

**PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL**  
**TÌM HÌNH CHIẾU VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN**

**I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG**

**1. Hình chiếu vuông góc của một điểm đến một mặt phẳng**

- Cho điểm  $M(x_0; y_0; z_0)$  và mặt phẳng  $(P): Ax + By + Cz + D = 0$  thì hình chiếu vuông góc  $H$  của  $M$  trên mặt phẳng  $(P)$  là giao điểm của đường thẳng  $\Delta$  và mặt phẳng  $(P)$
- $\Delta$  là đường thẳng qua  $M$  và vuông góc với  $(P)$  ( $\Delta$  nhận  $\vec{n}_P$  làm  $\vec{u}_\Delta$ )

**2. Hình chiếu vuông góc của một điểm đến một đường thẳng**

- Cho điểm  $M(x_0; y_0; z_0)$  và đường thẳng  $d: \frac{x-x_N}{a} = \frac{y-y_N}{b} = \frac{z-z_N}{c}$  thì hình chiếu vuông góc của  $M$  lên đường thẳng  $d$  là điểm  $H$  thuộc  $d$  sao cho  $\vec{MH} \perp \vec{u}_d \Leftrightarrow \vec{MH} \cdot \vec{u}_d = 0$

**3. Hình chiếu vuông góc của một đường thẳng đến một mặt phẳng**

- Cho đường thẳng  $d$  và mặt phẳng  $(P)$ . Hình chiếu vuông góc của đường thẳng  $d$  đến mặt phẳng  $(P)$  là giao điểm của mặt phẳng  $(\alpha)$  và mặt phẳng  $(P)$
- $(\alpha)$  là mặt phẳng đi chứa  $d$  và vuông góc với  $(P)$
- $(\alpha)$  nhận  $\vec{u}_d$  và  $\vec{n}_P$  là cặp vectơ chỉ phương
- $(\alpha)$  chứa mọi điểm nằm trong đường thẳng  $d$

**4. Lệnh Caso**

- Lệnh đăng nhập môi trường vecto MODE 8
- Nhập thông số vecto MODE 8 1 1
- Tính tích vô hướng của 2 vecto : vectoA SHIFT 5 7 vectoB
- Tính tích có hướng của hai vecto : vectoA x vectoB
- Lệnh giá trị tuyệt đối SHIFT HYP
- Lệnh tính độ lớn một vecto SHIFT HYP
- Lệnh dò nghiệm của bất phương trình MODE 7
- Lệnh dò nghiệm của phương trình SHIFT SOLVE

**II) VÍ DỤ MINH HỌA**

**VD1-[Thi thử Sở GD-ĐT tỉnh Hà Tĩnh lần 1 năm 2017]**

Cho mặt phẳng  $(\alpha): 3x - 2y + z + 6 = 0$  và điểm  $A(2; -1; 0)$ . Hình chiếu vuông góc của  $A$  lên mặt phẳng  $(\alpha)$  có tọa độ

A.  $(2; -2; 3)$     B.  $(1; 1; -2)$     C.  $(1; 0; 3)$     D.  $(-1; 1; -1)$

**GIẢI**

➤ Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $(\alpha) \Rightarrow$  Đường thẳng  $AH$  song song với

$$\text{vectơ pháp tuyến } \vec{n}_\alpha(3; -2; 1) \text{ của } (\alpha) \Rightarrow (AH): \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Tọa độ điểm  $A(2 + 3t; -1 - 2t; 1 + t)$

(Phần này ta để dành nhằm được mà không cần nháp)

- Để tìm  $t$  ta chỉ cần thiết lập điều kiện  $A$  thuộc  $(\alpha)$  là xong

$$3(2+3Q) - 2(p-1-p+2Q) + Q = 0$$

$$\begin{array}{l} 3(2+3X) - 2(-1-2X) \\ X = -1 \\ L-R = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow t = -1 \Rightarrow H(-1; 1; -1)$$

