BÀI TẬP BẤT ĐẲNG THỨC

Câu 1. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \geq (a+b+c).\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Câu 2. Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\left(a^2b+b^2a+a^2c+c^2a+b^2c+c^2b\right)^2 \geq 4\left(ab+bc+ca\right)\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right).$$

Câu 3. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh một tam giác có chu vi bằng 3. Chứng minh rằng:

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq a^2b^2c^2.$$

Câu 4. Cho $a,b,c>0$ và $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2a}{1+a^2}+\frac{2b}{1+b^2}+\frac{2c}{1+c^2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}.$$

Câu 5. Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z} \leq 1.$$

Câu 6. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \geq (a+b+c).\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Câu 7. CM các bất đẳng thức sau:

1/ $1<\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{y+z+t}+\frac{z}{z+t+x}+\frac{t}{t+x+y}<2$, với mọi $x,y,z,t>0$.

2/ $x^2\left(1+\sin^2 y\right)+2x\left(\sin x+\cos y\right)+1+\cos^2 y>0$, với mọi $x,y\in R$.

LG:

1/

$$\begin{cases} \frac{x}{x+y+z+t}<\frac{x}{x+y+z}<\frac{x}{x+z} \\ \frac{y}{x+y+z+t}<\frac{y}{y+z+t}<\frac{y}{y+t} \\ \frac{z}{x+y+z+t}<\frac{z}{z+t+x}<\frac{z}{x+z} \\ \frac{t}{x+y+z+t}<\frac{t}{t+x+y}<\frac{t}{y+t} \end{cases}$$ với mọi $x,y,z,t>0$.

Cộng vế theo voế các bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{x+y+z+t}{x+y+z+t}<\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{y+z+t}+\frac{z}{z+t+x}+\frac{t}{t+x+y}<\frac{x+z}{x+z}+\frac{y+t}{y+t},$$

Hay $$1<\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{y+z+t}+\frac{z}{z+t+x}+\frac{t}{t+x+y}<2$$

2/ Xét tam thức bậc hai theo biến x (xem y là tham số)

$f(x) = x^2(1+\sin^2 y) + 2x(\sin y + \cos y) + 1 + \cos^2 y$

Ta có $\Delta' = (\sin y + \cos y)^2 - (1+\sin^2 y).(1+\cos^2 y)$

$= 2\sin y \cos sy - 1 - \sin^2 y \cos^2 y$

$= -(\sin y \cos y - 1)^2 < 0$, với mọi $y \in R$

Và hệ số của a là $(1+\sin^2 y) > 0$, với mọi $y \in R$

Do đó tam thức $f(x)$ luôn cùng dấu vơi dấu hệ số a với mọi $x \in R$

Nghĩa là $x^2(1+\sin^2 y) + 2x(\sin y + \cos y) + 1 + \cos^2 y > 0$, với mọi $x \in R$

Vậy $x^2(1+\sin^2 y) + 2x(\sin y + \cos y) + 1 + \cos^2 y > 0$ với mọi $x, y \in R$.

Câu 8. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{4xy}{(x+z)(y+z)} + \frac{3yz}{(y+x)(z+x)} + \frac{4zx}{(z+y)(x+y)} \geq \frac{8}{3}.$$

Dấu đẳng thức khi nào xảy ra?

LG:

Coi $x+y+z=1$ (Giải thích: Do đồng bậc nên nếu $x+y+z=s$ ta chỉ cần đặt $x_1 = \frac{x}{s}, y_1 = \frac{y}{s}, z_1 = \frac{z}{s}$). Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{4xy}{(1-x)(1-y)} + \frac{3yz}{(1-y)(1-z)} + \frac{4zx}{(1-z)(1-x)} \geq \frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow 4xy(1-z) + 3yz(1-x) + 4zx(1-y) \geq \frac{8}{3}(1-x)(1-y)(1-z)$$

$$\Leftrightarrow 12xy + 9yz + 12zx - 33xyz \geq 8(1-x-y-z+xy+yz+zx-xyz)$$

$$\Leftrightarrow 4xy + yz + 4zx \geq 25xyz \Leftrightarrow \frac{4}{z} + \frac{1}{x} + \frac{4}{y} \geq 25 \quad (2)$$

Áp dụng BĐT Bunhia, ta có $\left(\frac{4}{z} + \frac{1}{x} + \frac{4}{y}\right)(z+x+y) \geq (2+1+2)^2$ hay có ngay (2). Vậy BĐT đã cho được chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{z}{2} = \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{x+y+z}{5} = \frac{1}{5}$ (khi coi $x+y+z=1$). Tổng quát là $2x = y = z$.

