MỤC LỤC

PHẦN I. HÀM SỐ 4

1. SỰ ĐỒNG BIẾN NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ 4

1.1. Định nghĩa 4

1.2. Quy tắc và công thức tính đạo hàm 4

1.3. Bảng công thức tính đạo hàm 5

1.4 . Công thức tính nhanh đạo hàm hàm phân thức 5

1.5. Đạo hàm cấp 2 5

2. CỰC TRỊ HÀM SỐ 7

2.1. Định nghĩa 7

2.2. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị 8

2.3. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị 8

2.4. Quy tắc tìm cực trị 8

3. MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN CỰC TRỊ HÀM SỐ 9

3.1. Cực trị của hàm đa thức bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$ 9

3.2. Cực trị của hàm bậc 4 trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c, \quad \left(a \neq 0\right)$ 12

4. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT 14

4.1. Định nghĩa. 14

4.2. Phương pháp tìm GTLN,GTNN 14

5. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ 15

5.1. Đường tiệm cận ngang 15

5.2. Đường tiệm cận đứng 15

6. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ 15

6.1. Khảo sát một số hàm đa thức và hàm phân thức 15

6.2. Một số phép biến đổi đồ thị 17

7. TIẾP TUYẾN 19

7.1. Tiếp tuyến 19

7.2. Điều kiện tiếp xúc 20

8. TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ 20

9. ĐIỂM ĐẶC BIỆT CỦA HỌ ĐƯỜNG CONG 20

9.1. Bài toán tìm điểm cố định của họ đường cong 20

9.2. Bài toán tìm điểm có tọa độ nguyên 21

9.3. Bài toán tìm điểm có tính chất đối xứng 21

9.4. Bài toán tìm điểm đặc biệt, khoảng cách 22

PHẦN II. MŨ VÀ LOGARIT 24

1. LŨY THỪA VÀ HÀM SỐ LŨY THỪA 24

1.1. Khái niệm lũy thừa 24

1.2. Phương trình $x^n = b$. 24
1.3. Một số tính chất của căn bậc n 25
1.4. Hàm số lũy thừa 25
1.5. Khảo sát hàm số mũ $y = a^x$, $\left(a > 0, a \neq 1\right)$. 26
2. LOGARIT 27
2.1. Khái niệm Logarit 27
2.2. Bảng tóm tắt công thức Mũ-logarit thường gặp 27
3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT. 28
3.1. Bất phương trình mũ cơ bản 28
3.2. Bất phương trình logarit cơ bản 28
4. BÀI TOÁN LÃI SUẤT NGÂN HÀNG 29
4.1. Lãi đơn 29
4.2. Lãi kép 29
4.3. Tiền gửi hàng tháng 30
4.4. Gửi ngân hàng và rút tiền gửi hàng tháng 30
4.5. Vay vốn trả góp 30
4.6. Bài toán tăng lương 31
4.7. Bài toán tăng trưởng dân số 31
4.8. Lãi kép liên tục 31
PHẦN III. NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN 32
1. NGUYÊN HÀM 32
1.1. Định nghĩa 32
1.2. Tính chất của nguyên hàm 32
1.3. Sự tồn tại của nguyên hàm 32
1.4. Bảng nguyên hàm các hàm số thường gặp 32
1.5. Bảng nguyên hàm mở rộng 33
2. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM 34
2.1. Phương pháp đổi biến 34
2.2. Phương pháp nguyên hàm từng phần 35
3. TÍCH PHÂN 36
3.1. Công thức tính tích phân 36
3.2. Tính chất của tích phân 36
4. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN 37
4.1. Phương pháp đổi biến 37
4.2. Phương pháp tích phân từng phần 38
5. TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ SƠ CẤP CƠ BẢN 38
5.1. Tích phân hàm hữu tỉ 38
5.2. Tích phân hàm vô tỉ 40

5.3. Tích phân hàm lượng giác 43
6. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN 46
6.1. Diện tích hình phẳng 46
6.2. Thể tích vật thể và thể tích khối tròn xoay 46
PHẦN IV. SỐ PHỨC 48
1. SỐ PHỨC 48
1.1. Khái niệm số phức 48
1.2. Hai số phức bằng nhau 48
1.3. Biểu diễn hình học số phức 48
1.4. Số phức liên hợp 48
1.5. Môđun của số phức 48
2. PHÉP CỘNG TRỪ NHÂN CHIA SỐ PHỨC 49
2.1. Phép cộng và phép trừ số phức 49
2.2. Phép nhân số phức 49
2.3. Chia hai số phức 49
3. TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN SỐ PHỨC 49
4. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC 50
4.1. Căn bậc hai của số thực âm 50
4.2. Phương trình bậc hai với hệ số thực 50
5. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN MAX – MIN MÔ ĐUN SỐ PHỨC 50

PHẦN I. HÀM SỐ

1. SỰ ĐỒNG BIẾN NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

1.1. Định nghĩa

Kí hiệu K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng. Giả sử hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên K ta có:

- Hàm số $y = f\left(x\right)$ được gọi là **đồng biến** *(tăng)* trên K nếu:

$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)}$$

- Hàm số $y = f\left(x\right)$ được gọi là **nghịch biến** *(giảm)* trên K nếu:

$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right)}$$

*Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là **đơn điệu** trên K*

* ***Nhận xét:***

- Hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trên $K \Leftrightarrow \dfrac{f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right)}{x_2 - x_1} > 0\ \forall x_1, x_2 \in K,\ x_1 \neq x_2$. Khi đó đồ thị của hàm số ***đi lên*** từ trái sang phải.
- Hàm số $f\left(x\right)$ nghịch biến trên $K \Leftrightarrow \dfrac{f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right)}{x_2 - x_1} < 0\ \forall x_1, x_2 \in K,\ x_1 \neq x_2$. Khi đó đồ thị của hàm số ***đi xuống*** từ trái sang phải.
- Nếu $f'\left(x\right) > 0,\ \forall x \in \left(a;b\right) \Rightarrow$ hàm số $f\left(x\right)$ **đồng biến** trên khoảng $\left(a;b\right)$.
- Nếu $f'\left(x\right) < 0,\ \forall x \in \left(a;b\right) \Rightarrow$ hàm số $f\left(x\right)$ **nghịch biến** trên khoảng $\left(a;b\right)$.
- Nếu $f'\left(x\right) = 0,\ \forall x \in \left(a;b\right) \Rightarrow$ hàm số $f\left(x\right)$ **không đổi** trên khoảng $\left(a;b\right)$.
- Nếu $f\left(x\right)$ **đồng biến** trên khoảng $\left(a;b\right) \Rightarrow f'\left(x\right) \geq 0,\ \forall x \in \left(a;b\right)$.
- Nếu $f\left(x\right)$ **nghịch biến** trên khoảng $\left(a;b\right) \Rightarrow f'\left(x\right) \leq 0, \forall x \in \left(a;b\right)$.
- Nếu thay đổi khoảng $\left(a;b\right)$ bằng một **đoạn** hoặc **nửa khoảng** thì phải **bổ sung** thêm giả thiết "hàm số $f\left(x\right)$ ***liên tục*** trên đoạn hoặc nửa khoảng đó".

1.2. Quy tắc và công thức tính đạo hàm

Quy tắc tính đạo hàm: Cho $u = u\left(x\right);\ v = v\left(x\right);\ C$: là hằng số .

- ***Tổng, hiệu:*** $\left(u \pm v\right)' = u' \pm v'$.
- **Tích:** $\left(u.v\right)' = u'.v + v'.u \Rightarrow \left(C.u\right)' = C.u'$.

- **Thương:** $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - v'.u}{v^2}$, $(v \neq 0) \Rightarrow \left(\frac{C}{u}\right)' = -\frac{C.u'}{u^2}$
- **Đạo hàm hàm hợp:** Nếu $y = f(u),\ u = u(x) \Rightarrow y'_x = y'_u.u'_x$.

1.3. Bảng công thức tính đạo hàm

Đạo hàm của hàm sơ cấp	Đạo hàm của hàm hợp
$(C)' = 0$ (C là hằng số).	$(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$
$(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\ (x \neq 0)$ $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ (x > 0)$	$(u^\alpha)' = \alpha.u^{\alpha-1}.u'$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}\ (u \neq 0)$ $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}\ (u > 0)$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'.\cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'.\sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u'.e^u$
$(a^x)' = a^x.\ln a$	$(a^u)' = u'.a^u.\ln a$
$(\ln\lvert x\rvert)' = \frac{1}{x}$	$(\ln\lvert u\rvert)' = \frac{u'}{u}$
$(\log_a\lvert x\rvert)' = \frac{1}{x\ln a}$	$(\log_a\lvert u\rvert)' = \frac{u'}{u.\ln a}$

1.4 . Công thức tính nhanh đạo hàm hàm phân thức

- $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.
- $\left(\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} x^2 + 2\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}}{(dx^2+ex+f)^2}$.

1.5. Đạo hàm cấp 2

1.5.1. Định nghĩa

$$f''(x) = [f'(x)]'$$

1.5.2. Ý nghĩa cơ học

Gia tốc tức thời của chuyển động $s = f(t)$ tại thời điểm t_0 là: $a(t_0) = f''(t_0)$.

1.5.3. Đạo hàm cấp cao

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]', (n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

* **<u>Một số chú ý:</u>**

- Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cùng đồng biến (nghịch biến) trên K thì hàm số $f(x) + g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên K. Tính chất này có thể không đúng đối với hiệu $f(x) - g(x)$.
- Nếu hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số dương và cùng đồng biến (nghịch biến) trên K thì hàm số $f(x).g(x)$ cũng đồng biến (nghịch biến) trên K. Tính chất này có thể không đúng khi các hàm số $f(x), g(x)$ không là các hàm số dương trên K.
- Cho hàm số $u = u(x)$, xác định với $x \in (a;b)$ và $u(x) \in (c;d)$. Hàm số $f[u(x)]$ cũng xác định với $x \in (a;b)$.

Ta có nhận xét sau:

- Giả sử hàm số $u = u(x)$ đồng biến với $x \in (a;b)$. Khi đó, hàm số $f[u(x)]$ đồng biến với $x \in (a;b) \Leftrightarrow f(u)$ đồng biến với $u \in (c;d)$.
- Giả sử hàm số $u = u(x)$ nghịch biến với $x \in (a;b)$. Khi đó, hàm số $f[u(x)]$ nghịch biến với $x \in (a;b) \Leftrightarrow f(u)$ nghịch biến với $u \in (c;d)$.

Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số.

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên K

- Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm $x \in K$ thì hàm số f đồng biến trên K.
- Nếu $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm $x \in K$ thì hàm số f nghịch biến trên K.

Chú ý:

* Đối với hàm phân thức hữu tỉ $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\left(x \neq -\dfrac{d}{c}\right)$ thì dấu "=" khi xét dấu đạo hàm y' không xảy ra.

Giả sử $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$	Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

<table>
<tr>
<td>$\Leftrightarrow f'\left(x\right) \ge 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a > 0\\ \Delta \le 0\end{cases}\\ \begin{cases}a = 0\\ b = 0\\ c > 0\end{cases}\end{array}\right.$.</td>
<td>$\Leftrightarrow f'\left(x\right) \le 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a < 0\\ \Delta \le 0\end{cases}\\ \begin{cases}a = 0\\ b = 0\\ c < 0\end{cases}\end{array}\right.$.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Trường hợp 2 thì hệ số c khác 0 vì khi $a = b = c = 0$ thì $f\left(x\right) = d$
(Đường thẳng song song hoặc trùng với trục Ox thì không đơn điệu)</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

** Với dạng toán tìm tham số m để hàm số bậc ba đơn điệu một chiều trên khoảng có độ dài bằng l ta giải như sau:*

<u>Bước 1</u>: Tính $y' = f'\left(x;m\right) = ax^2 + bx + c.$

<u>Bước 2</u>: Hàm số đơn điệu trên $\left(x_1;x_2\right) \Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta > 0\\ a \ne 0\end{cases} \quad \left(*\right)$$

<u>Bước 3</u>: Hàm số đơn điệu trên khoảng có độ dài bằng l

$$\Leftrightarrow \left|x_1 - x_2\right| = l \Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2 = l^2 \Leftrightarrow S^2 - 4P = l^2 \quad \left(**\right)$$

<u>Bước 4</u>: Giải $\left(*\right)$ và giao với $\left(**\right)$ để suy ra giá trị m cần tìm.

</td>
</tr>
</table>

2. CỰC TRỊ HÀM SỐ

2.1. Định nghĩa

Giả sử hàm số f xác định trên tập K và $x_0 \in K$. Ta nói:

- x_0 là **điểm cực tiểu** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $\left(a;b\right)$ chứa x_0 sao cho $\left(a;b\right) \subset K$ và $f\left(x\right) > f\left(x_0\right), \forall x \in \left(a;b\right) \setminus \left\{x_0\right\}$. Khi đó $f\left(x_0\right)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số f.
- x_0 là **điểm cực đại** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $\left(a;b\right)$ chứa x_0 sao cho $\left(a;b\right) \subset K$ và $f\left(x\right) < f\left(x_0\right), \forall x \in \left(a;b\right) \setminus \left\{x_0\right\}$. Khi đó $f\left(x_0\right)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số f.
- Điểm cực đại và điểm cực tiểu gọi chung là **điểm cực trị**.
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu gọi chung là **cực trị**.
- Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là ***điểm cực trị của hàm số*** và điểm cực trị phải là một điểm trong tập hợp *K*.
- Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là ***giá trị cực trị (hay cực trị)*** *của hàm số.*

- Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số thì điểm $\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ được gọi là **điểm cực trị của đồ thị** hàm số f.

*** Nhận xét:**

- Giá trị cực đại (cực tiểu) $f\left(x_0\right)$ nói chung không phải là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên tập D; $f\left(x_0\right)$ chỉ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên một khoảng $\left(a;b\right)$ nào đó chứa x_0 hay nói cách khác khi x_0 điểm cực đại (cực tiểu) sẽ tồn tại khoảng (a;b) chứa x_0 sao cho $f\left(x_0\right)$ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên khoảng $\left(a;b\right)$.
- Hàm số f có thể đạt cực đại hoặc cực tiểu tại nhiều điểm trên tập K. Hàm số có thể không có cực trị trên một tập cho trước.