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là **D**

### VD2-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Phú Thọ năm 2017]

Tìm tọa độ của điểm  $M'$  đối xứng với điểm  $M(3; 3; 3)$  qua mặt phẳng  $(P): x + y + z - 1 = 0$

A.  $M'(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$       B.  $M'(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3})$

C.  $M'(-\frac{7}{3}; -\frac{7}{3}; -\frac{7}{3})$       D.  $M'(\frac{7}{3}; \frac{7}{3}; \frac{7}{3})$

### GIẢI

- Tương tự ví dụ 1 ta nhằm được tọa độ hình chiếu vuông góc  $H$  của  $M$  lên  $(P)$  là  $M(3+t; 3+t; 3+t)$

- Tính  $t$  bằng Casio.

$$3 + Q + 3 + Q + 3 + Q - 1 = 0$$

$$\begin{array}{l} 3+X+3+X+3+X-1 \\ X = -2.666666667 \\ L-R = 0 \end{array}$$

$$\text{Ta thu được } t = -\frac{8}{3} \Rightarrow H(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$$

- Vì  $A'$  đối xứng với  $M$  qua  $H$  nên  $H$  là trung điểm của  $MM'$ . Theo quy tắc trung điểm ta suy ra được  $M'(-\frac{7}{3}; -\frac{7}{3}; -\frac{7}{3})$ .

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là **C**

### VD3-[Thi thử THPT Quảng Xương – Thanh Hóa lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$  và điểm

$M(1; 2; -3)$ . Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm  $M$  lên đường thẳng  $d$  là:

A.  $H(1; 2; -1)$  B.  $H(1; -2; -1)$  C.  $H(-1; -2; -1)$  D.  $H(1; 2; 1)$

### GIẢI

- Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  lên đường thẳng  $d$ .

$$\text{Đường thẳng } d \text{ có phương trình tham số } \begin{cases} x = 3+t \\ y = -1+t \\ z = 1+2t \end{cases} \Rightarrow \text{Tọa độ}$$

$$H(3+2t; -1+t; 1+2t)$$

$$MH \perp d \Rightarrow \overline{MH} \cdot \overline{u_d} = 0 \text{ với } \overline{u_d}(2;1;2)$$

➤ Sử dụng máy tính Casio bấm :

$$2(3+2Q) + (P+Q) + 2(1+2Q) = 0$$

$$\begin{array}{l} 2(3+2X-1) + (-1+X) = 0 \\ X = -1 \\ \text{L-R} = 0 \end{array}$$

$$\text{Khi đó } t = -1 \Rightarrow H(1; -2; -1)$$

⇒ Đáp số chính xác là **B**

**VD4-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho đường thẳng  $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$  và điểm

$A(2; -1; 1)$ . Gọi  $I$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $d$ . Viết phương trình mặt cầu  $(C)$  có tâm  $I$  và đi qua  $A$

A.  $x^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 20$

B.  $x^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 5$

C.  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 20$

D.  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 14$

**GIẢI**

➤ Điểm  $I$  có tọa độ  $I(1-t; 2+t; -1+t)$

➤ Thiết lập điều kiện vuông góc  $\Leftrightarrow \overline{IA} \cdot \overline{u_d} = 0$

$$-1(1-X-2) + (2+X) = 0$$

$$\begin{array}{l} -1(1-X-2) + (2+X) = 0 \\ X = 0 \\ \text{L-R} = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow t = 0 \Rightarrow I(1; 2; -1)$$

➤ Với  $I(1; 2; -1)$  và  $A(2; -1; 1)$  ta có :  $R^2 = IA^2 = |\overline{IA}|^2 = 14$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 14$$

**Ans<sup>2</sup>**

**14**

⇒ Đáp số chính xác là **D**

**VD5-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 1 năm 2017]**

Cho đường thẳng  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$ . Hình chiếu vuông góc của  $d$  lên mặt phẳng

$(Oxy)$  là :

$$\text{A. } \begin{cases} x=0 \\ y=-1-t \\ z=0 \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=0 \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} x=-1+2t \\ y=1+t \\ z=0 \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+t \\ z=0 \end{cases}$$