Câu 9. Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$$

Câu 10. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} \geq 36$.

Câu 11. Chứng minh rằng nếu $(a+c)(a+b+c) < 0$ thì $(b-c)^2 > 4a(a+b+c)$.

Câu 12. Chứng minh rằng $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{2\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{\left(a+b+c+\sqrt[3]{abc}\right)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

LG: BĐT viết thành

$$\frac{c^2}{c^2(a+b)}+\frac{a^2}{a^2(b+c)}+\frac{b^2}{b^2(c+a)}+\frac{\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2}{2abc\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{\left(a+b+c+\sqrt[3]{abc}\right)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$ đúng hiển nhiên

Câu 13.

a. Cho $a,b,c>0$ và $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=3$ .Chứng minh : $abc \geq \frac{a+b+c}{3}$.

b. Cho $a,b,c>0$ và $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=3$ .Chứng minh : $abc \geq \frac{a+b+c}{3}$.

Câu 14. Cho a,b,c là ba số thực không âm và thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $M=(a+b+c)^3-(a+b+c)+6abc$.

LG:

Chứng minh được: $(a+b+c)^2 \leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)=3$

Suy ra: $a+b+c \leq \sqrt{3}$ và $(a+b+c)^3 \leq 3(a+b+c)$

$$M \leq 2(a+b+c)+6abc \leq 2\sqrt{3}+6\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \leq \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

Vậy GTLN của M là $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

Giá trị này đạt được khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 15. Cho $x,\ y,\ z$ là ba số thực không âm thỏa $x^2+y^2+z^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P=xy+yz+zx+\frac{5}{x+y+z}.$$

Câu 16. Cho a,b,c không âm và thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M=(a+b+c)^3+(a+b+c)+6abc.$$

Câu 17. Cho ba số thực dương a,b,c .Chứng minh: $\frac{a^3+b^3}{b^2+c^2}+\frac{b^3+c^3}{c^2+a^2}+\frac{c^3+a^3}{a^2+b^2} \geq a+b+c$

LG:

Ta chứng minh: $\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2} \geq \frac{a+b+c}{2}$ (1)

Sử dụng bất đẳng thức AM_GM ta có :

$$\frac{ab^2}{a^2+b^2} \leq \frac{ab^2}{2ab} \qquad \frac{bc^2}{b^2+c^2} \leq \frac{bc^2}{2bc} \qquad \frac{ca^2}{c^2+a^2} \leq \frac{ab^2}{2ab}$$

Suy ra : $\frac{ab^2}{a^2+b^2}+\frac{bc^2}{b^2+c^2}+\frac{ca^2}{c^2+a^2} \leq \frac{a+b+c}{2}$

Suy ra : $a-\frac{ab^2}{a^2+b^2}+b-\frac{bc^2}{b^2+c^2}+c-\frac{ca^2}{c^2+a^2} \geq \frac{a+b+c}{2}$

Vậy ta chứng minh được (1)

Ta chứng minh $\frac{a^3}{b^2+c^2}+\frac{b^3}{c^2+a^2}+\frac{c^3}{a^2+b^2} \geq \frac{a+b+c}{2}$ (2)

(2) đối xứng với a,b,c .Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$

Suy ra : $\frac{a^2}{b^2+c^2} \geq \frac{b^2}{a^2+c^2} \geq \frac{c^2}{a^2+b^2}$

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev cho 2 dãy $a \geq b \geq c$ và $\frac{a^2}{b^2+c^2} \geq \frac{b^2}{a^2+c^2} \geq \frac{c^2}{a^2+b^2}$

ta có : $3\left(\frac{a^3}{b^2+c^2}+\frac{b^3}{c^2+a^2}+\frac{c^3}{a^2+b^2}\right) \geq (a+b+c)\left(\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\right)$

Ta lại có $\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{3}{2}$ (bất đẳng thức nesbitt)

Vậy ta chứng minh được (2)

Công (1) và (2) vế theo vế ta có điều phải chứng minh

Câu 18. a. Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng: $\left(2+a^2\right)\left(2+b^2\right) \geq \frac{9}{16}\left[\left(a+b\right)^2+7\right]$.

b. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{(2+a^2)(2+b^2)(2+c^2)}{(3+a+b+c)^2}$.