2.2. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

Định lí 1:

Giả sử hàm số $y = f\left(x\right)$ đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, nếu $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'\left(x_0\right) = 0.$

Chú ý:

- Đạo hàm $f'\left(x\right)$ *có thể* bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số f không đạt cực trị tại điểm x_0.
- Hàm số *có thể* đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm.
- Hàm số *chỉ có thể* đạt cực trị tại một điểm mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc tại đó hàm số không có đạo hàm.

2.3. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị

Định lí 2:

Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, nếu hàm số f có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

- Nếu $f'\left(x\right) > 0$ trên khoảng $\left(x_0 - h; x_0\right)$ và $f'\left(x\right) < 0$ trên khoảng $\left(x_0; x_0 + h\right)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f\left(x\right)$.
- Nếu $f'\left(x\right) < 0$ trên khoảng $\left(x_0 - h; x_0\right)$ và $f'\left(x\right) > 0$ trên khoảng $\left(x_0; x_0 + h\right)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f\left(x\right)$.

2.4. Quy tắc tìm cực trị

Quy tắc 1:

- *<u>Bước 1:</u>* Tìm tập xác định. Tìm $f'\left(x\right)$.

- *Bước 2:* Tìm các điểm x_i $(i = 1;2;\ldots)$ mà tại đó *đạo hàm của hàm số bằng* 0 hoặc hàm số *liên tục nhưng không có đạo hàm.*
- *Bước 3:* Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ *đổi dấu khi đi qua* x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i.

Định lí 3:

Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$ với $h > 0$. Khi đó:

- Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại x_0.
- Nếu $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại x_0.

Từ định lí trên, ta có một quy tắc khác để tìm cực trị của hàm số

Quy tắc 2:

- *Bước 1:* Tìm tập xác định. Tìm $f'(x)$.
- *Bước 2:* Tìm các nghiệm x_i $(i = 1;2;\ldots)$ của phương trình $f'(x) = 0$.
- *Bước 3:* Tính $f''(x)$ và tính $f''(x_i)$.
  - Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_i.
  - Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_i.

3. MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN CỰC TRỊ HÀM SỐ

3.1. Cực trị của hàm đa thức bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

3.1.1. Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu thỏa mãn hoành độ cho trước

Bài toán tổng quát:

Cho hàm số $y = f(x;m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tìm tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu tại x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện K cho trước?

Phương pháp:

- *Bước 1:*
  - Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
  - Đạo hàm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c = Ax^2 + Bx + C$
- *Bước 2:*
  Hàm số có cực trị (hay có hai cực trị, hai cực trị phân biệt hay có cực đại và cực tiểu)

$\Leftrightarrow$ $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và y' đổi dấu qua 2 nghiệm đó

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 3a \neq 0 \\ \Delta_{y'} = B^2 - 4AC = 4b^2 - 12ac > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1.$$

- *Bước 3:*

  Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$.

  Khi đó: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{B}{A} = -\dfrac{2b}{3a} \\ x_1.x_2 = \dfrac{C}{A} = \dfrac{c}{3a} \end{cases}$.

- *Bước 4:*

  Biến đổi điều kiện K về dạng tổng S và tích P. Từ đó giải ra tìm được $m \in D_2$.

- *Bước 5:*

  Kết luận các giá trị m thỏa mãn: $m = D_1 \cap D_2$.

* ***Chú ý:*** Hàm số bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\left(a \neq 0\right)$.

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Điều kiện	*Kết luận*
$b^2 - 3ac \leq 0$	Hàm số không có cực trị.
$b^2 - 3ac > 0$	Hàm số có hai điểm cực trị.

➢ ***Điều kiện để hàm số có cực trị cùng dấu, trái dấu.***

- *Hàm số có 2 cực trị trái dấu*

  $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu

  $\Leftrightarrow A.C = 3ac < 0 \Leftrightarrow ac < 0$.

- *Hàm số có hai cực trị cùng dấu*

  $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu

  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{C}{A} > 0 \end{cases}$

- *Hàm số có hai cực trị cùng dấu dương*

  $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt

  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\dfrac{B}{A} > 0 \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{C}{A} > 0 \end{cases}$

- *Hàm số có hai cực trị cùng dấu âm*

  $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt

  $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\dfrac{B}{A} < 0 \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{C}{A} > 0 \end{cases}$

➢ ***Tìm điều kiện để hàm số có hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn:***

$$\left[\begin{array}{l} x_1 < \alpha < x_2 \\ x_1 < x_2 < \alpha \\ \alpha < x_1 < x_2 \end{array}\right.$$

- Hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < \alpha < x_2$

$$\Leftrightarrow (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0 \Leftrightarrow x_1.x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 < 0$$

- Hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2 < \alpha$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \\ x_1 + x_2 < 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1.x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 2\alpha \end{cases}$$

- Hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $\alpha < x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) > 0 \\ x_1 + x_2 > 2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1.x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 2\alpha \end{cases}$$

- Phương trình bậc 3 có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng

khi có 1 nghiệm là $x = \frac{-b}{3a}$, có 3 nghiệm lập thành cấp số nhân khi có 1 nghiệm là $x = -\sqrt[3]{\frac{d}{a}}$.

3.1.2. Tìm điều kiện để đồ thị hàm số có các điểm cực đại, cực tiểu nằm cùng phía, khác phía so với một đường thẳng

<u>Vị trí tương đối giữa 2 điểm với đường thẳng</u>:

Cho 2 điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ và đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$.

Nếu $(ax_A + by_A + c)(ax_B + by_B + c) < 0$ thì hai điểm A, B nằm về hai phía so với đường thẳng Δ.

Nếu $(ax_A + by_A + c)(ax_B + by_B + c) > 0$ thì hai điểm A, B nằm cùng phía so với đường thẳng Δ.

<u>Một số trường hợp đặc biệt</u>:

- Các điểm cực trị của đồ thị nằm *<u>cùng về 1 phía đối với trục Oy</u>*
  $\Leftrightarrow$ hàm số có 2 cực trị cùng dấu
  $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu
- Các điểm cực trị của đồ thị nằm *<u>cùng về 2 phía đối với trục Oy</u>*
  $\Leftrightarrow$ hàm số có 2 cực trị trái dấu
  $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu
- Các điểm cực trị của đồ thị nằm *<u>cùng về 1 phía đối với trục Ox</u>*
  $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{CĐ}.y_{CT} > 0$

Đặc biệt:

- Các điểm cực trị của đồ thị nằm *<u>cùng về phía trên đối với trục Ox</u>*

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $\begin{cases} y_{CD}.y_{CT} > 0 \\ y_{CD} + y_{CT} > 0 \end{cases}$

- Các điểm cực trị của đồ thị nằm *cùng về phía dưới đối với trục Ox*

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $\begin{cases} y_{CD}.y_{CT} > 0 \\ y_{CD} + y_{CT} < 0 \end{cases}$

- Các điểm cực trị của đồ thị nằm *về 2 phía đối với trục Ox*

$\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{CD}.y_{CT} < 0$

(áp dụng khi không nhẩm được nghiệm và viết được phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số)

Hoặc: Các điểm cực trị của đồ thị nằm *về 2 phía đối với trục Ox*

$\Leftrightarrow$ đồ thị cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt *(áp dụng khi nhẩm được nghiệm)*

3.1.3. Phương trình đường thẳng qua các điểm cực trị

$\boxed{g(x) = \left(\frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a}\right)x + d - \frac{bc}{9a}}$ *hoặc* $\boxed{g(x) = y - \frac{y'.y''}{18a}}$ *hoặc* $\boxed{g(x) = y - \frac{y'.y''}{3y'''}}$

3.1.4. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc 3 là

$$AB = \sqrt{\frac{4e + 16e^3}{a}} \text{ với } e = \frac{b^2 - 3ac}{9a}$$

3.2. Cực trị của hàm bậc 4 trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c, \quad (a \neq 0)$

3.2.1. Một số kết quả cần nhớ

- Hàm số có một cực trị $\Leftrightarrow ab \geq 0$.
- Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$.
- Hàm số có đúng một cực trị và cực trị là cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$.
- Hàm số có đúng một cực trị và cực trị là cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$.
- Hàm số có hai cực tiểu và một cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$.
- Hàm số có một cực tiểu và hai cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$.

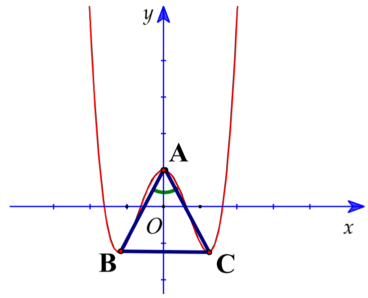
3.2.2. Một số công thức tính nhanh

Giả sử hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 cực trị: $A(0;c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

tạo thành tam giác ABC thỏa mãn dữ kiện: $ab < 0$

Đặt: $\widehat{BAC} = \alpha$

Tổng quát: $\boxed{\cot^2\frac{\alpha}{2} = \frac{-b^3}{8a}}$



Dữ kiện	**Công thức** **thỏa mãn** $ab < 0; c \neq 0$
Tam giác ABC vuông cân tại A	$b^3 = -8a$
Tam giác ABC đều	$b^3 = -24a$
Tam giác ABC có diện tích $S_{\Delta ABC} = S_0$	$32a^3(S_0)^2 + b^5 = 0$
Tam giác ABC có diện tích $max(S_0)$	$S_0 = \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}$
Tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp $r_{\Delta ABC} = r_0$	$r = \frac{b^2}{4\lvert a\rvert\left(1+\sqrt{1-\frac{b^3}{8a}}\right)}$
Tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R_{\Delta ABC} = R$	$R = \frac{b^3 - 8a}{8\lvert a\rvert b}$
Tam giác ABC có độ dài cạnh $BC = m_0$	$am_0^2 + 2b = 0$
Tam giác ABC có độ dài $AB = AC = n_0$	$16a^2n_0^2 - b^4 + 8ab = 0$
Tam giác ABC có cực trị $B, C \in Ox$	$b^2 = 4ac$
Tam giác ABC có 3 góc nhọn	$b(8a + b^3) > 0$
Tam giác ABC có trọng tâm O	$b^2 = 6ac$
Tam giác ABC có trực tâm O	$b^3 + 8a - 4ac = 0$
Tam giác ABC cùng điểm O tạo thành hình thoi	$b^2 = 2ac$
Tam giác ABC có O là tâm đường tròn nội tiếp	$b^3 - 8a - 4abc = 0$
Tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp	$b^3 - 8a - 8abc = 0$
Tam giác ABC có cạnh $BC = kAB = kAC$	$b^3.k^2 - 8a(k^2 - 4) = 0$
Trục hoành chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau	$b^2 = 4\sqrt{2}\lvert ac\rvert$
Tam giác ABC có điểm cực trị cách đều trục hoành	$b^2 = 8ac$

Đồ thị hàm số $(C): y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt lập thành cấp số cộng	$b^2 = \frac{100}{9}ac$
Định tham số để hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = ax^4 + bx^2 + c$ và trục hoành có diện tích phần trên và phần dưới bằng nhau.	$b^2 = \frac{36}{5}ac$
Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC là: $x^2 + y^2 - \left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a} + c\right)y + c\left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}\right) = 0$	

4. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

4.1. Định nghĩa.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D.

- Số M gọi là ***giá trị lớn nhất*** của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x) \le M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = M \end{cases}$. Kí hiệu: $M = \max\limits_{x \in D} f(x)$.
- Số m gọi là ***giá trị nhỏ nhất*** của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu: $\begin{cases} f(x) \ge m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m \end{cases}$. Kí hiệu: $m = \min\limits_{x \in D} f(x)$.

4.2. Phương pháp tìm GTLN,GTNN

4.2.1. Tìm GTLN, GTNN của hàm số bằng cách khảo sát trực tiếp

- *Bước 1*: Tính $f'(x)$ và tìm các điểm $x_1, x_2, \ldots, x_n \in D$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc hàm số không có đạo hàm.
- *Bước 2*: Lập bảng biến thiên và từ đó suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

4.2.2. Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một đoạn

- *Bước 1*:
  - ∗ Hàm số đã cho $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$.
  - ∗ Tìm các điểm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ trên khoảng $(a;b)$, tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.
- *Bước 2*: Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(b)$.
- *Bước 3*: Khi đó:
  - ∗ $\max\limits_{[a,b]} f(x) = \max\left\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(a), f(b)\right\}$.

* $\min\limits_{[a,b]} f(x) = \min\left\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), f(a), f(b)\right\}$.

4.2.3. Tìm GTLN, GTNN của hàm số trên một khoảng

- *Bước 1:* Tính đạo hàm $f'(x)$.
- *Bước 2:* Tìm tất cả các nghiệm $x_i \in (a;b)$ của phương trình $f'(x) = 0$ và tất cả các điểm $\alpha_i \in (a;b)$ làm cho $f'(x)$ không xác định.
- *Bước 3.* Tính $A = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $B = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$, $f(x_i)$, $f(\alpha_i)$.
- *Bước 4.* So sánh các giá trị tính được và kết luận $M = \max\limits_{(a;b)} f(x)$, $m = \min\limits_{(a;b)} f(x)$.

Nếu giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) là A hoặc B thì ta kết luận không có giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).

Chú ý:

- Nếu $y = f(x)$ đồng biến trên $[a;b]$ thì $\begin{cases} \min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a) \\ \max\limits_{[a;b]} f(x) = f(b) \end{cases}$.
- Nếu $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a;b]$ thì $\begin{cases} \min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b) \\ \max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a) \end{cases}$.
- Hàm số liên tục trên một khoảng ***có thể*** không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên khoảng đó.

5. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

5.1. Đường tiệm cận ngang

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a;+\infty), (-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận ngang** (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y_0, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y_0$

5.2. Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường **tiệm cận đứng** (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

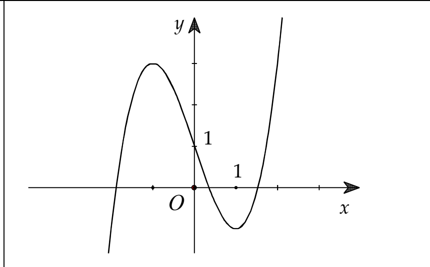
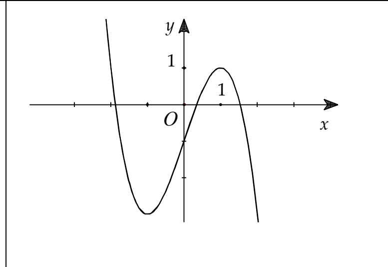
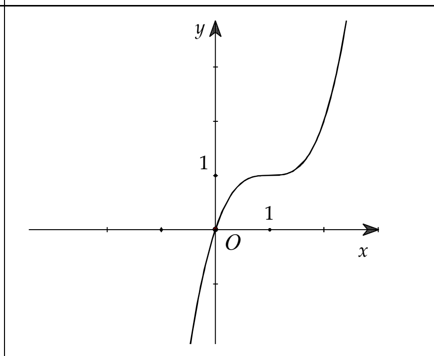
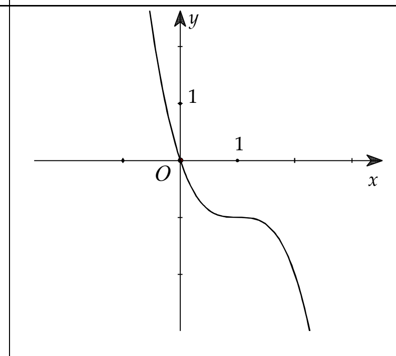
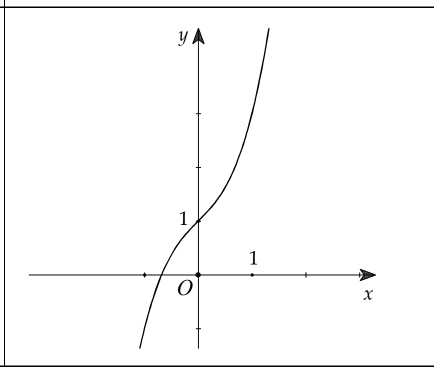
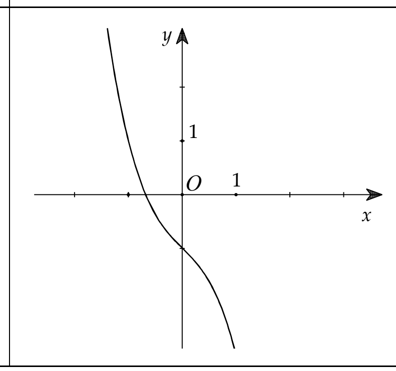
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$

Lưu ý: Với đồ thị hàm phân thức dạng $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0;\ ad - bc \neq 0)$ luôn có tiệm cận ngang là $y = \dfrac{a}{c}$ và tiệm cận đứng $x = -\dfrac{d}{c}$.

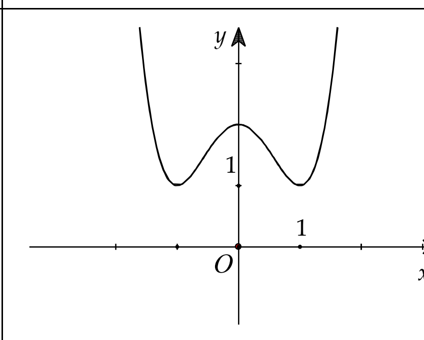
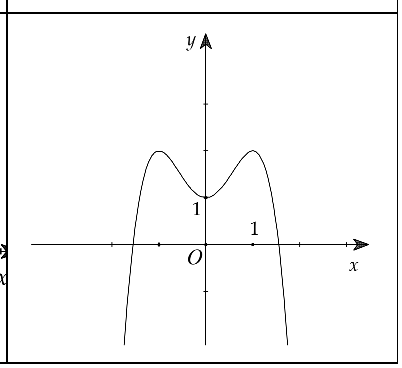
6. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

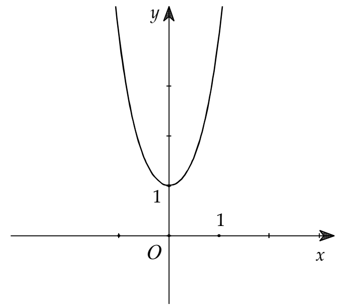
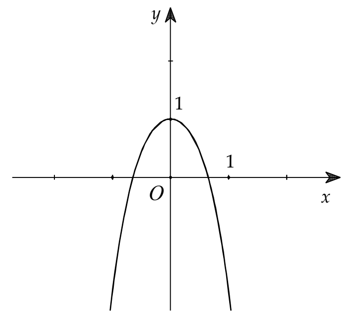
6.1. Khảo sát một số hàm đa thức và hàm phân thức

6.1.1. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$

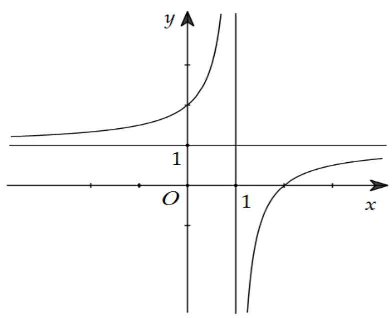
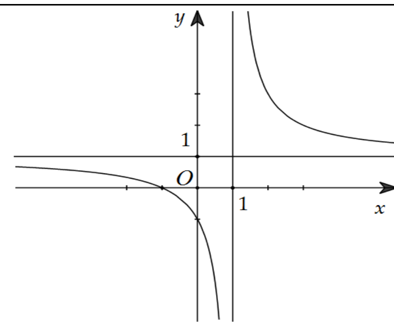
TRƯỜNG HỢP	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ *có 2 nghiệm phân biệt*		
Phương trình $y' = 0$ *có nghiệm kép*		
Phương trình $y' = 0$ *vô nghiệm*		

6.1.2. Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$

TRƯỜNG HỢP	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ *có 3 nghiệm phân biệt* (ab<0)		

Phương trình $y' = 0$ *có* *1 nghiệm.*		

6.1.3. Hàm số nhất biến $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\left(c \neq 0,\ ad - bc \neq 0\right)$

$D = ad - bc > 0$	$D = ad - bc < 0$
	

6.2. Một số phép biến đổi đồ thị

6.2.1. Dạng 1

Từ đồ thị $\left(C\right): y = f\left(x\right)$ suy ra đồ thị $\left(C'\right): y = f\left(\left|x\right|\right)$.

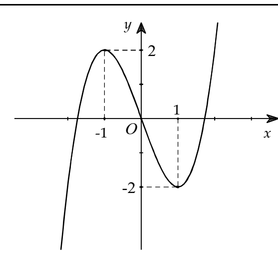
Ta có: $y = f\left(\left|x\right|\right) = \begin{cases} f\left(x\right) & khi \quad x \geq 0 \\ f\left(-x\right) & khi \quad x < 0 \end{cases}$

và $y = f\left(\left|x\right|\right)$ là *hàm chẵn* nên đồ thị $\left(C'\right)$ nhận Oy làm trục đối xứng.

*** Cách vẽ $\left(C'\right)$ từ $\left(C\right)$:**

- *Giữ nguyên* phần đồ thị bên phải Oy của đồ thị $\left(C\right): y = f\left(x\right)$.
- *Bỏ* phần đồ thị bên trái Oy của $\left(C\right)$, **lấy đối xứng phần đồ thị** *được giữ* qua Oy.

Ví dụ: Từ đồ thị $\left(C\right): y = f\left(x\right) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $\left(C'\right): y = \left|x\right|^3 - 3\left|x\right|$.

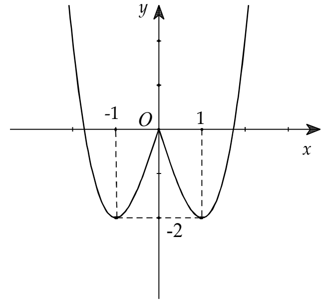


$\left(C\right): y = x^3 - 3x$

Biến đổi $\left(C\right)$:

- Bỏ phần đồ thị của $\left(C\right)$ bên trái Oy, giữ nguyên $\left(C\right)$ bên phải Oy.
- Lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua Oy.

$\left(C'\right): y = \left|x\right|^3 - 3\left|x\right|$



6.2.2. Dạng 2

Từ đồ thị $\left(C\right): y = f\left(x\right)$ suy ra đồ thị $\left(C'\right): y = \left|f\left(x\right)\right|$.

Ta có: $y = \left|f\left(x\right)\right| = \begin{cases} f\left(x\right) & khi \;\; f\left(x\right) \geq 0 \\ -f\left(x\right) & khi \;\; f\left(x\right) < 0 \end{cases}$

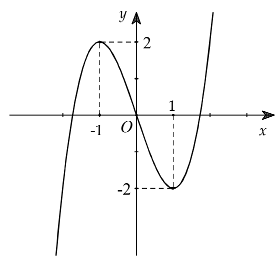
*** Cách vẽ $\left(C'\right)$ từ $\left(C\right)$:**

- *Giữ nguyên* phần <u>đồ thị phía trên Ox</u> của đồ thị (C): $y = f\left(x\right)$.
- *Bỏ* phần đồ thị <u>phía dưới Ox</u> của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị *bị bỏ*** qua Ox.

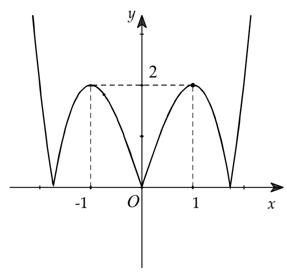
Ví dụ: Từ đồ thị $\left(C\right): y = f\left(x\right) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $y = \left|x^3 - 3x\right|$.

Biến đổi $\left(C\right)$:

- Bỏ phần đồ thị của $\left(C\right)$ dưới Ox, giữ nguyên $\left(C\right)$ phía trên Ox.
- Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.



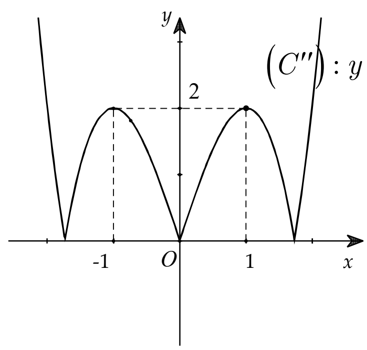
$\left(C\right): y = x^3 - 3x$



$\left(C'\right): y = \left|x^3 - 3x\right|$

Chú ý với dạng: $y = \left|f\left(\left|x\right|\right)\right|$ ta lần lượt biến đổi 2 đồ thị $y = f\left(\left|x\right|\right)$ và $y = \left|f\left(x\right)\right|$

Ví dụ: Từ đồ thị $\left(C\right): y = f\left(x\right) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $y = \left|\left|x\right|^3 - 3\left|x\right|\right|$. Biến đổi $\left(C\right)$ để được đồ thị $\left(C'\right): y = \left|x\right|^3 - 3\left|x\right|$. Biến đổi $\left(C'\right): y = \left|x\right|^3 - 3\left|x\right|$ ta được đồ thị $\left(C''\right): y = \left|\left|x\right|^3 - 3\left|x\right|\right|$.



$\left(C''\right): y = \left|\left|x\right|^3 - 3\left|x\right|\right|$

6.2.3. Dạng 3

Từ đồ thị $\left(C\right): y = u\left(x\right).v\left(x\right)$ suy ra đồ thị $\left(C'\right): y = \left|u\left(x\right)\right|.v\left(x\right)$.

Ta có: $y = \left|u(x)\right|.v(x) = \begin{cases} u(x).v(x) = f(x) & khi\ u(x) \geq 0 \\ -u(x).v(x) = f(x) & khi\ u(x) < 0 \end{cases}$

*** Cách vẽ (C') từ (C):**

- *Giữ nguyên* phần <u>đồ thị trên miền</u> $u(x) \geq 0$ của đồ thị $(C): y = f(x)$.
- *Bỏ* phần đồ thị <u>trên miền</u> $u(x) < 0$ của (C), **lấy đối xứng phần đồ thị *bị bỏ*** qua Ox.

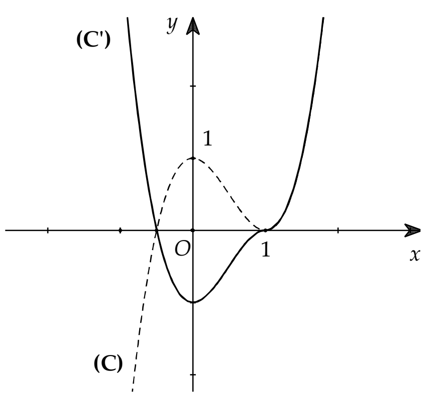
Ví dụ

<table>
<tr>
<td>a) Từ đồ thị $(C): y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ suy ra đồ thị $(C'): y = \left|x-1\right|\left(2x^2 - x - 1\right)$</td>
<td>b) Từ đồ thị $(C): y = f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ suy ra đồ thị $(C'): y = \dfrac{x}{\left|x-1\right|}$</td>
</tr>
<tr>
<td>

$y = \left|x-1\right|\left(2x^2 - x - 1\right) = \begin{cases} f(x) & khi\ x \geq 1 \\ -f(x) & khi\ x < 1 \end{cases}$

<u>Đồ thị (C'):</u>

- Giữ nguyên (C) với $x \geq 1$.
- Bỏ (C) với $x < 1$. Lấy *đối xứng phần đồ thị bị bỏ* qua *Ox*.



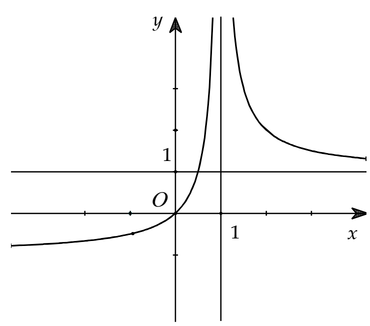
<u>Nhận xét:</u> Trong quá trình thực hiện phép suy đồ thị nên *lấy đối xứng các điểm đặc biệt* của (C): giao điểm với *Ox*, *Oy*, CĐ, CT…

</td>
<td>

$y = \dfrac{x}{\left|x-1\right|} = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} & khi\ x \in (1;+\infty) \\ -\dfrac{x}{x-1} & khi\ x \in (-\infty;1) \end{cases}$.

<u>Đồ thị (C'):</u>

- Bỏ phần đồ thị của (C) với $x < 1$, giữ nguyên (C) với $x > 1$.
- Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.



<u>Nhận xét</u>: Đối với hàm phân thức thì nên *lấy đối xứng các đường tiệm cận* để thực hiện phép suy đồ thị một cách tương đối chính xác.