**GIẢI**

- Ta hiểu : Hình chiếu vuông góc  $d'$  của  $d$  lên mặt phẳng  $(Oxy)$  là giao tuyến của mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa  $d$  vuông góc với  $(Oxy)$  và mặt phẳng  $(Oxy)$
- Mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa  $d$  và vuông góc với  $(Oxy)$  nên nhận vecto chỉ phương  $\vec{u}(2;1;1)$  của đường thẳng  $d$  và vecto pháp tuyến  $\vec{n}_{Oxy}(0;0;1)$  là cặp vecto chỉ phương

$$\Rightarrow \vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d; \vec{n}_{Oxy}] = (1; -2; 0)$$

$$\begin{matrix} w & 8 & 1 & 1 & 2 & = & 1 & = & 1 & = & w & 8 & 2 & 1 & 0 & = & 0 & = & 1 & = & W \\ q & 5 & 3 & 0 & q & 5 & 4 & = & \end{matrix}$$

Vectơ  
Ans [            -2 0 ]

**1**

Hơn nữa  $(\alpha)$  đi qua điểm có tọa độ  $(1; -1; 2)$  nên có phương trình :

$$(\alpha): 1(x-1) - 2(y+1) + 0(z-2) = 0 \Leftrightarrow (\alpha): x - 2y - 3 = 0$$

- Phương trình của  $d'$  có dạng  $\begin{cases} (\alpha): x - 2y - 3 = 0 \\ (Oxy): z = 0 \end{cases}$ . Chuyển sang dạng tham số ta có :

$$\vec{u}_{d'} = [\vec{n}_{Oxy}; \vec{n}_\alpha] = (-2; -1; 0)$$

$$\begin{matrix} w & 8 & 1 & 1 & 1 & = & p & 2 & = & 0 & = & w & 8 & 2 & 1 & 0 & = & 0 & = & 1 & = & W \\ W & q & 5 & 3 & 0 & q & 5 & 4 & = & \end{matrix}$$

Vectơ  
Ans [            -1 0 ]

**-2**

Có 3 đáp án thỏa mãn vecto chỉ phương có tọa độ  $(-2; -1; 0)$  là **B, C, D**

Tuy nhiên chỉ có đáp án **B** chứa điểm  $M(1; -1; 0)$  và điểm này cũng thuộc  $d'$

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là **B**

**VD6-[Câu 61 Sách bài tập hình học nâng cao 12]**

Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng  $d$  :

$$\begin{cases} x = \frac{7}{2} + 3t \\ y = -2t \\ z = -2t \end{cases} \text{ trên}$$

$$(\alpha): x + 2y - 2z - 2 = 0$$

$$\text{A. } \frac{x-5}{-4} = \frac{y+\frac{3}{2}}{2} = \frac{z}{1}$$

$$\text{B. } \frac{x+5}{-4} = \frac{y-\frac{3}{2}}{2} = \frac{z}{1}$$

$$C. 2 \frac{x-5}{4} = \frac{y+\frac{3}{2}}{2} = \frac{z}{1} \quad D. \frac{x+5}{4} = \frac{y-\frac{3}{2}}{2} = \frac{z}{1}$$

**GIẢI**

- Lập phương trình mặt phẳng  $(\beta)$  chứa  $d$  và vuông góc với  $(\alpha)$

$$\vec{n}_\beta = [\vec{u}_d; \vec{n}_\alpha] = (8; 4; 8)$$

$$w \ 8 \ 1 \ 1 \ 3 = p \ 2 = p \ 2 = w \ 8 \ 2 \ 1 \ 1 = 2 = p \ 2 =$$

$$W \ q \ 5 \ 3 \ 0 \ q \ 5 \ 4 =$$

$$\vec{n}_\beta = (8; 4; 8)$$

$(\beta)$  đi qua điểm  $\left(\frac{7}{2}; 0; 0\right)$  nên có phương trình

$$8\left(x - \frac{7}{2}\right) + 8y + 8z = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + 2z - 7 = 0$$

