\log_3 m}{1 + \log_3 m} \le \log_3 5 \to -1 < \log_3 m \le \log_3 5 \to \frac{1}{3} < m \le 5$

Vậy giá trị lớn nhất của m là 5

♦ Trắc nghiệm: Giải như tự luận.

Câu 40.

Hướng dẫn giải: Chọn C

♦ Tự luận:

Ta có $\lg(x+2y) = \lg x + \lg y (0 < x, y) \leftrightarrow x + 2y = xy$

$x + 2y = xy = \frac{1}{2}x.2y \le \frac{1}{2}\left(\frac{x+2y}{2}\right)^2 \to x + 2y \ge 8$

$P = e^{\frac{x^2}{8y+4} + \frac{y^2}{1+x}} = e^{f(x;y)}, f(x;y) = \frac{x^2}{8y+4} + \frac{y^2}{1+x}$

$\rightarrow f(\mathrm{x;y})=\frac{x^2}{8y+4}+\frac{(2y)^2}{4+4x}\ge\frac{(x+2y)^2}{8+4(x+2y)}$, Đặt t = $x+2y, t\ge 8\rightarrow f(\mathrm{x;y})\ge g(\mathrm{t})$, $g(\mathrm{t})=\frac{t^2}{4t+8}$

Xét $g(\mathrm{t})=\frac{t^2}{4t+8}\rightarrow g'(\mathrm{t})=\frac{4t^2+16t}{4t+8}>0\forall t\ge 8\rightarrow g(\mathrm{t})\ge\frac{8}{5}\forall t\ge 8$

$\rightarrow P\ge e^{f(\mathrm{x;y})}\ge e^{g(\mathrm{t})}\ge e^{\frac{8}{5}}$, dấu '' ='' khi x = 4; y = 2.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $e^{\frac{8}{5}}$

♦ Trắc nghiệm: Mode + 7 nhập $f(x)=\frac{x^2}{4x+8}$, start: 8,end: 30, step:1 $\rightarrow \min\limits_{[8;+\infty)} g(\mathrm{t})=\frac{8}{5}\rightarrow \min P=\mathrm{e}^{\frac{8}{5}}$

----------------------------- Hết --------------------------