</td>
</tr>
</table>

7. TIẾP TUYẾN

7.1. Tiếp tuyến

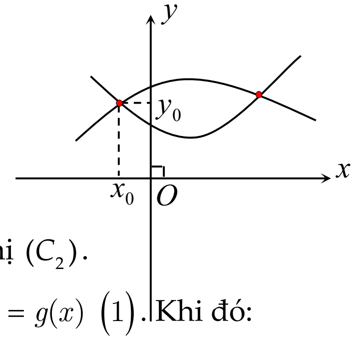
Cho hàm số $y = f(x)$, có đồ thị (C). **Tiếp tuyến** của đồ thị (C) tại điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C)$ có dạng: $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0}$.

Trong đó:

Điểm $M_0\left(x_0;y_0\right)\in(C)$ được gọi là *tiếp điểm*. (với $y_0=f\left(x_0\right)$) **và** $k=f'\left(x_0\right)$là ***hệ số góc*** của tiếp tuyến.

7.2. Điều kiện tiếp xúc

Cho hai hàm số $\left(C\right):y=f\left(x\right)$ và $\left(C'\right):y=g\left(x\right)$. Đồ thị (C) và (C') tiếp xúc nhau *khi chỉ khi* hệ phương trình: $\begin{cases}f\left(x\right)=g\left(x\right)\\ f'\left(x\right)=g'\left(x\right)\end{cases}$ có nghiệm.



8. TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C_1) và $y=g(x)$ có đồ thị (C_2).

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2) là $f(x)=g(x)\ \left(1\right)$. Khi đó:

- Số giao điểm của (C_1) và (C_2) bằng với số nghiệm của phương trình (1).
- Nghiệm x_0 của phương trình $\left(1\right)$ chính là hoành độ x_0 của giao điểm.
- Để tính tung độ y_0 của giao điểm, ta thay hoành độ x_0 vào $y=f\left(x\right)$ hoặc $y=g\left(x\right)$.
- Điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ là giao điểm của (C_1) và (C_2).

9. ĐIỂM ĐẶC BIỆT CỦA HỌ ĐƯỜNG CONG

9.1. Bài toán tìm điểm cố định của họ đường cong

Xét họ đường cong (C_m) có phương trình $y=f(x,m)$, trong đó f là hàm đa thức theo biến x với m là tham số sao cho bậc của m không quá 2. Tìm những điểm cố định thuộc họ đường cong khi m thay đổi?

Phương pháp giải:

- *<u>Bước 1:</u>* Đưa phương trình $y=f(x,m)$ về dạng phương trình theo ẩn m có dạng sau: $Am+B=0$ hoặc $Am^2+Bm+C=0$.
- *<u>Bước 2</u>:* Cho các hệ số bằng 0, ta thu được hệ phương trình và giải hệ phương trình: $\begin{cases}A=0\\ B=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}A=0\\ B=0\\ C=0\end{cases}$.
- *<u>Bước 3:</u>* Kết luận:

- Nếu hệ vô nghiệm thì họ đường cong (C_m) không có điểm cố định.

- Nếu hệ có nghiệm thì nghiệm đó là điểm cố định của (C_m).

9.2. Bài toán tìm điểm có tọa độ nguyên

Cho đường cong (C) có phương trình $y = f(x)$ (hàm phân thức). Hãy tìm những điểm có tọa độ nguyên của đường cong?

Những điểm có tọa độ nguyên là những điểm sao cho cả hoành độ và tung độ của điểm đó đều là số nguyên.

Phương pháp giải:

- *Bước 1:* Thực hiện phép chia đa thức chia tử số cho mẫu số.
- *Bước 2:* Lập luận để giải bài toán.

9.3. Bài toán tìm điểm có tính chất đối xứng

Cho đường cong (C) có phương trình $y = f(x)$. Tìm những điểm đối xứng nhau qua một điểm, qua đường thẳng.

Bài toán 1: *Cho đồ thị* $\left(C\right): y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ *trên đồ thị* $\left(C\right)$ *tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua điểm* $I(x_I, y_I)$.

Phương pháp giải:

- Gọi $M\left(a; Aa^3 + Ba^2 + Ca + D\right)$, $N\left(b; Ab^3 + Bb^2 + Cb + D\right)$ là hai điểm trên $\left(C\right)$ đối xứng nhau qua điểm I.
- Ta có $\begin{cases} a + b = 2x_I \\ A(a^3 + b^3) + B\left(a^2 + b^2\right) + C\left(a + b\right) + 2D = 2y_I \end{cases}$.

Giải hệ phương trình tìm được a, b từ đó tìm được toạ độ M, N.

Bài toán 2: *Cho đồ thị* $\left(C\right): y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$*. Trên đồ thị* $\left(C\right)$ *tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ.*

Phương pháp giải:

- Gọi $M\left(a, Aa^3 + Ba^2 + Ca + D\right), N\left(b, Ab^3 + Bb^2 + Cb + D\right)$ là hai điểm trên $\left(C\right)$ đối xứng nhau qua gốc tọa độ.
- Ta có $\begin{cases} a + b = 0 \\ A(a^3 + b^3) + B\left(a^2 + b^2\right) + C\left(a + b\right) + 2D = 0 \end{cases}$.
- Giải hệ phương trình tìm được a, b từ đó tìm được toạ độ M, N.

Bài toán 3: *Cho đồ thị* $\left(C\right): y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ *trên đồ thị* $\left(C\right)$ *tìm những cặp điểm đối xứng nhau qua đường thẳng* $d: y = A_1x + B_1$.

Phương pháp giải:

- Gọi $M\left(a; Aa^3 + Ba^2 + Ca + D\right)$, $N\left(b; Ab^3 + Bb^2 + Cb + D\right)$ là hai điểm trên $\left(C\right)$ đối xứng nhau qua đường thẳng d.
- Ta có: $\begin{cases} I \in d & (1) \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_d} = 0 & (2) \end{cases}$ (với I là trung điểm của MN và $\overrightarrow{u_d}$ là vecto chỉ phương của đường thẳng d).

- Giải hệ phương trình tìm được M, N.

9.4. Bài toán tìm điểm đặc biệt, khoảng cách

9.4.1. Lý thuyết:

- Cho hai điểm $A\left(x_1;y_1\right);B\left(x_2;y_2\right) \Rightarrow AB = \sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$
- Cho điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ và đường thẳng $d: Ax+By+C=0$, thì khoảng cách từ M đến d là $h\left(M;d\right)=\dfrac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.
- Cho hàm phân thức: $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ tiếp tuyến tại M cắt $TCĐ$, TCN ở A và B thì M là trung điểm của AB. Thì diện tích tam giác MAB không đổi: $S_{MAB}=\dfrac{2}{c^2}\left|ad-bc\right|$.

9.4.2. Các bài toán thường gặp

Bài toán 1: *Cho hàm số* $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\left(c\neq 0,\ ad-bc\neq 0\right)$ *có đồ thị* $\left(C\right)$. *Hãy tìm trên* (C) *hai điểm* A *và* B *thuộc hai nhánh đồ thị hàm số sao cho khoảng cách* AB *ngắn nhất.*

Phương pháp giải:

- $\left(C\right)$ có tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$ do tính chất của hàm phân thức, đồ thị nằm về hai phía của tiệm cận đứng. Nên gọi hai số α,β là hai số dương.
- Nếu A thuộc nhánh trái: $x_A<-\dfrac{d}{c}\Rightarrow x_A=-\dfrac{d}{c}-\alpha<-\dfrac{d}{c};\ y_A=f(x_A)$.
- Nếu B thuộc nhánh phải: $x_B>-\dfrac{d}{c}\Rightarrow x_B=-\dfrac{d}{c}+\beta>-\dfrac{d}{c};\ y_B=f(x_B)$.
- Sau đó tính:
  $AB^2=\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2=\left[\left(a+\beta\right)-\left(a-\alpha\right)\right]^2+\left(y_B-y_A\right)^2$.
- Áp dụng bất đẳng thức Cauchy sẽ tìm ra kết quả.

Bài toán 2: *Cho đồ thị hàm số* $\left(C\right)$ *có phương trình* $y=f(x)$. *Tìm tọa độ điểm* M *thuộc* (C) *để tổng khoảng cách từ* M *đến hai trục tọa độ nhỏ nhất.*

Phương pháp giải:

- Gọi $M\left(x;y\right)$ và tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là d thì $d=\left|x\right|+\left|y\right|$.
- Xét các khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ khi M nằm ở các vị trí đặc biệt: Trên trục hoành, trên trục tung.
- Sau đó xét tổng quát, những điểm M có hoành độ, hoặc tung độ lớn hơn hoành độ hoặc tung độ của M khi nằm trên hai trục thì loại đi không xét đến.
- Những điểm còn lại ta đưa về tìm giá trị nhỏ nhất của đồ thi hàm số dựa vào đạo hàm rồi tìm được giá trị nhỏ nhất của d.

Bài toán 3: *Cho đồ thị (C) có phương trình $y = f(x)$. Tìm điểm M trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến Ox bằng k lần khoảng cách từ M đến trục Oy.*

Phương pháp giải:

Theo đầu bài ta có $|y| = k|x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = kx \\ y = -kx \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = kx \\ f(x) = -kx \end{array}\right.$.

Bài toán 4: *Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0,\ ad - bc \neq 0)$. Tìm tọa độ điểm M trên (C) sao cho độ dài MI ngắn nhất (với I là giao điểm hai tiệm cận).*

Phương pháp giải:

- Tiệm cận đứng $x = \dfrac{-d}{c}$; tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{c}$.
- Ta tìm được tọa độ giao điểm $I\left(\dfrac{-d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$ của hai tiệm cận.
- Gọi $M(x_M; y_M)$ là điểm cần tìm, thì: $IM^2 = \left(x_M + \dfrac{d}{c}\right)^2 + \left(y_M - \dfrac{a}{c}\right)^2 = g(x_M)$
- Sử dụng phương pháp tìm GTLN - GTNN cho hàm số g để thu được kết quả.

Bài toán 5: *Cho đồ thị hàm số (C) có phương trình $y = f(x)$ và đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$. Tìm điểm I trên (C) sao cho khoảng cách từ I đến d là ngắn nhất.*

Phương pháp giải:

- Gọi I thuộc $(C) \Rightarrow I(x_0; y_0)$; $y_0 = f(x_0)$.
- Khoảng cách từ I đến d là $g(x_0) = h(I; d) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$
- Khảo sát hàm số $y = g(x)$ để tìm ra điểm I thỏa mãn yêu cầu.

PHẦN II. MŨ VÀ LOGARIT

1. LŨY THỪA VÀ HÀM SỐ LŨY THỪA

1.1. Khái niệm lũy thừa

1.1.1. Lũy thừa với số mũ nguyên

Cho n là một số nguyên dương.

Với a là số thực tùy ý, lũy thừa bậc n của a là tích của n thừa số a.

$$a^n = \underbrace{a.a......a}_{n} \ (n \text{ thừa số}).$$

Với $a \neq 0.$ thì $a^0 = 1$ $\qquad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Ta gọi a là cơ số, n là mũ số. Và chú ý 0^0 và 0^{-n} không có nghĩa.

1.1.2. Một số tính chất của lũy thừa

- Giả thuyết rằng mỗi biểu thức được xét đều có nghĩa:

$$a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}; \ \frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha-\beta}; \ (a^{\alpha})^{\beta} = a^{\alpha.\beta} \ ; \ (ab)^{\alpha} = a^{\alpha} \cdot b^{\alpha};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} = \frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}; \ \left(\frac{a}{b}\right)^{-\alpha} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha}.$$

- Nếu $a > 1$ thì $a^{\alpha} > a^{\beta} \Leftrightarrow \alpha > \beta$;
- Nếu $0 < a < 1$ thì $a^{\alpha} > a^{\beta} \Leftrightarrow \alpha < \beta$.
- Với mọi $0 < a < b$, ta có:

  $a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0$

  $a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$

Chú ý:

- Các tính chất trên đúng trong trường hợp số mũ nguyên hoặc không nguyên.
- Khi xét lũy thừa với số mũ 0 và số mũ nguyên âm thì cơ số a phải khác 0.
- Khi xét lũy thừa với số mũ không nguyên thì cơ số a phải dương.

1.2. Phương trình $x^n = b.$

Ta có kết quả biện luận số nghiệm của phương trình $x^n = b$ như sau:

- Trường hợp n lẻ:

Với mọi số thực b, phương trình có nghiệm duy nhất.

- Trường hợp n chẵn:
  - *Với* $b < 0$, phương trình vô nghiệm.
  - *Với* $b = 0$, phương trình có một nghiệm $x = 0$.
  - *Với* $b > 0$, phương trình có hai nghiệm trái dấu, kí hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{b}$, còn giá trị âm là $-\sqrt[n]{b}$.

1.3. Một số tính chất của căn bậc n

Với $a,b \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

- $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|, \forall a$
- $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a, \forall a$
- $\sqrt[2n]{ab} = \sqrt[2n]{|a|} \cdot \sqrt[2n]{|b|}, \forall ab \geq 0$
- $\sqrt[2n+1]{ab} = \sqrt[2n+1]{a} \cdot \sqrt[2n+1]{b}, \forall a,b$
- $\sqrt[2n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[2n]{|a|}}{\sqrt[2n]{|b|}}, \forall ab \geq 0, b \neq 0$
- $\sqrt[2n+1]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[2n+1]{a}}{\sqrt[2n+1]{b}}, \forall a, \forall b \neq 0$
- $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m, \forall a > 0$, n nguyên dương, m nguyên
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}, \forall a \geq 0$, n, m nguyên dương
- Nếu $\dfrac{p}{n} = \dfrac{q}{m}$ thì $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}, \forall a > 0, m, n$ nguyên dương p, q nguyên

  Đặc biệt: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^m}$

1.4. Hàm số lũy thừa

1.4.1. Khái niệm

Xét hàm số $y = x^\alpha$, với α là số thực cho trước.

Hàm số $y = x^\alpha$, với $\alpha \in \mathbb{R}$, được gọi là hàm số lũy thừa.

Chú ý.

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ tùy thuộc vào giá trị của α. Cụ thể.

- Với α nguyên dương, tập xác định là $\mathbb{R}$.
- Với α nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Với α không nguyên, tập xác định $(0;+\infty)$.