- Ta có  $d'$ :  $\begin{cases} 2x + 2y + 2z - 7 = 0 \\ x + 2y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$

Tính  $\vec{n}_{d'} = [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_\beta] = (-8; 6; 2) \Rightarrow \vec{n}(-4; 3; 2)$  cũng là vectơ chỉ phương của  $d'$

Đường thẳng  $d'$  lại đi qua điểm  $\left(5; -\frac{3}{2}; 0\right)$  nên có phương trình:  $\frac{x-5}{-4} = \frac{y+\frac{3}{2}}{2} = \frac{z}{1}$

$\Rightarrow$  Đáp án chính xác là **A**

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

#### **Bài 1-[Thi thử THPT Phạm Văn Đồng lần 1 năm 2017]**

Hình chiếu vuông góc của  $A(-2; 4; 3)$  lên mặt phẳng  $(P): 2x - 3y + 6z + 19 = 0$  có tọa độ là:

A.  $(1; -1; 2)$     B.  $\left(-\frac{20}{7}; \frac{37}{7}; \frac{3}{7}\right)$     C.  $\left(-\frac{2}{5}; \frac{37}{5}; \frac{31}{5}\right)$     D. Kết quả khác

#### **Bài 2-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxy$  cho mặt phẳng  $(P): x + y - z - 4 = 0$  và điểm

$M(1; -2; -2)$ . Tìm tọa độ điểm  $N$  đối xứng với điểm  $M$  qua mặt phẳng  $(P)$

A.  $N(3; 4; 8)$     B.  $N(3; 0; -4)$     C.  $N(3; 0; 8)$     D.  $N(3; 4; -4)$

#### **Bài 3-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 1 năm 2017]**

Cho  $A(5; 1; 3), B(-5; 1; -1), C(1; -3; 0), D(3; -6; 2)$ . Tọa độ của điểm  $A'$  đối xứng với  $A$  qua mặt phẳng  $(BCD)$  là:

A.  $(-1; 7; 5)$     B.  $(1; 7; 5)$     C.  $(1; -7; -5)$     D.  $(1; -7; 5)$

#### **Bài 4-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho đường thẳng  $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{3}$  và mặt phẳng  $(P): -x+y+2z+3=0$ . Viết phương trình hình chiếu vuông góc của  $d$  trên mặt phẳng  $(P)$ .

- A.  $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-3}$       B.  $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$   
 C.  $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$       D.  $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-3}$

**Bài 5-[Câu 75 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]**

Cho ba điểm  $A(-1;3;2), B(4;0;-3), C(5;-1;4)$ . Tìm tọa độ hình chiếu  $H$  của  $A$  lên đường thẳng  $BC$

- A.  $\left(\frac{77}{17}; -\frac{9}{17}; \frac{12}{17}\right)$       B.  $\left(\frac{77}{17}; \frac{9}{17}; \frac{12}{17}\right)$       C.  $\left(\frac{77}{17}; -\frac{9}{17}; -\frac{12}{17}\right)$       D.  $\left(-\frac{77}{17}; -\frac{9}{17}; -\frac{12}{17}\right)$

**Bài 6-[Câu 76 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]**

Tìm tọa độ điểm đối xứng của  $M(-3;1;-1)$  qua đường thẳng  $d$  là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(\alpha): 4x-3y-13=0$  và  $(\beta): y-2z+5=0$

- A.  $(-2; -5; -3)$       B.  $(2; -5; 3)$       C.  $(5; -7; -3)$       D.  $(5; -7; 3)$

**Bài 7-[Câu 22 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]**

Cho đường thẳng  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$ . Hình chiếu vuông góc của  $d$  trên mặt phẳng tọa độ  $(Oxy)$  là:

