HÀM SỐ VÀ ỨNG DỤNG CỦA HÀM SỐ

Chương I: ĐẠO HÀM – VI PHÂN

I. ĐẠO HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ SƠ CẤP CƠ BẢN CẦN NẮM

Nhóm	Đạo hàm của các hàm số hợp (u = u(x))	Đạo hàm của các hàm số sơ cấp cơ bản
Đa thức	$(u^{\alpha})' = \alpha.u^{\alpha-1}.u'$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(x^{\alpha})' = \alpha.x^{\alpha-1}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Lượng giác	$(\sin u)' = u'.\cos u$ $(\cos u)' = -u'.\sin u$ $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'.(1+\operatorname{tg}^2 u)$ $(\operatorname{cotg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$	$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = (1+\operatorname{tg}^2 x)$ $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+\operatorname{cotg}^2 x)$
Mũ	$(e^u)' = u'.e^u$ $(a^u)' = u'.a^u.\ln a$	$(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x.\ln a$
Lôgarit	$(\ln\|u\|)' = \frac{u'}{u}$ $(\log_a\|u\|)' = \frac{u'}{u.\ln a}$	$(\ln\|x\|)' = \frac{1}{x}$ $(\log_a\|x\|)' = \frac{1}{x.\ln a}$

II. VI PHÂN:

1. **Định nghĩa: $df(x) = f'(x).dx$**
2. **Qui tắc:**

- $d(u \pm v) = du \pm dv$
- $d(uv) = udv + vdu$
- $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \quad (v \neq 0)$

Chương II : ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM

I. ĐỊNH LÝ LAGRĂNG:

Nếu hàm số y = f(x) **liên tục** trên đoạn **[a ; b]** và **có đạo hàm** trong **(a ; b)** thì tồn tại điểm $c \in (a\,;b)$ sao cho: $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

II. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ:

1. **Hàm số không đổi**: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = c$
2. **Điều kiện cần:** f(x) có đạo hàm trong (a ; b)
   a) Nếu f(x) tăng trong (a ; b) $\Rightarrow f'(x) \ge 0 \;\; \forall x \in (a\,;b)$
   b) Nếu f(x) giảm trong (a ; b) $\Rightarrow f'(x) \le 0 \;\; \forall x \in (a\,;b)$
3. **Điều kiện đủ:** f(x) có đạo hàm trong (a ; b)
   a) Nếu $f'(x) > 0 \;\; \forall x \in (a\,;b) \Rightarrow$ f(x) tăng trong (a ; b)
   b) Nếu $f'(x) < 0 \;\; \forall x \in (a\,;b) \Rightarrow$ f(x) giảm trong (a ; b)

- **Chú ý:** ***Nếu trong điều kiện đủ, nếu f'(x) = 0 tại một số hữu hạn điểm thuộc (a ; b) thì kết luận vẫn đúng.***

III. QUY TẮC TÌM ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ y = f(x)

Qui tắc 1:

1) Tính đạo hàm $y' = f'(x)$

2) Tìm các điểm tới hạn x_i : Là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ hoặc tại các điểm đó $f'(x)$ không xác định

3) Lập bảng xét dấu của $f'(x)$

4) Tại mỗi điểm x_i mà qua đó nếu:

a) $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương thì f(x) đạt cực tiểu tại điểm đó

b) $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm thì f(x) đạt cực đại tại điểm đó

c) $f'(x)$ không đổi dấu thì f(x) không đạt cực trị tại điểm đó

Qui tắc 2:

1) Tính $f'(x)$, $f''(x)$
2) Tìm các điểm x_i tại đó $f'(x) = 0$ (*nghiệm của phương trình này*)
3) Tính $f''(x_i)$:

a) Nếu $f''(x_i) > 0$ thì f(x) đạt cực tiểu tại điểm đó

b) Nếu $f''(x_i) < 0$ thì f(x) đạt cực đại tại điểm đó

CHÚ Ý:

- **Giữa hai điểm tới hạn kề nhau x_1 và x_2, $f'(x)$ luôn giữ nguyên một dấu**
- **Cách tính giá trị điểm cực trị của hàm số:**

- Trong trường hợp điểm cực trị x_0 ($x_{CĐ}$, x_{CT}) là số vô tỉ thì:

1) Nếu f(x) là hàm hữu tỉ $f(x) = \dfrac{U(x)}{V(x)}$ thì $\mathbf{f(x_0) = \dfrac{U'(x_0)}{V'(x_0)}}$

2) Nếu f(x) là hàm đa thức: Ví dụ hàm đa thức bậc 3

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$

Ta chia f(x) cho $f'(x)$ được dư là hàm bậc nhất (mx + n) vậy ta có:

$f(x) = f'(x).(px + q) + (mx + n)$ thì $\mathbf{f(x_0) = (mx_0 + n)}$ (vì $f'(x_0) = 0$)

VD: Hãy tìm các điểm cực trị và giá trị của chúng trong các trường hợp sau:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x - 1}$ 2) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + x + 1$

IV. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

1. Qui tắc tìm GTLN, GTNN của hàm số y = f(x) trên khoảng (a ; b)

- Lập bảng biến thiên của hàm số để kết luận, chú ý:

+ Nếu chỉ có một điểm cực tiểu x_0 thì $f(x_0) = \text{Min } y$

+ Nếu chỉ có một điểm cực đại x_0 thì $f(x_0) = \text{Max } y$

+ Nếu có cả điểm cực đại và cực tiểu thì ta phải tìm thêm giới hạn của f(x) tại các biên a, b để kết luận thích hợp.

2. Qui tắc tìm GTLN, GTNN của hàm số y = f(x) trên đoạn [a ; b]

- Giải phương trình $f'(x) = 0$, tìm các nghiệm $x_1, x_2, \ldots, x_n$

(Chỉ chọn các nghiệm thuộc đoạn [a ; b])

- Tính $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$

- So sánh $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$

⇒ • Số lớn nhất **M** là GTLN của hàm số y = f(x) trên đoạn [a ; b],

KH: **M =** $\max\limits_{[a;\, b]} f(x)$

• Số nhỏ nhất **m** là GTNN của hàm số y = f(x) trên đoạn [a ; b],

KH: **m =** $\min\limits_{[a;\, b]} f(x)$

CHÚ Ý: • Nếu giải phương trình f '(x) = 0 vô nghiệm ⇒ f(x) đơn điệu trên [a ; b] ta chỉ cần so sánh f(a) và f(b): Số lớn là Max y và số nhỏ là Min y.

• Ngoài ra ta có thể dùng các phương pháp sau:

⊕ Dùng bất đẳng thức để tìm GTNN, GTLN của hàm số (xem chuyên *đề bất đẳng thức*)

⊕ Giải phương trình f(x) = y với x ∈ [a ; b] và tìm điều kiện để phương trình có nghiệm trong [a ; b]

V. TIỆM CẬN CỦA ĐƯỜNG CONG (C): y = f(x)

1. Tiệm cận đứng

• Nếu $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \infty$ thì đường thẳng x = x_o là tiệm cận đứng của (C)

2. Tiệm cận ngang

• Nếu $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = y_o$ thì đường thẳng y = y_o là tiệm cận ngang của (C)

3. Tiệm cận xiên

• Đường thẳng (d) có phương trình y = ax + b là một tiệm cận xiên của (C) ⇔ $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

• Cách xác định hệ số a, b của đường tiệm cận xiên y = ax +b theo công thức: a = $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$, b = $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - ax]$

4. Phương pháp tìm tiệm cận của (C): y = f(x):

- Tìm TXĐ của f(x) là D suy ra các mút (biên) của nó
- Tính giới hạn của hàm số tại các mút

+ Nếu thoả mãn (1), (2) thì ta có TC đứng, ngang.

+ Nếu $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ thì ta tính a = $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$:

• Nếu $a \neq 0, \infty$ thì ta tính $b = \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - ax]$.

Nếu $b \neq \infty$ thì ta có tiệm cận xiên: $y = ax + b$.

VI. KHẢO SÁT HÀM SỐ

1. Các bước khảo sát 1 hàm số:

B_1: Tìm TXĐ

B_2: Xét sự biến thiên (<u>đồng biến, nghịch biến</u>) của hàm số và chỉ ra các điểm cực trị (<u>cực đại, cực tiểu</u>)

B_3: • Tính các giới hạn đặc biệt (tại các mút của TXĐ)

- Tìm các tiệm cận (Đối với các hàm phân thức ***<u>hữu tỉ</u>***

B_4: Xét tính lồi, lõm và tìm điểm uốn (Đối với các hàm ***<u>đa thức</u>***)

B_5: Lập bảng biến thiên

B_6: Đồ thị:

+ Tìm giao điểm với trục Ox, Oy (nếu được)

+ Lập bảng giá trị nếu cần (khi tìm giao với Ox không được…)

+ Vẽ đồ thị

+ Nhận xét: Nêu tâm đối xứng, trục đối xứng (nếu có) của đồ thị.

2. Khảo sát một số hàm số thường gặp

a) Hàm đa thức

- $y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$
- $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$
- $y = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$

b) Hàm phân thức hữu tỉ

- $y = \dfrac{ax + b}{cx + d} \quad (c \neq 0,\ D = ad - bc \neq 0)$