1.4.2. Khảo sát hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ luôn chứa khoảng $(0;+\infty)$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$. Trong trường hợp tổng quát, ta khảo sát hàm số $y = x^\alpha$ trên khoảng này.

$y = x^\alpha, \alpha > 0.$	$y = x^\alpha, \alpha < 0.$

1. Tập xác định: $\left(0;+\infty\right)$.
2. Sự biến thiên

   $y' = \alpha . x^{\alpha-1} > 0 \quad \forall x > 0.$

   Giới hạn đặc biệt:

   $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha} = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha} = +\infty.$

   Tiệm cận: không có.
3. Bảng biến thiên.

x	0		$+\infty$
y′		+	
y	0	$\nearrow$	$+\infty$

1. Tập xác định: $\left(0;+\infty\right)$.
2. Sự biến thiên

   $y' = \alpha . x^{\alpha-1} < 0 \quad \forall x > 0.$

   Giới hạn đặc biệt:

   $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha} = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha} = 0.$

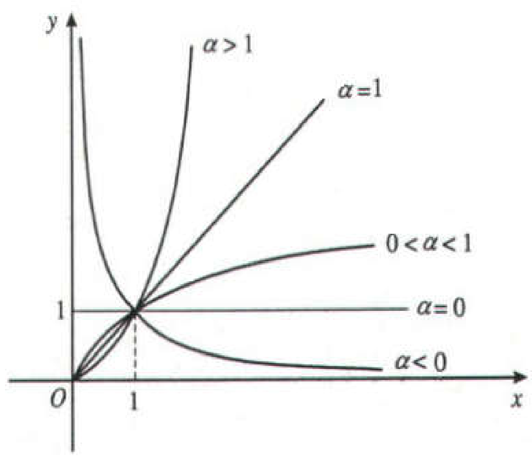
   Tiệm cận:

   Ox là tiệm cận ngang.

   Oy là tiệm cận đứng.
3. Bảng biến thiên.

x	0		$+\infty$
y′		–	
y	$+\infty$	$\searrow$	0

Đồ thị của hàm số.



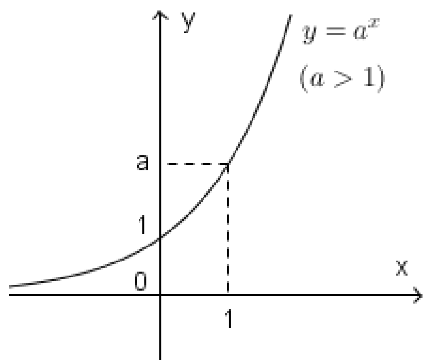
Đồ thị của hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$ luôn đi qua điểm $I\left(1;1\right)$.

1.5. Khảo sát hàm số mũ $y = a^x$, $\quad \left(a > 0, a \neq 1\right)$.

$y = a^x, \left(a > 1\right)$	$y = a^x, \left(a < 1\right)$
1. Tập xác định: $\mathbb{R}$. 2. Sự biến thiên. $y' = a^x \ln a > 0, \forall x.$ Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} a = +\infty.$ Tiệm cận: *Ox* là tiệm cận ngang. 3. Bảng biến thiên.	1. Tập xác định: $\mathbb{R}$. 2. Sự biến thiên. $y' = a^x \ln a < 0, \forall x$ Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0.$ Tiệm cận: *Ox* là tiệm cận ngang. 3. Bảng biến thiên.

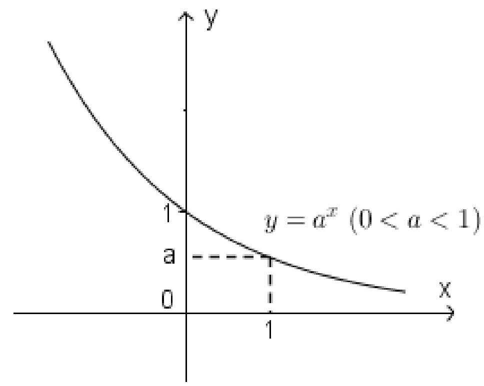
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$		$+$		$+$	
y	0		1		a		$+\infty$

Đồ thị như hình sau.



x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$	
y	$+\infty$		1		a		0

Đồ thị như hình sau.



2. LOGARIT

2.1. Khái niệm Logarit

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là logarit cơ số a của b và được kí hiệu là $\log_a b$.

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b.$$

Không có logarit của số âm và số 0.

2.2. Bảng tóm tắt công thức Mũ-loarrit thường gặp

• $a^0 = 1, (a \neq 0)$.	• $\log_a 1 = 0, (0 < a \neq 1)$
• $(a)^1 = a$	• $\log_a a = 1, (0 < a \neq 1)$
• $(a)^{-\alpha} = \dfrac{1}{a^\alpha}$	• $\log_a a^\alpha = \alpha, (0 < a \neq 1)$
• $\dfrac{(a)^\alpha}{(a)^\beta} = (a)^{\alpha-\beta}$	• $\log_{a^\alpha} a = \dfrac{1}{\alpha}, (0 < a \neq 1)$
• $(a)^\alpha . (b)^\beta = (a)^{\alpha+\beta}$	• $\log_a b^\alpha = \alpha . \log_a b, (a, b > 0, a \neq 1)$
• $(a)^\alpha . (b)^\alpha = (a.b)^\alpha$	• $\log_{a^\beta} b = \dfrac{1}{\beta} . \log_a b$
• $\dfrac{(a)^\alpha}{(b)^\alpha} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha, (b \neq 0)$	• $\log_{a^\beta} b^\alpha = \dfrac{\alpha}{\beta} . \log_a b$
	• $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$

• $(a)^{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt[\beta]{(a)^{\alpha}}, (\beta \in \mathbb{N}^*)$ • $(a^{\alpha})^{\beta} = (a)^{\alpha\beta}$ • $(a)^{\alpha} = b \Rightarrow \alpha = \log_a b$	• $\log_a b - \log_a c = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$ • $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.

3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT.

3.1. Bất phương trình mũ cơ bản

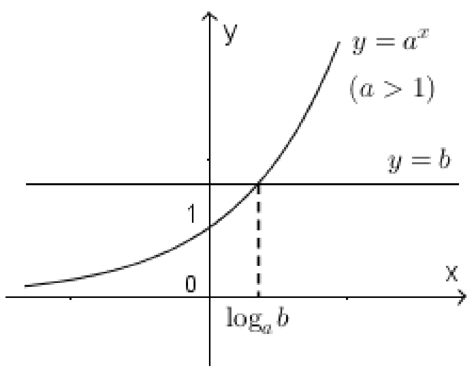
Bất phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x > b$ (hoặc $a^x \ge b, a^x < b, a^x \le b$) với $a > 0, a \ne 1$.

Ta xét bất phương trình có dạng $a^x > b$.

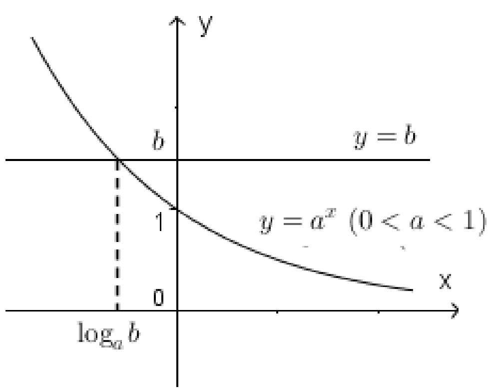
- Nếu $b \le 0$, tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$, vì $a^x > b, \forall x \in \mathbb{R}$..
- Nếu $b > 0$ thì bất phương trình tương đương với $a^x > a^{\log_a b}$.
  - Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$.
  - Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình là $x < \log_a b$.

Ta minh họa bằng đồ thị sau:

- Với $a > 1$, ta có đồ thị sau.



- Với $0 < a < 1$, ta có đồ thị sau.



3.2. Bất phương trình logarit cơ bản

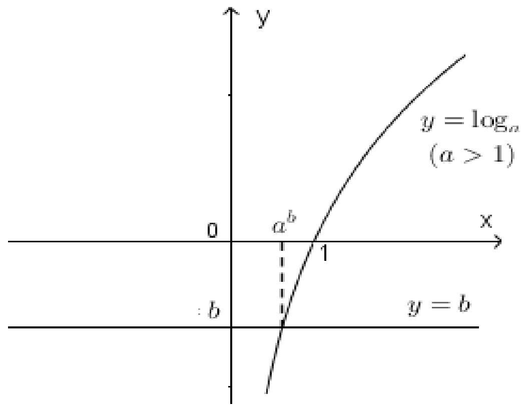
Bất phương trình logarit cơ bản có dạng $\log_a x > b$ (hoặc $\log_a x \ge b, \log_a x < b, \log_a x \le b$) với $a > 0, a \ne 1$.

Xét bất phương trình $\log_a x > b$.

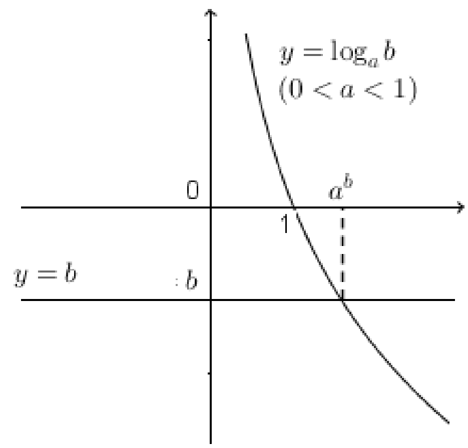
- Trường hợp $a > 1$, ta có: $\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$.
- Trường hợp $0 < a < 1$, ta có: $\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$.

Ta minh họa bằng đồ thị như sau.

- Với $a > 1$, ta có đồ thị sau.



- Với $0 < a < 1$, ta có đồ thị sau.



Quan sát đồ thị, ta thấy rằng:

- Trường hợp $a > 1$: $\log_a x > b$ khi và chỉ khi $x > a^b$.
- Trường hợp $0 < a < 1$: $\log_a x > b$ khi và chỉ khi $0 < x < a^b$.

4. BÀI TOÁN LÃI SUẤT NGÂN HÀNG

4.1. Lãi đơn

4.1.1. Định nghĩa

Lãi đơn là số tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi do số tiền gốc sinh ra, tức là tiền lãi của kì hạn trước không được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn kế tiếp, cho dù đến kì hạn người gửi không đến rút tiền ra.

4.1.2. Công thức tính

Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi đơn $r\%$ /kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là:

$$\boxed{S_n = A + nAr = A(1 + nr)}$$

<u>Chú ý:</u> *trong tính toán các bài toán lãi suất và các bài toán liên quan, ta nhớ $r\%$ là* $\frac{r}{100}$.

4.2. Lãi kép

4.2.1. Định nghĩa

Lãi kép là tiền lãi của kì hạn trước nếu người gửi không rút ra thì được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn sau.

4.2.2. Công thức tính

Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép $r\%$ /kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là:

$$\boxed{S_n = A(1+r)^n} \Rightarrow \boxed{n = \log_{(1+r)}\left(\frac{S_n}{A}\right)}, \quad \boxed{r\% = \sqrt[n]{\frac{S_n}{A}} - 1}, \quad \boxed{A = \frac{S_n}{(1+r)^n}}$$

4.3. Tiền gửi hàng tháng

4.3.1. Định nghĩa

Tiền gửi hàng tháng là mỗi tháng gửi đúng cùng một số tiền vào 1 thời gian cố định.

4.3.2. Công thức tính

Đầu mỗi tháng khách hàng gửi vào ngân hàng số tiền A đồng với lãi kép $r\%$/tháng thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n tháng ($n \in \mathbb{N}^*$) (nhận tiền cuối tháng, khi ngân hàng đã tính lãi) là S_n.

$$\boxed{S_n = \frac{A}{r}\left[(1+r)^n - 1\right](1+r)} \Rightarrow \boxed{n = \log_{(1+r)}\left(\frac{S_n.r}{A(1+r)} + 1\right)}, \quad \boxed{A = \frac{S_n.r}{(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]}}$$

4.4. Gửi ngân hàng và rút tiền gửi hàng tháng

Công thức tính

Gửi ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất $r\%$/tháng. Mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi, rút ra số tiền là X đồng. Tính số tiền còn lại sau n tháng là bao nhiêu?

$$\boxed{S_n = A(1+r)^n - X\frac{(1+r)^n - 1}{r}} \Rightarrow \boxed{X = \left[A(1+r)^n - S_n\right]\frac{r}{(1+r)^n - 1}}$$

4.5. Vay vốn trả góp

4.5.1. Định nghĩa

Vay vốn trả góp là vay ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất $r\%$/tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, mỗi hoàn nợ số tiền là X đồng và trả hết tiền nợ sau đúng n tháng.

4.5.2. Công thức tính

Cách tính số tiền còn lại sau n tháng giống hoàn toàn công thức tính gửi ngân hàng và rút tiền hàng tháng nên ta có

$$\boxed{S_n = A\left(1+r\right)^n - X\frac{\left(1+r\right)^n - 1}{r}}$$

Để sau đúng n tháng trả hết nợ thì $S_n = 0$ nên

$$\boxed{A\left(1+r\right)^n - X\frac{\left(1+r\right)^n - 1}{r} = 0}$$

$$\boxed{X = \frac{A\left(1+r\right)^n .r}{\left(1+r\right)^n - 1}}$$

4.6. Bài toán tăng lương

4.6.1. Định nghĩa

Bài toán tăng lương được mô tả như sau: Một người được lãnh lương khởi điểm là A đồng/tháng. Cứ sau n tháng thì lương người đó được tăng thêm $r\%$/tháng. Hỏi sau kn tháng người đó lĩnh được tất cả số tiền là bao nhiêu?