- A.  $\begin{cases} x=0 \\ y=-1-t \\ z=0 \end{cases}$       B.  $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=0 \end{cases}$       C.  $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=1+t \\ z=0 \end{cases}$       D.  $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+t \\ z=0 \end{cases}$

**LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Bài 1-[Thi thử THPT Phạm Văn Đồng lần 1 năm 2017]**

Hình chiếu vuông góc của  $A(-2;4;3)$  lên mặt phẳng  $(P): 2x-3y+6z+19=0$  có tọa độ là:

- A.  $(1; -1; 2)$       B.  $\left(-\frac{20}{7}; \frac{37}{7}; \frac{3}{7}\right)$       C.  $\left(-\frac{2}{5}; \frac{37}{5}; \frac{31}{5}\right)$       D. Kết quả khác

**GIẢI**

- Đường thẳng  $\Delta$  chứa  $A$  và vuông góc với  $(P)$  có phương trình: 
$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 4 - 3t \\ z = 3 + 6t \end{cases}$$

Điểm  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $(P)$  nên có tọa độ  $H(-2+2t; 4-3t; 3+6t)$

- Tính  $t$  bằng Casio

$$2(p^2 + 2q) + p^3(4p^3q) + 6(3 + 6q) + 19qr - 1 = 0$$

$$2(-2+2X)-3(4-3X) \\ X = -0.428571428 \\ L-R = 0$$

Chuyển  $t$  về dạng phân thức  $\frac{J}{z} =$

Ans  $\rightarrow A$

$$-\frac{3}{7}$$

Vậy  $t = -\frac{3}{7} \Rightarrow H\left(-\frac{20}{7}; \frac{37}{7}; \frac{3}{7}\right)$

Vậy đáp số chính xác là **B**

**Bài 2-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxy$  cho mặt phẳng  $(P): x + y - z - 4 = 0$  và điểm

$M(1; -2; -2)$ . Tìm tọa độ điểm  $N$  đối xứng với điểm  $M$  qua mặt phẳng  $(P)$

- A.  $N(3; 4; 8)$  B.  $N(3; 0; -4)$  C.  $N(3; 0; 8)$  D.  $N(3; 4; -4)$

**GIẢI**

▪ Phương trình  $\Delta: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2+t \\ z = -2-t \end{cases} \Rightarrow$  Tọa độ hình chiếu  $H(1+t; -2+t; -2-t)$

▪ Tìm  $t$  bằng Casio ta được  $t = 1$

$$1 + X - 2 + X - (-2 - X) - 4 = 0$$

$$1 + X - 2 + X - (-2 - X) - 4 \\ X = 1 \\ L-R = 0$$

Với  $t = 1 \Rightarrow H(2; -1; -3) \Rightarrow N(3; 0; -4)$

$\Rightarrow$  Đáp án chính xác là **B**

**Bài 3-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 1 năm 2017]**

Cho  $A(5; 1; 3), B(-5; 1; -1), C(1; -3; 0), D(3; -6; 2)$ . Tọa độ của điểm  $A'$  đối xứng với  $A$  qua mặt phẳng  $(BCD)$  là :

- A.  $(-1; 7; 5)$  B.  $(1; 7; 5)$  C.  $(1; -7; -5)$  D.  $(1; -7; 5)$

**GIẢI**

▪ Tính vecto chỉ phương của  $(BCD) : \vec{u} = [\vec{BC}; \vec{BD}] = (-5; -10; -10)$

$$\begin{vmatrix} w & 8 & 1 & 1 & 1 \\ p & p & 5 & = & p & 3 & p & 1 & = & 0 & p & p & 1 & = \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} w & 8 & 2 & 1 & 3 \\ p & p & 5 & = & p & 6 & p & 1 & = & 2 & p & p & 1 & = \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} W & q & 5 & 3 & 0 \\ q & 5 & 4 & = & \end{vmatrix}$$