LG:

a) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$14a^2+14b^2+16a^2b^2-36ab+1 \geq 0 \Leftrightarrow 14\left(a-b\right)^2+\left(4ab-1\right)^2 \geq 0$ đúng

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=\frac{1}{2}$

b) Đặt $t=a+b$, ta có:

$$\frac{16P}{9} \geq \frac{(2t^2+7)(c^2+2)}{(3+t+c)^2}$$

$$\frac{(2t^2+7)(c^2+2)}{(3+t+c)^2}=1+\frac{2\left(tc-\frac{1}{2}\right)^2+3(t-1)^2+6\left(c-\frac{1}{2}\right)^2}{(3+t+c)^2} \geq 1$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{9}{16}$ khi $a=b=c=\frac{1}{2}$

Câu 19. Cho ba số dương a,b,c thỏa mãn abc = 1.Chứng minh rằng:

a) $a^2+b^2+c^2 \geq a+b+c$

b) $\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1} \leq 1$

LG:

a) $a^2+1 \geq 2a$, $b^2+1 \geq 2b$, $c^2+1 \geq 2c$

$a^2+1 \geq 2a$, $b^2+1 \geq 2b$, $c^2+1 \geq 2c$

Mà $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}=3$

Vậy: $a^2+b^2+c^2 \geq a+b+c$, đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$

b) $a+b=\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right) \geq \sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)$

$\Rightarrow a+b+1 \geq \sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)+1=\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)+\sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)$

$\Rightarrow a+b+1 \geq \sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)+1=\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)+\sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)$

Tương tự:

$$\frac{1}{b+c+1} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{bc}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)}=\frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{bc}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$$

Tương tự:

$$\frac{1}{b+c+1} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{bc}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)}=\frac{\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{bc}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$$

Vậy: $\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1} \leq \frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=1$

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c = 1

Câu 20. Cho a,b là các số thực dương thỏa : $a^2+b=5$. Chứng minh $a^3+b^3 \geq 9$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

LG:

Áp dụng AM-GM , ta có: $a^3+a^3+8 \geq 6a^2$ .Suy ra $a^3+4 \geq 3a^2$

Tương tự : $b^3+1+1 \geq 3b$. Suy ra $b^3+2 \geq 3b$

Cộng từng vế hai bất đẳng thức trên ta có : $a^3+b^3+6 \geq 3a^2+3b$

Suy ra: $a^3+b^3 \geq 9$

Khi $a=2, b=1$ thì đẳng thức xãy ra

Câu 21. Cho ba số thực dương a, b, c thoả mãn: $\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c} \geq 1$. Chứng minh rằng: $abc \leq 1$

LG:

Ta có : $\frac{1}{2+a} \geq 1-\frac{1}{2+b}-\frac{1}{2+c} \Leftrightarrow \frac{2}{2+a} \geq 1-\frac{2}{2+b}+1-\frac{2}{2+c}$

$\Rightarrow \frac{2}{2+a} \geq \frac{b}{2+b}+\frac{c}{2+c} \geq 2\sqrt{\frac{bc}{(2+b)(2+c)}}\ (1)$

Tương tự ta có : $\frac{2}{2+b} \geq 2\sqrt{\frac{ac}{(2+a)(2+c)}}\ (2)$, $\frac{2}{2+c} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{(2+a)(2+b)}}\ (3)$

Từ (1),(2),(3) suy ra : $\frac{8}{(2+a)(2+b)(2+c)} \geq 8\frac{abc}{(2+a)(2+b)(2+c)} \Rightarrow abc \leq 1$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Câu 22. Cho các số thực: $a>0, b>0, c>0, d>0$. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{d}+\frac{d^3}{a} \geq a^2+b^2+c^2+d^2$

b) $\frac{a^4}{b^2}+\frac{b^4}{c^2}+\frac{c^4}{d^2}+\frac{d^4}{a^2} \geq \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{d}+\frac{d^3}{a}$

LG:

a) Cho $a>0,b>0,c>0,d>0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{d}+\frac{d^3}{a}\ge a^2+b^2+c^2+d^2$