4.6.2. Công thức tính

Tổng số tiền nhận được sau kn tháng là $\boxed{S_{kn} = Ak\frac{\left(1+r\right)^k - 1}{r}}$

4.7. Bài toán tăng trưởng dân số

Công thức tính tăng trưởng dân số

$\boxed{X_m = X_n\left(1+r\right)^{m-n}},\left(m,n \in \mathbb{Z}^+, m \ge n\right)$

Trong đó:

$r\%$ là tỉ lệ tăng dân số từ năm n đến năm m

X_m dân số năm m

X_n dân số năm n

Từ đó ta có công thức tính tỉ lệ tăng dân số là $\boxed{r\% = \sqrt[m-n]{\frac{X_m}{X_n}} - 1}$

4.8. Lãi kép liên tục

Gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép $r\%$/năm thì số tiền nhận được cả vốn lẫn lãi sau n năm $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ là: $S_n = A\left(1+r\right)^n$. Giả sử ta chia mỗi năm thành m kì hạn để tính lãi và lãi suất mỗi kì hạn là $\frac{r}{m}\%$ thì số tiền thu được sau n năm là: $S_n = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m.n}$

Khi tăng số kì hạn của mỗi năm lên vô cực, tức là $m \to +\infty$, gọi là hình thức lãi kép tiên tục thì người ta chứng minh được số tiền nhận được cả gốc lẫn lãi là:

$\boxed{S = Ae^{n.r}}$ (công thức tăng trưởng mũ)

PHẦN III. NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

1. NGUYÊN HÀM

1.1. Định nghĩa

Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hay nửa khoảng). Hàm số $F\left(x\right)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ trên K nếu $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$ với mọi $x\in K$.

Kí hiệu: $\int f\left(x\right)dx=F\left(x\right)+C$.

Định lí:

1) Nếu $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên K thì với mỗi hằng số C, hàm số $G\left(x\right)=F\left(x\right)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên K.

2) Nếu $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên K đều có dạng $F\left(x\right)+C$, với C là một hằng số.

Do đó $F\left(x\right)+C, C\in\mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên K.

1.2. Tính chất của nguyên hàm

- $\left(\int f\left(x\right)dx\right)'=f\left(x\right)$ và $\int f'\left(x\right)dx=f\left(x\right)+C$; $d\left(\int f\left(x\right)\mathrm{dx}\right)=f\left(x\right)\mathrm{dx}$
- Nếu F(x) có đạo hàm thì: $\int d\left(F(x)\right)=F(x)+C$
- $\int kf\left(x\right)dx=k\int f\left(x\right)dx$ với k là hằng số khác 0.
- $\int\left[f\left(x\right)\pm g\left(x\right)\right]dx=\int f\left(x\right)dx\pm\int g\left(x\right)dx$
- **Công thức đổi biến số:** Cho $y=f\left(u\right)$ và $u=g\left(x\right)$.

Nếu $\int f(x)dx=F(x)+C$ thì $\int f\left(g(x)\right)g'(x)dx=\int f(u)du=F(u)+C$

1.3. Sự tồn tại của nguyên hàm

Định lí:

Mọi hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

1.4. Bảng nguyên hàm các hàm số thường gặp

1. $\int 0dx=C$ 2. $\int dx=x+C$	
3. $\int x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C\left(\alpha\neq-1\right)$	16. $\int\left(ax+b\right)^{\alpha}\mathrm{dx}=\frac{1}{a}\frac{\left(ax+b\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c,\alpha\neq-1$
4. $\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+C$	17. $\int xdx=\frac{x^2}{2}+C$

5. $\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\| + C$	18. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\|ax+b\| + c$
6. $\int e^x dx = e^x + C$	19. $\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	20. $\int a^{kx+b}dx = \frac{1}{k}\frac{a^{kx+b}}{\ln a} + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$	21. $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
9. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	22. $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
10. $\int \tan x.dx = -\ln\|\cos x\| + C$	23. $\int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\ln\|\cos(ax+b)\| + C$
11. $\int \cot x.dx = \ln\|\sin x\| + C$	24. $\int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a}\ln\|\sin(ax+b)\| + C$
12. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$	25. $\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$
13. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$	26. $\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$
14. $\int (1+\tan^2 x)dx = \tan x + C$	27. $\int (1+\tan^2(ax+b))dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$
15. $\int (1+\cot^2 x)dx = -\cot x + C$	28. $\int (1+\cot^2(ax+b))dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$

1.5. Bảng nguyên hàm mở rộng

$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$	$\int \arcsin\frac{x}{a}dx = x\arcsin\frac{x}{a} + \sqrt{a^2-x^2} + C$
$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C$	$\int \arccos\frac{x}{a}dx = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C$	$\int \arctan\frac{x}{a}dx = x\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2) + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\|a\|} + C$	$\int \mathrm{arc}\cot\frac{x}{a}dx = x\,\mathrm{arc}\cot\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(a^2+x^2) + C$
$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\left\|\frac{x}{a}\right\| + C$	
$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left\|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right\| + C$	$\int \frac{dx}{\sin(ax+b)} = \frac{1}{a}\ln\left\|\tan\frac{ax+b}{2}\right\| + C$
$\int \ln(ax+b)dx = \left(x+\frac{b}{a}\right)\ln(ax+b) -$	$\int e^{ax}\cos bx\, dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + C$

$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{dx}=\dfrac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin$	$\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{dx}=\dfrac{e^{ax}\left(a\sin bx-b\cos bx\right)}{a^2+b^2}+C$

2. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

2.1. Phương pháp đổi biến

2.1.1. Đổi biến dạng 1

Nếu : $\int f(x)dx=F(x)+C$ và với $u=\varphi\left(t\right)$ là hàm số có đạo hàm thì :

$\int f(u)du=F(\varphi(t))+C$

2.1.1.1. Phương pháp chung

- *Bước 1:* Chọn $x=\varphi\left(t\right)$, trong đó $\varphi\left(t\right)$ là hàm số mà ta chọn thích hợp .
- *Bước 2:* Lấy vi phân hai vế : $dx=\varphi'\left(t\right)dt$
- *Bước 3:* Biến đổi : $f(x)dx=f\left[\varphi\left(t\right)\right]\varphi'\left(t\right)dt=g\left(t\right)dt$
- *Bước 4:* Khi đó tính : $\int f(x)dx=\int g(t)dt=G(t)+C$.

2.1.1.2. Các dấu hiệu đổi biến thường gặp

Dấu hiệu	Cách chọn
$\sqrt{a^2-x^2}$	Đặt $x=\left\|a\right\|sint$; với $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.hoặc $x=\left\|a\right\|cost$; với $t\in\left[0;\pi\right]$.
$\sqrt{x^2-a^2}$	Đặt $x=\dfrac{\left\|a\right\|}{sint}$.; với $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\setminus\left\{0\right\}$ hoặc $x=\dfrac{\left\|a\right\|}{cost}$ với $t\in\left[0;\pi\right]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
$\sqrt{a^2+x^2}$	Đặt $x=\left\|a\right\|tant$; với $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.hoặc $x=\left\|a\right\|\cot t$ với $t\in\left(0;\pi\right)$.
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$. hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$.	Đặt $x=acos2t$
$\sqrt{\left(x-a\right)\left(b-x\right)}$	Đặt $x=a+(b-a)sin^2t$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	Đặt $x=atant$; với $t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

2.1.2. Đổi biến dạng 2

Nếu hàm số f(x) liên tục thì đặt $x=\varphi\left(t\right)$. Trong đó $\varphi\left(t\right)$ cùng với đạo hàm của nó ($\varphi'\left(t\right)$ là những hàm số liên tục) thì ta được :

$\int f(x)dx = \int f\left[\varphi\left(t\right)\right]\varphi'\left(t\right)dt = \int g(t)dt = G(t) + C$.

2.1.2.1. Phương pháp chung

- *Bước 1:* Chọn t=$\varphi\left(x\right)$. Trong đó $\varphi\left(x\right)$ là hàm số mà ta chọn thích hợp .
- *Bước 2:* Tính vi phân hai vế : $dt = \varphi'\left(t\right)dt$.
- *Bước 3:* Biểu thị : $f(x)dx = f\left[\varphi\left(t\right)\right]\varphi'\left(t\right)dt = g(t)dt$.
- *Bước 4:* Khi đó : $I = \int f(x)dx = \int g(t)dt = G(t) + C$

2.1.2.2. Các dấu hiệu đổi biến thường gặp :

Dấu hiệu	**Cách chọn**
Hàm số mẫu số có	t là mẫu số
Hàm số : $f\left(x;\sqrt{\varphi\left(x\right)}\right)$	$t = \sqrt{\varphi\left(x\right)}$
Hàm $f\left(x\right) = \dfrac{a.\sin x + b.\cos x}{c.\sin x + d.\cos x + e}$	$t = \tan\dfrac{x}{2};\left(\cos\dfrac{x}{2} \neq 0\right)$
Hàm $f\left(x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{\left(x+a\right)\left(x+b\right)}}$	Với : $x + a > 0$ và $x + b > 0$. Đặt : $t = \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}$ Với $x + a < 0$ và $x + b < 0$. Đặt : $t = \sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b}$

2.2. Phương pháp nguyên hàm từng phần

Nếu u(x) , v(x) là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K:

$$\int u(x).v'(x)dx = u(x).v(x) - \int v(x).u'(x)dx$$

Hay $\int udv = uv - \int vdu$ (với $du = u'\left(x\right)dx,\ dv = v'\left(x\right)dx$)

2.2.1. Phương pháp chung

- *Bước 1:* Ta biến đổi tích phân ban đầu về dạng : $I = \int f(x)dx = \int f_1(x).f_2(x)dx$
- *Bước 2:* Đặt : $\begin{cases} u = f_1(x) \\ dv = f_2(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = f'_1(x)dx \\ v = \int f_2(x)dx \end{cases}$
- *Bước 3:* Khi đó : $\int u.dv = u.v - \int v.du$

2.2.2. Các dạng thường gặp

2.2.2.1. Dạng 1

$I = \int P(x)\begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \\ e^x \end{Bmatrix}.dx$. Đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = \begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \\ e^x \end{Bmatrix}.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'.du = P'(x)dx \\ v = \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \\ e^x \end{Bmatrix} \end{cases}$

Vậy: $I = P(x)\begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \\ e^x \end{Bmatrix} - \int \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \\ e^x \end{Bmatrix}.P'(x)dx$

2.2.2.2. Dạng 2

$I = \int P(x).\ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = P(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = \int P(x)dx = Q(x) \end{cases}$

Vậy $I = lnx.Q\left(x\right) = \int Q(x).\dfrac{1}{x}dx$

2.2.2.3. Dạng 3

$I = \int e^x \begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix} dx$. Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = \begin{Bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix}.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{Bmatrix} \end{cases}$

Vậy $I =\ \ I = e^x \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{Bmatrix} - \int \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{Bmatrix} e^x dx$

Bằng phương pháp tương tự ta tính được $\int \begin{Bmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{Bmatrix} e^x dx$ sau đó thay vào I

3. TÍCH PHÂN

3.1. Công thức tính tích phân

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

* *Nhận xét*: Tích phân của hàm số f từ *a* đến *b* có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x)dx$ hay $\int_a^b f(t)dt$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận *a*, *b* mà không phụ thuộc vào cách ghi biến số.

3.2. Tính chất của tích phân

Giả sử cho hai hàm số $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ liên tục trên K, a, b, c là ba số bất kỳ thuộc K. Khi đó ta có :

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4. $\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

5. $\int_a^b kf(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$.

6. Nếu f(x) $\geq 0, \forall x \in \left[a;b\right]$ thì : $\int_a^b f(x)dx \geq 0 \forall x \in \left[a;b\right]$

7. Nếu $\forall x \in \left[a;b\right] : f(x) \geq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

8. Nếu $\forall x \in \left[a;b\right]$ Nếu $M \leq f(x) \leq N$ thì $M\left(b-a\right) \leq \int_a^b f(x)dx \leq N\left(b-a\right)$.

4. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

4.1. Phương pháp đổi biến

4.1.1. Phương pháp đổi biến số dạng 1

4.1.1.1. Định lí

Nếu 1) Hàm $x = u(t)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[\alpha;\ \beta\right]$

2) Hàm hợp $f(u(t))$ được xác định trên $\left[\alpha;\ \beta\right]$,

3) $u(\alpha) = a,\ u(\beta) = b$

Khi đó: $I = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt$.

4.1.1.2. Phương pháp chung

- *Bước 1:* Đặt $x = u\left(t\right)$
- *Bước 2:* Tính vi phân hai vế : $x = u(t) \Rightarrow dx = u'(t)dt$

  Đổi cận: $\left|\begin{matrix} x = b \\ x = a \end{matrix}\right. \Rightarrow \left|\begin{matrix} t = \beta \\ t = \alpha \end{matrix}\right.$
- *Bước 3:* Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo biến t

Vậy: $I = \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left[u(t)\right]u'(t)dt = \int_\alpha^\beta g(t)dt = G(t)\Big|_\alpha^\beta = G(\beta) - G(\alpha)$

4.1.2. Phương pháp đổi biến dạng 2

4.1.2.1. Định lí

Nếu hàm số $u = u(x)$ đơn điệu và có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ sao cho $f(x)dx = g\left(u(x)\right)u'(x)dx = g(u)du$ thì: $I = \int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du$.

4.1.2.2. Phương pháp chung

- *Bước 1:* Đặt $u = u(x) \Rightarrow du = u'(x)dx$
- *Bước 2:* Đổi cận : $\left|\begin{matrix} x = b \\ x = a \end{matrix}\right. \Rightarrow \left|\begin{matrix} u = u(b) \\ u = u(a) \end{matrix}\right.$

- *Bước 3:* Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo u

Vậy: $I=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g\left[u(x)\right].u'(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du$

4.2. Phương pháp tích phân từng phần

4.2.1. Định lí

Nếu $u(x)$ và $v(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $\left[a;b\right]$ thì:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=\left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)dx \quad \text{Hay} \quad \int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

4.2.2. Phương pháp chung

- *Bước 1:* Viết $f(x)dx$ dưới dạng $udv=uv'dx$ bằng cách chọn một phần thích hợp của $f(x)$ làm $u(x)$ và phần còn lại $dv=v'(x)dx$
- *Bước 2:* Tính $du=u'dx$ và $v=\int dv=\int v'(x)dx$
- *Bước 3:* Tính $\int_a^b vu'(x)dx$ và $uv\Big|_a^b$

*** Cách đặt u và dv trong phương pháp tích phân từng phần.**

Đặt u theo thứ tự ưu tiên: ***Lốc-đa-mũ-lượng***	$\int_a^b P(x)e^x dx$	$\int_a^b P(x)\ln x dx$	$\int_a^b P(x)\cos x dx$	$\int_a^b e^x \cos x dx$
u	$P(x)$	$\ln x$	$P(x)$	e^x
dv	$e^x dx$	$P(x)dx$	$\cos x dx$	$\cos x dx$

Chú ý: Nên chọn u là phần của $f(x)$ mà khi lấy đạo hàm thì đơn giản, chọn $dv=v'dx$ là phần của $f(x)dx$ là vi phân một hàm số đã biết hoặc có nguyên hàm dễ tìm.

5. TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ SƠ CẤP CƠ BẢN

5.1. Tích phân hàm hữu tỉ

5.1.1. Dạng 1

$$\mathrm{I}=\int_\alpha^\beta \frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\int_\alpha^\beta \frac{adx}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln\left|ax+b\right|\Big|_\alpha^\beta. \quad \text{(với a≠0)}$$

Chú ý: Nếu $\mathrm{I}=\int_\alpha^\beta \frac{dx}{(ax+b)^k}=\frac{1}{a}\int_\alpha^\beta (ax+b)^{-k}.adx=\frac{1}{a(1-k)}.(ax+b)^{-k+1}\Big|_\alpha^\beta$

5.1.2. Dạng 2

$$I=\int_\alpha^\beta \frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad (a\neq 0) \quad (ax^2+bx+c\neq 0 \text{ với mọi } x\in\left[\alpha;\beta\right])$$

Xét $\Delta=b^2-4ac$.

- Nếu $\Delta>0$ thì $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$\frac{1}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{1}{a(x_1-x_2)}\left(\frac{1}{x-x_1}-\frac{1}{x-x_2}\right) \text{ thì :}$$

$$I=\frac{1}{a(x_1-x_2)}\int_\alpha^\beta\left(\frac{1}{x-x_1}-\frac{1}{x-x_2}\right)dx=\frac{1}{a(x_1-x_2)}\left[\ln|x-x_1|-\ln|x-x_2|\right]\Big|_\alpha^\beta$$

$$=\frac{1}{a(x_1-x_2)}\ln\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right|\Big|_\alpha^\beta$$

- Nếu $\Delta=0$ thì $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}=\dfrac{1}{a(x-x_0)^2}\quad\left(x_0=\dfrac{-b}{2a}\right)$

thì I = $\displaystyle\int_\alpha^\beta\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int_\alpha^\beta\frac{dx}{(x-x_0)^2}=-\frac{1}{a(x-x_0)}\Big|_\alpha^\beta$

- Nếu $\Delta<0$ thì $\displaystyle I=\int_\alpha^\beta\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\int_\alpha^\beta\frac{dx}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}\right)^2\right]}$

Đặt $x+\dfrac{b}{2a}=\sqrt{\dfrac{-\Delta}{4a^2}}\tan t\Rightarrow dx=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{-\Delta}{a^2}}\left(1+\tan^2 t\right)dt$

5.1.3. Dạng 3

$$I=\int_\alpha^\beta\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx,\quad(a\neq 0).$$

(trong đó $f(x)=\dfrac{mx+n}{ax^2+bx+c}$ liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$)

- Bằng phương pháp đồng nhất hệ số, ta tìm A và B sao cho:

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}=\frac{A(ax^2+bx+c)'}{ax^2+bx+c}+\frac{B}{ax^2+bx+c}=\frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}+\frac{B}{ax^2+bx+c}$$

- Ta có I= $\displaystyle\int_\alpha^\beta\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx=\int_\alpha^\beta\frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx+\int_\alpha^\beta\frac{B}{ax^2+bx+c}dx$

Tích phân $\displaystyle\int_\alpha^\beta\frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx = A\ln\left|ax^2+bx+c\right|\Big|_\alpha^\beta$

Tích phân $\displaystyle\int_\alpha^\beta\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ thuộc dạng 2.

5.1.4. Dạng 4

$$I=\int_a^b\frac{P(x)}{Q(x)}dx \text{ **với** } P(x) \text{ **và** } Q(x) \text{ **là đa thức của** } x.$$

- Nếu bậc của $P(x)$ lớn hơn hoặc bằng bậc của $Q(x)$ thì dùng phép chia đa thức.
- Nếu bậc của $P(x)$ nhỏ hơn bậc của $Q(x)$ thì có thể xét các trường hợp:
- Khi $Q(x)$ chỉ có nghiệm đơn $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ thì đặt

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{x-\alpha_2}+\dots+\frac{A_n}{x-\alpha_n}.$$

- Khi $Q(x)$ có nghiệm đơn và vô nghiệm

  $Q(x)=\left(x-\alpha\right)\left(x^2+px+q\right),\Delta=p^2-4q<0$ thì đặt

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{Bx+C}{x^2+px+q}.$$

- Khi $Q(x)$ có nghiệm bội

$Q(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^2$ với $\alpha\neq\beta$ thì đặt

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}+\frac{C}{\left(x-\beta\right)^2}.$$

$Q(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^3$ với $\alpha\neq\beta$ thì đặt

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)^2(x-\beta)^3}=\frac{A}{(x-\alpha)^2}+\frac{B}{(x-\alpha)}+\frac{C}{(x-\beta)^3}+\frac{D}{(x-\beta)^2}+\frac{E}{x-\beta}$$

5.2. Tích phân hàm vô tỉ

$\int_a^b R(x,f(x))dx$ **Trong đó** $R\left(x,f\left(x\right)\right)$ ***có dạng:***

- $R\left(x,\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right)$ Đặt $x=a\cos 2t,\ t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
- $R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)$ Đặt $x=|a|\sin t$ hoặc $x=|a|\cos t$
- $R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ Đặt $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$
- $R\left(x,f\left(x\right)\right)=\frac{1}{(ax+b)\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$ Với $\left(\alpha x^2+\beta x+\gamma\right)'=\ k\left(ax+b\right)$

  Đặt $t=\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$, hoặc Đặt $t=\frac{1}{ax+b}$
- $R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)$ Đặt $x=|a|\tan t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
- $R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)$ Đặt $x=\frac{|a|}{\cos x}$, $t\in[0;\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
- $R\left(\sqrt[n_1]{x};\sqrt[n_2]{x};\dots;\sqrt[n_i]{x}\right)$ *Gọi* $k=BSCNN\left(n_1;n_2;\dots;n_i\right)$. Đặt $x=t^k$

5.2.1. Dạng 1

$$I=\int_\alpha^\beta\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx\quad\left(a\neq0\right)$$

Từ : $f(x)=ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]\Rightarrow\begin{cases}x+\dfrac{b}{2a}=u\\ \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}=K\end{cases}\leftrightarrow du=dx$

Khi đó ta có :

- Nếu $\Delta<0,a>0\Rightarrow f(x)=a\left(u^2+k^2\right)\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=\sqrt{a}.\sqrt{u^2+k^2}$ (1)
- Nếu : $\Delta=0\Rightarrow f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \sqrt{f(x)}=\sqrt{a}\left|x+\dfrac{b}{2a}\right|=\sqrt{a}.|u|\end{cases}$ (2)
- Nếu : $\Delta>0$.
    - Với $a>0$: $f(x)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=\sqrt{a}.\sqrt{\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}$ (3)
    - Với $a<0$: $f(x)=-a\left(x_1-x\right)\left(x_2-x\right)\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=\sqrt{-a}.\sqrt{\left(x_1-x\right)\left(x_2-x\right)}$ (4)

Căn cứ vào phân tích trên , ta có một số cách giải sau :

Phương pháp :

** Trường hợp :* $\Delta<0,a>0\Rightarrow f(x)=a\left(u^2+k^2\right)\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=\sqrt{a}.\sqrt{u^2+k^2}$

Khi đó đặt : $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}.x$

$$\Rightarrow\begin{cases}bx+c=t^2-2\sqrt{a}x\\ x=\alpha\to t=t_0,x=\beta\to t=t_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}};dx=\dfrac{2}{\left(b+2\sqrt{a}\right)}tdt\\ t-\sqrt{a}.x=t-\sqrt{a}\dfrac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}}\end{cases}$$

** Trường hợp :* $\Delta=0\Rightarrow f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \sqrt{f(x)}=\sqrt{a}\left|x+\dfrac{b}{2a}\right|=\sqrt{a}.|u|\end{cases}$

Khi đó : $I=\displaystyle\int_\alpha^\beta\frac{1}{\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|}dx=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_\alpha^\beta\frac{1}{\left|x+\frac{b}{2a}\right|}dx=\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)\Bigg|_\alpha^\beta : x+\dfrac{b}{2a}>0\\ -\dfrac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)\Bigg|_\alpha^\beta : x+\dfrac{b}{2a}<0\end{array}\right.$

** Trường hợp :* $\Delta>0,a>0$. Đặt : $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}=\left[\begin{array}{l}\left(x-x_1\right)t\\ \left(x-x_2\right)t\end{array}\right.$

** Trường hợp :* $\Delta>0,a<0$. Đặt : $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a\left(x_1-x\right)\left(x_2-x\right)}=\left[\begin{array}{l}\left(x_1-x\right)t\\ \left(x_2-x\right)t\end{array}\right.$

5.2.2. Dạng 2

$$I=\int_\alpha^\beta\frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx\quad\left(a\neq0\right)$$

Phương pháp :

- *Bước 1:*

Phân tích $f(x)=\dfrac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\dfrac{A.d\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\dfrac{B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (1)

- *Bước 2:*

  Quy đồng mẫu số , sau đó đồng nhất hệ số hai tử số để suy ra hệ hai ẩn số A,B

- *Bước 3:*

  Giải hệ tìm A,B thay vào (1)

- *Bước 4 :*

Tính $I=2A\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\Big|_{\alpha}^{\beta}+B\int_{\alpha}^{\beta}\dfrac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ (2)

Trong đó $\int_{\alpha}^{\beta}\dfrac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ $\left(a\neq 0\right)$ đã biết cách tính ở trên

5.2.3. Dạng 3

$$I=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\left(mx+n\right)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \quad \left(a\neq 0\right)$$

Phương pháp :

- *Bước 1:*

  Phân tích : $\dfrac{1}{\left(mx+n\right)\sqrt{ax^2+bx+c}}=\dfrac{1}{m\left(x+\dfrac{n}{m}\right)\sqrt{ax^2+bx+c}}$. (1)

- *Bước 2:*

  Đặt : $\dfrac{1}{y}=x+\dfrac{n}{m}\Rightarrow\begin{cases} y=\dfrac{1}{x+t}\left(t=\dfrac{n}{m}\right)\rightarrow dy=-\dfrac{1}{x+t}dx \\ x=\dfrac{1}{y}-t\Rightarrow ax^2+bx+c=a\left(\dfrac{1}{y}-t\right)^2+b\left(\dfrac{1}{y}-t\right)+c \end{cases}$

- *Bước 3:*

  Thay tất cả vào (1) thì I có dạng : $I=\pm\int_{\alpha'}^{\beta'}\dfrac{dy}{\sqrt{Ly^2+My+N}}$. Tích phân này chúng ta đã biết cách tính .

5.2.4. Dạng 4

$$I=\int_{\alpha}^{\beta}R\left(x;y\right)dx=\int_{\alpha}^{\beta}R\left(x;\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$$

(Trong đó : $R\left(x;y\right)$ là hàm số hữu tỷ đối với hai biến số x,y và $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ là các hằng số đã biết)

Phương pháp :

- *Bước 1:*

  Đặt : $t=\sqrt[m]{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$ (1)

- *Bước 2:*

  Tính x theo t : Bằng cách nâng lũy thừa bậc m hai vế của (1) ta có dạng $x = \varphi(t)$

- *Bước 3:*

  Tính vi phân hai vế : $dx = \varphi'(t)dt$ và đổi cận

- *Bước 4:*

  Tính : $\int_{\alpha}^{\beta} R\left(x;\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx = \int_{\alpha'}^{\beta'} R(\varphi(t);t)\varphi'(t)dt$

5.3. Tích phân hàm lượng giác

5.3.1. Một số công thức lượng giác

5.3.1.1. Công thức cộng

$$\cos(a \pm b) = \cos a.\cos b \mp \sin a.\sin b$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a.\cos b \pm \sin b.\cos a$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a.\tan b}$$

5.3.1.2. Công thức nhân đôi

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a = \frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$$

$$\sin 2a = 2\sin a.\cos a = \frac{2\tan a}{1+\tan^2 a} \quad ; \quad \tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \quad ; \quad \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

5.3.1.3. Công thức hạ bậc

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2} \quad ; \quad \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \quad ; \quad \tan^2 a = \frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$$

$$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4} \quad ; \quad \cos^3\alpha = \frac{\cos 3\alpha + 3\cos\alpha}{4}$$

5.3.1.4. Công thức tính theo t

Với $t = \tan\frac{a}{2}$ Thì $\sin a = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\tan a = \frac{2t}{1-t^2}$

5.3.1.5. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\cos\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha.\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$$

5.3.1.6. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$
$$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Công thức thường dùng:

$$\cos^4\alpha + \sin^4\alpha = \frac{3+\cos 4\alpha}{4}$$
$$\cos^6\alpha + \sin^6\alpha = \frac{5+3\cos 4\alpha}{8}$$

Hệ quả:

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

5.3.2. Một số dạng tích phân lượng giác

- Nếu gặp $I = \int_a^b f(\sin x).\cos x dx$ ta đặt $t = \sin x$.
- Nếu gặp dạng $I = \int_a^b f(\cos x).\sin x dx$ ta đặt $t = \cos x$.
- Nếu gặp dạng $I = \int_a^b f(\tan x)\frac{dx}{\cos^2 x}$ ta đặt $t = \tan x$.
- Nếu gặp dạng $I = \int_a^b f(\cot x)\frac{dx}{\sin^2 x}$ ta đặt $t = \cot x$.