Ans  $\rightarrow$   $[-5 \quad -10 \quad -10]$

$$-5$$

$(BCD)$  qua  $B(-5; 1; -1) \Rightarrow (BCD): -5(x+5) - 10(y-1) - 10(z+1) = 0$

$$\Leftrightarrow x + 2y + 2z + 5 = 0$$

- Gọi  $H$  là hình chiếu của  $A$  lên  $(BCD) \Rightarrow H(5+t; 1+2t; 3+2t)$ . Tính  $t$

$$5 + X + 2(1 + 2X) + 2(3 + 2X) = 0$$

$$X = -2$$

$$\Rightarrow t = -2 \Rightarrow H(3; -3; -1) \Rightarrow A'(1; -7; -5)$$

$\Rightarrow$  Đáp án chính xác là C

**Bài 4-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]**

Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho đường thẳng  $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{3}$  và mặt phẳng  $(P): -x + y + 2z + 3 = 0$ . Viết phương trình hình chiếu vuông góc của  $d$  trên mặt phẳng  $(P)$ .

- A.  $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-3}$
- B.  $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$
- C.  $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$
- D.  $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-3}$

**GIẢI**

- Lập mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa  $d$  và vuông góc với  $(P) \Rightarrow \vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d; \vec{n}_P] = (1; -7; 4)$

$$\vec{n}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$(\alpha): (x+1) - 7y + 4(z+2) = 0 \Leftrightarrow x - 7y + 4z + 9 = 0$$

- Đường thẳng  $d$  có phương trình tổng quát  $\begin{cases} x - 7y + 4z + 9 = 0 \\ -x + y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$ . Để so sánh kết quả ta phải chuyển phương trình đường thẳng  $d$  về dạng chính tắc

Ta có:  $\vec{u}_d = [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_P] = (-18; -6; -6) \Rightarrow \vec{u}(3; 1; 1)$  cũng là vecto chỉ phương của  $d$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hơn nữa điểm  $M(2; 1; -1)$  cũng thuộc  $d \Rightarrow$  Phương trình chính tắc  $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là C

**Bài 5-[Câu 75 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]**



Cho ba điểm  $A(-1;3;2), B(4;0;-3), C(5;-1;4)$ . Tìm tọa độ hình chiếu  $H$  của  $A$  lên đường thẳng  $BC$

- A.  $(\frac{77}{17}; -\frac{9}{17}; \frac{12}{17})$     B.  $(\frac{77}{17}; \frac{9}{17}; \frac{12}{17})$     C.  $(\frac{77}{17}; -\frac{9}{17}; -\frac{12}{17})$     D.  $(-\frac{77}{17}; -\frac{9}{17}; -\frac{12}{17})$

**GIẢI**

- Đường thẳng  $BC$  nhận vecto  $\overrightarrow{BC}(1; -1; 7)$  là vecto chỉ phương và đi qua điểm  $B(4;0;-3)$

$$\Rightarrow BC: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -t \\ z = -3 + 7t \end{cases}$$

Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $BC \Rightarrow H(4+t; -t; -3+7t)$

- Mặt khác  $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ .

$$(4+t-(-1)) + (-t-3)(-1) + (-3+7t-2)(7) = 0$$

$$(4+x-(-1)) - (-x-3) + (-3-2+7t)(7) = 0$$

$$x = 0.5294117647$$

$$L-R = 0$$

Chuyển  $t$  về dạng phân số  $q$

Ans → A

$$\frac{9}{17}$$

$$\Rightarrow t = \frac{9}{17} \Rightarrow H\left(\frac{77}{17}; -\frac{9}{17}; \frac{12}{17}\right)$$

⇒ Đáp số chính xác là A

**Bài 6-[Câu 76 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]**

Tìm tọa độ điểm đối xứng của  $M(-3;1;-1)$  qua đường thẳng  $d$  là giao tuyến của hai mặt phẳng  $(\alpha): 4x-3y-13=0$  và  $(\beta): y-2z+5=0$