$\frac{a^3}{b}+ab\ge 2a^2,\ \frac{b^3}{c}+bc\ge 2b^2,\frac{c^3}{d}+cd\ge 2c^2,\frac{d^3}{a}+da\ge 2d^2$

Suy ra: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{d}+\frac{d^3}{a}\ge a^2+b^2+c^2+d^2+(a^2+b^2+c^2+d^2)-(ab+bc+cd+da)$

Mà $a^2+b^2+c^2+d^2\ge ab+bc+cd+da$ nên bài toán được CM.

b) Cho $a>0,b>0,c>0,d>0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^4}{b^2}+\frac{b^4}{c^2}+\frac{c^4}{d^2}+\frac{d^4}{a^2}\ge\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{d}+\frac{d^3}{a}$

$\frac{a^4}{b^2}+a^2\ge\frac{2a^3}{b},\frac{b^4}{c^2}+b^2\ge\frac{2b^3}{c},\frac{c^4}{d^2}+c^2\ge\frac{2c^3}{d},\frac{d^4}{a^2}+d^2\ge\frac{2d^3}{a}$

Suy ra: $\frac{a^4}{b^2}+\frac{b^4}{c^2}+\frac{c^4}{d^2}+\frac{d^4}{a^2}\ge\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{d}+\frac{d^3}{a}+\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{d}+\frac{d^3}{a}\right)-\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)$

Do kết quả câu a): $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{d}+\frac{d^3}{a}\ge a^2+b^2+c^2+d^2$. Suy ra kết quả cần CM.

Câu 23. Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn $x^2+y^2+z^2=12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^3}}.$$

LG

Áp dụng AM – GM, ta có

$$1+x^3=(1+x)(1-x+x^2)\le\frac{\left(1+x+1-x+x^2\right)^2}{4}=\frac{\left(2+x^2\right)^2}{4}$$

Tương tự

$$\frac{1}{\sqrt{1+y^3}}\ge\frac{2}{2+y^2};\frac{1}{\sqrt{1+z^3}}\ge\frac{2}{2+z^2}$$

Vậy

$$P=\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^3}}+\frac{1}{\sqrt{1+z^3}}\ge\frac{2}{2+x^2}+\frac{2}{2+y^2}+\frac{2}{2+z^2}$$

Áp dụng Cauchy – Swarzt, ta được: $P\ge\frac{18}{x^2+y^2+z^2+6}=1$

Dấu '=' xảy ra khi $x=y=z=2$

Vậy GTNN của biểu thức là P = 1.

Câu 24. Cho a, b và c là các số không âm. Chứng minh rằng:

$$a^4+b^4+c^4\ge\left(\frac{a+2b}{3}\right)^4+\left(\frac{b+2c}{3}\right)^4+\left(\frac{c+2a}{3}\right)^4$$

LG:

Với x, y, z là ba số không âm. Ta có: $\frac{x^4+y^4+z^4}{3}\ge\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^4$

Suy ra: $\frac{a^4+2b^4}{3}\ge\left(\frac{a+2b}{3}\right)^4$; $\frac{b^4+2c^4}{3}\ge\left(\frac{b+2c}{3}\right)^4$ và $\frac{c^4+2a^4}{3}\ge\left(\frac{c+2a}{3}\right)^4$

Suy ra $a^4+b^4+c^4 \geq \left(\dfrac{a+2b}{3}\right)^4+\left(\dfrac{b+2c}{3}\right)^4+\left(\dfrac{c+2a}{3}\right)^4$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c,

Câu 25. Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện: $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a}{b^2+c^2}+\dfrac{b}{c^2+a^2}+\dfrac{c}{a^2+b^2}$.

LG

Ta có: $a^3+1+1 \geq 3a \Leftrightarrow a\left(3-a^2\right) \leq 2$

Suy ra $\dfrac{a}{3-a^2} \geq \dfrac{1}{2}a^2$

Tương tự: $\dfrac{b}{3-b^2} \geq \dfrac{1}{2}b^2; \dfrac{c}{3-c^2} \geq \dfrac{1}{2}c^2$

Suy ra $\dfrac{a}{3-a^2}+\dfrac{b}{3-b^2}+\dfrac{c}{3-c^2} \geq \dfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)=\dfrac{3}{2}$. Suy ra $P \geq \dfrac{3}{2}$

$P=\dfrac{3}{2}$ khi $a=b=c=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{3}{2}$