5.3.2.1. Dạng 1

$$I_1 = \int (\sin x)^n \, dx \quad ; \quad I_2 \int (\cos x)^n \, dx$$

*** Phương pháp**

- Nếu n chẵn thì sử dụng công thức hạ bậc
- Nếu $n = 3$ thì sử dụng công thức hạ bậc hoặc biến đổi
- Nếu $3n$ lẻ $(n = 2p+1)$ thì thực hiện biến đổi:

$$I_1 = \int (\sin x)^n \, dx = \int (\sin x)^{2p+1} \, dx = \int (\sin x)^{2p} \sin x dx = -\int \left(1-\cos^2 x\right)^p d(\cos x)$$
$$= -\int \left[C_p^0 - C_p^1 \cos^2 x + \ldots + (-1)^k C_p^k \left(\cos^2 x\right)^k + \ldots + (-1)^p C_p^p \left(\cos^2 x\right)^p\right] d(\cos x)$$
$$= -\left[C_p^0 \cos x - \frac{1}{3} C_p^1 \cos^3 x + \ldots + \frac{(-1)^k}{2k+1} C_p^k (\cos x)^{2k+1} + \ldots + \frac{(-1)^p}{2p+1} C_p^p (\cos x)^{2p+1}\right] + c$$

$$I_2 = \int (\cos x)^n dx = \int (\cos x)^{2p+1} dx = \int (\cos x)^{2p} \cos x dx = \int (1-\sin^2 x)^p d(\sin x)$$

$$= \int \left[C_p^0 - C_p^1 \sin^2 x + ... + (-1)^k C_p^k (\sin^2 x)^k + ... + (-1)^p C_p^p (\sin^2 x)^p \right] d(\sin x)$$

$$= \left[C_p^0 \sin x - \frac{1}{3} C_p^1 \sin^3 x + ... + \frac{(-1)^k}{2k+1} C_p^k (\sin x)^{2k+1} + ... + \frac{(-1)^p}{2p+1} C_p^p (\sin x)^{2p+1} \right] + c$$

5.3.2.2. Dạng 2

$$I = \int \sin^m x \cos^n x dx \quad (m, n \in N)$$

*** Phương pháp**

- ***Trường hợp 1:*** m, n ***là các số nguyên***

a. Nếu m chẵn, n chẵn thì sử dụng công thức hạ bậc, biến đổi tích thành tổng.

b. Nếu m chẵn, n lẻ $(n = 2p+1)$ thì biến đổi:

$$I = \int (\sin x)^m (\cos x)^{2p+1} dx = \int (\sin x)^m (\cos x)^{2p} \cos x dx = \int (\sin x)^m (1-\sin^2 x)^p d(\sin x)$$

$$= \int (\sin x)^m \left[C_p^0 - C_p^1 \sin^2 x + ... + (-1)^k C_p^k (\sin^2 x)^k + ... + (-1)^p C_p^p (\sin^2 x)^p \right] d(\sin x) =$$

$$\left[C_p^0 \frac{(\sin x)^{m+1}}{m+1} - C_p^1 \frac{(\sin x)^{m+3}}{m+3} + ... + (-1)^k C_p^k \frac{(\sin x)^{2k+1+m}}{2k+1+m} + ... + (-1)^p C_p^p \frac{(\sin x)^{2p+1+m}}{2p+1+m} \right] + c$$

c. Nếu m lẻ $(m = 2p+1)$, n chẵn thì biến đổi:

$$I = \int (\sin x)^{2p+1} (\cos x)^n dx = \int (\cos x)^n (\sin x)^{2p} \sin x dx = -\int (\cos x)^n (1-\cos^2 x)^p d(\cos x)$$

$$= -\int (\cos x)^n \left[C_p^0 - C_p^1 \cos^2 x + ... + (-1)^k C_p^k (\cos^2 x)^k + ... + (-1)^p C_p^p (\cos^2 x)^p \right] d(\cos x) =$$

$$-\left[C_p^0 \frac{(\cos x)^{n+1}}{n+1} - C_p^1 \frac{(\cos x)^{n+3}}{n+3} + ... + (-1)^k C_p^k \frac{(\cos x)^{2k+1+n}}{2k+1+n} + ... + (-1)^p C_p^p \frac{(\cos x)^{2p+1+n}}{2p+1+n} \right] + c$$

d. Nếu m lẻ, n lẻ thì sử dụng biến đổi 1.2. hoặc 1.3. cho số mũ lẻ bé hơn.

- ***Nếu*** m, n ***là các số hữu tỉ thì biến đổi và đặt*** $u = sinx$

$$B = \int \sin^m x \cos^n x dx = \int (\sin x)^m (\cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cos x dx = \int u^m (1-u^2)^{\frac{n-1}{2}} du \text{ (*)}$$

Tích phân (*) tính được $\Leftrightarrow$ 1 trong 3 số $\frac{m+1}{2}$; $\frac{n-1}{2}$; $\frac{m+k}{2}$ là số nguyên

5.3.2.3. Dạng 3

$$I_1 = \int (\tan x)^n dx \; ; \; I_2 = \int (\cot x)^n dx \; (n \in N).$$

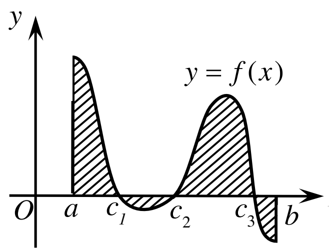
- $\int (1+\tan^2 x) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int d(\tan x) = \tan x + c$
- $\int (1+\cot^2 x) dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int d(\cot x) = -\cot x + C$
- $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$
- $\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C$

6. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

6.1. Diện tích hình phẳng

6.1.1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 1 đường cong và trục hoành

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b \left|f(x)\right| dx$

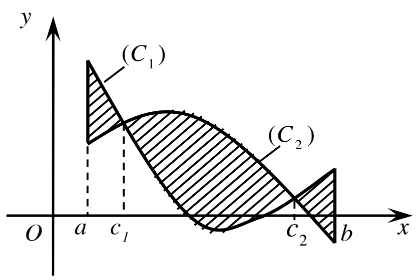


$$(H)\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$\boxed{S = \int_a^b \left|f(x)\right| dx}$$

6.1.2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đường cong

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| dx$



$$(H)\begin{cases} (C_1): y = f_1(x) \\ (C_2): y = f_2(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases}$$

$$\boxed{S = \int_a^b \left|f_1(x) - f_2(x)\right| dx}$$

- Nếu trên đoạn $[a;b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì: $\int_a^b \left|f(x)\right| dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$

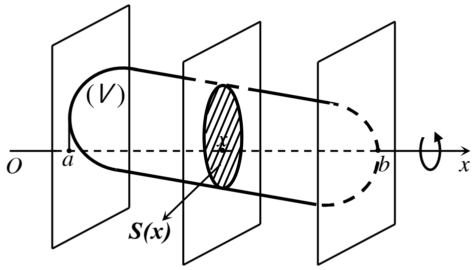
- Nắm vững cách tính tích phân của hàm số có chứa giá trị tuyệt đối

- Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, $x = h(y)$ và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ được xác định: $S = \int_c^d \left|g(y) - h(y)\right| dy$

6.2. Thể tích vật thể và thể tích khối tròn xoay

6.2.1. Thể tích vật thể

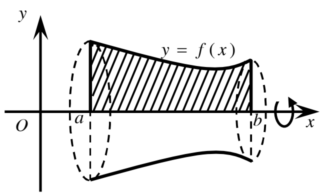
Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a \le x \le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$.



$$\boxed{V = \int_a^b S(x)dx}$$

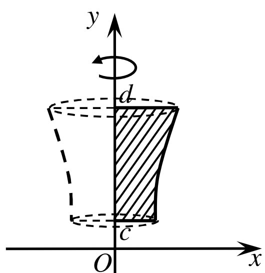
6.2.2. Thể tích khối tròn xoay

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox:



$$\begin{cases} (C): y = f(x) \\ (Ox): y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{V_x = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx}$$

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục Oy:



$$\begin{cases} (C): x = g(y) \\ (Oy): x = 0 \\ y = c \\ y = d \end{cases} \qquad \boxed{V_y = \pi\int_c^d \left[g(y)\right]^2 dy}$$

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox: $V = \pi\int_a^b \left|f^2(x) - g^2(x)\right|dx$

PHẦN IV. SỐ PHỨC

1. SỐ PHỨC

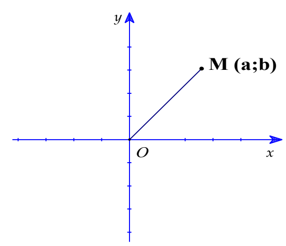
1.1. Khái niệm số phức

- Số phức (dạng đại số) : $z = a + bi;\ (a, b \in \mathbb{R})$. Trong đó : a là phần thực, b là phần ảo, i là đơn vị ảo, $i^2 = -1$.
- Tập hợp số phức kí hiệu: $\mathbb{C}$.
- z là số thực $\Leftrightarrow$ phần ảo của z bằng 0 $(b = 0)$.
- z là số ảo (hay còn gọi là thuần ảo) $\Leftrightarrow$ phần thực bằng 0 $(a = 0)$.
- Số 0 vừa là số thực vừa là số ảo.

1.2. Hai số phức bằng nhau

- Hai số phức $z_1 = a + bi\ (a,\ b \in \mathbb{R})$ và $z_2 = c + di\ (c,\ d \in \mathbb{R})$ bằng nhau khi phần thực và phần ảo của chúng tương đương bằng nhau.
- Khi đó ta viết $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$

1.3. Biểu diễn hình học số phức



Số phức $z = a + bi\ (a,\ b \in \mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$ hay bởi $\vec{u} = (a;b)$ trong mặt phẳng phức với hệ tọa độ Oxy.

1.4. Số phức liên hợp

Số phức liên hợp của $z = a + bi\ (a,\ b \in \mathbb{R})$ là $\bar{z} = a - bi$.

- $\bar{\bar{z}} = z$; $\quad \overline{z \pm z'} = \bar{z} \pm \bar{z}'$; $\quad \overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z}'$; $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$; $\quad z.\bar{z} = a^2 + b^2$.
- z là số thực $\Leftrightarrow z = \bar{z}$; z là số ảo $z = -\bar{z}$.

1.5. Môđun của số phức

Độ dài của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là **môđun của số phức** z và kí hiệu là $|z|$. Vậy $|z| = |\overrightarrow{OM}|$ hay $|z| = |a + bi| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Một số tính chất:

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}} = |\overrightarrow{OM}|$; $\quad |\bar{z}| = |z|$
- $|z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C};\ |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$; $\quad \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$; $\quad \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$.

- $\left||z_1| - |z_2|\right| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

2. PHÉP CỘNG TRỪ NHÂN CHIA SỐ PHỨC

2.1. Phép cộng và phép trừ số phức

Cho hai số phức $z_1 = a + bi \ (a,\ b \in \mathbb{R})$ và $z_2 = c + di \ (c,\ d \in \mathbb{R})$. Khi đó:

$z_1 \pm z_2 = (a + c) \pm (b + d)i$

- Số đối của số phức $z = a + bi$ là $-z = -a - bi$.
- Tổng của một số phức với số phức liên hợp của nó bằng hai lần phần thực của số thực đó: $z = a + bi, z + \overline{z} = 2a$.

2.2. Phép nhân số phức

- Cho hai số phức $z_1 = a + bi \ (a,\ b \in \mathbb{R})$ và $z_2 = c + di \ (c,\ d \in \mathbb{R})$.

Khi đó: $z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

- Với mọi số thực k và mọi số phức $z = a + bi \ (a,\ b \in \mathbb{R})$, ta có

$k.z = k.(a + bi) = ka + kbi$. *Đặc biệt:* $0.z = 0$ với mọi số phức z.

- Lũy thừa của i **:** $i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = i^2.i = -i$

$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2.3. Chia hai số phức

Số phức nghịch đảo của z khác 0 là số $z^{-1} = \dfrac{1}{|z|^2}\overline{z}$.

Phép chia hai số phức z' và $z \ne 0$ là $\dfrac{z'}{z} = z'z^{-1} = \dfrac{z'.\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{z'.\overline{z}}{z.\overline{z}}$.

3. TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN SỐ PHỨC

Một số tập hợp điểm biểu diễn số phức z thường gặp:

- $ax + by + c = 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là đường thẳng
- $x = 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là trục tung Oy
- $y = 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là trục hoành Ox
- $(x - a)^2 + (y - b)^2 < R^2 \Rightarrow$ tập hợp điểm là *hình tròn* tâm $I(a;b)$, bán kính R
- $\left[\begin{array}{l}(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0\end{array}\right. \Rightarrow$ tập hợp điểm là *đường tròn* có tâm $I(a;b)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$
- $x > 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là miền bên phải trục tung
- $y < 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là miền phía dưới trục hoành
- $x < 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là miền bên trái trục tung

- $y > 0 \Rightarrow$ tập hợp điểm là phía trên trục hoành
- $y = ax^2 + bx + c \Rightarrow$ tập hợp điểm là đường Parabol
- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ tập hợp điểm là đường Elip
- $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ tập hợp điểm là đường Hyperbol

4. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC

4.1. Căn bậc hai của số thực âm

- Cho số z, nếu có số phức z_1 sao cho $z_1^{\,2} = z$ thì ta nói z_1 là một căn bậc hai của z.
- Mọi số phức $z \neq 0$ đều có hai căn bậc hai.
- Căn bậc hai của số thực z âm là $\pm i\sqrt{|z|}$.

Tổng quát, các căn bậc hai của số thực a âm là $\pm i\sqrt{|a|}$.

4.2. Phương trình bậc hai với hệ số thực

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0, \forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Xét biệt số $\Delta = b^2 - 4ac$ của phương trình. Ta thấy:

- Khi $\Delta = 0$, phương trình có một nghiệm thực $x = -\dfrac{b}{2a}$.
- Khi $\Delta > 0$, phương trình có hai nghiệm thực phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Khi $\Delta < 0$, phương trình có hai nghiệm phức $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

5. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN MAX – MIN MÔ ĐUN SỐ PHỨC

- Cho số phức z thỏa mãn $|z_1.z + z_2| = r, \ (r > 0)$ $\begin{cases} \max|z| = \left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| + \dfrac{r}{|z_1|} \\ \min|z| = \left|\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| - \dfrac{r}{|z_1|}\right| \end{cases}$.
- Cho số phức z thỏa mãn $|z_1.z - z_2| = r_1, (r_1 > 0)$.

$$\boxed{\max P = \left|\frac{z_2}{z_1} - z_3\right| + \frac{r_1}{|z_1|} \text{ và } \min P = \left|\left|\frac{z_2}{z_1} - z_3\right| - \frac{r_1}{|z_1|}\right|}$$

- Cho số phức z thỏa mãn $|z_1.z + z_2| + |z_1.z - z_2| = k, \ (k > 0)$.

$$\boxed{\max|z| = \frac{k}{2|z_1|} \text{ và } \min|z| = \frac{\sqrt{k^2 - 4|z_2|^2}}{2|z_1|}}$$