- A.  $(-2; -5; -3)$     B.  $(2; -5; 3)$     C.  $(5; -7; -3)$     D.  $(5; -7; 3)$

**GIẢI**

- $d$  là giao tuyến của 2 mặt phẳng  $(\alpha); (\beta)$  nên có phương trình tổng quát:  $\begin{cases} 4x-3y-13=0 \\ y-2z+5=0 \end{cases}$

- Vecto chỉ phương của  $d$  là  $\vec{u}_d = [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_\beta] = (6; 8; 4) \Rightarrow$  nhận  $\vec{u}(3; 4; 2)$  là vecto chỉ phương

$$w \begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 = p \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = w$$

Ans → B

Đường thẳng  $d$  có vecto đi qua điểm  $N(4;1;3)$  nên có phương trình tham số  $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

- Điểm  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  lên đường thẳng  $d$  nên có tọa độ  $M(4+3t; 1+4t; 3+2t)$

Mặt khác  $\overline{MH} \perp d \Rightarrow \overline{MH} \cdot \vec{u} = 0$

$$w \ 1 \ 3 \ ( \ 4 \ + \ 3 \ Q \ ) \ p \ p \ 3 \ ) \ + \ 4 \ ( \ 1 \ + \ 4 \ Q \ ) \ p \ 1 \ ) \\ + \ 2 \ ( \ 3 \ + \ 2 \ Q \ ) \ p \ p \ 1 \ ) \ q \ r \ 1 \ =$$

$$3(4+3x-3)+4(1+4x-3)+2(3+2x-1)=0 \\ x = -1 \\ \text{L-R} = -1$$

$$\Rightarrow t = -1 \Rightarrow H(1; -3; 1)$$

$M'$  đối xứng  $M$  qua  $d$  vậy  $H$  là trung điểm  $MM' \Rightarrow M'(5; -7; 3)$

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là **D**

### **Bài 7-[Câu 22 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]**

Cho đường thẳng  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$ . Hình chiếu vuông góc của  $d$  trên mặt phẳng tọa độ  $(Oxy)$  là:

A.  $\begin{cases} x=0 \\ y=-1-t \\ z=0 \end{cases}$  B.  $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=0 \end{cases}$  C.  $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=1+t \\ z=0 \end{cases}$  D.  $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+t \\ z=0 \end{cases}$

**GIẢI**

- Dung mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa đường thẳng  $d$  và vuông góc với

$$(Oxy) \Rightarrow \vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d; \vec{n}_{Oxy}] = (1; -2; 0)$$

$$w \ 8 \ 1 \ 1 \ 2 \ = \ 1 \ = \ 1 \ = \ w \ 8 \ 2 \ 1 \ 0 \ = \ 0 \ = \ 1 \ = \ W \\ q \ 5 \ 3 \ 0 \ q \ 5 \ 4 \ =$$

Ans  $\boxed{\phantom{0000}}$   $\vec{u}_d$   $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

**1**

Mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa điểm  $N(1; -1; 2)$  nên có phương trình là:

$$(\alpha): (x-1) - 2(y+1) + 0(z-2) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 3 = 0$$

- Đường thẳng  $d'$  là hình chiếu vuông góc của đường thẳng  $d$  lên mặt phẳng  $(Oxy) \Rightarrow d'$  là

giao tuyến của  $(\alpha)$  và  $(Oxy) \Rightarrow d': \begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Tính  $\vec{u}_d = [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_{Oxy}] = (-2; -1; 0) \Rightarrow$  nhận  $\vec{u}(2; 1; 0)$  là vecto chỉ phương

$$w \ 8 \ 1 \ 1 \ 1 \ = \ p \ 2 \ = \ 0 \ = \ w \ 8 \ 2 \ 1 \ 0 \ = \ 0 \ = \ 1 \ = \ W \\ q \ 5 \ 3 \ 0 \ q \ 5 \ 4 \ =$$

---

$$\text{Ans } \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

VCT

-1

0]

-2

Lại có  $d'$  qua điểm có tọa độ  $(1; -1; 0) \Rightarrow d': \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$  Đáp số chính xác là **B**.