Thầy LÊ BÁ TRẦN PHƯƠNG

CHUẨN BỊ KÌ THI THPT QUỐC GIA NĂM 2019

Môn: Toán

CHỦ ĐỀ: SỬ DỤNG CASIO ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH SỐ PHỨC

Nguồn: Tổng hợp và sưu tầm

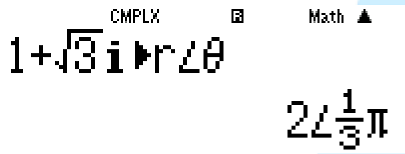
I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Chuyển số phức về dạng lượng giác

- **Dạng lượng giác của số phức** : Cho số phức z có dạng $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$ thì ta luôn có : $z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)$
- Lệnh chuyển số phức $z = a + bi$ về dạng lượng giác : Lệnh SHIFT 2 3

  Bước 1: Nhập số phức $z = a + bi$ vào màn hình rồi dùng lệnh SHIFT 2 3 (Ví dụ $z = 1 + \sqrt{3}i$)

  1 + s 3 $ b q 2 3 =



  Bước 2: Từ bảng kết quả ta đọc hiểu $r = 2$ và $\varphi = \frac{\pi}{3}$

II) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 1 = 0$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng :

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

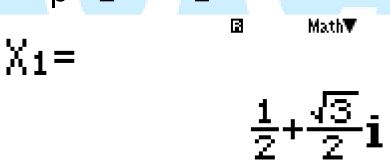
(Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 1 năm 2017)

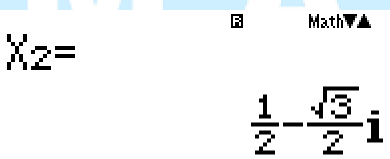
Lời giải:

❖ **Cách Casio**

➢ Tính nghiệm của phương trình bậc hai $z^2 - z + 1 = 0$ bằng chức năng MODE 5 3

w 5 3 1 = p 1 = 1 = =

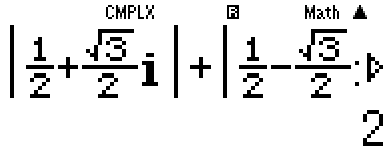




➢ Vậy ta được hai nghiệm $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ và $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Tính tổng Môđun của hai số phức trên ta lại dùng chức năng SHIFT HYP

w 2 q c a 1 R 2 $ + a s 3 R 2 $ b $

+ q c a 1 R 2 $ p a s 3 R 2 $ b =



$\Rightarrow |z_1| + |z_2| = 2$ ta thấy **B** là đáp án chính xác

VD2. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 2 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = z_1^{2016} + z_2^{2016}$:

A. 2^{1009} **B.** 0 **C.** 2^{2017} **D.** 2^{1008}

(Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017)

Lời giải:

❖ **Cách Casio 1**

➤ Tính nghiệm của phương trình bậc hai $z^2 + 2z + 2 = 0$ bằng chức năng MODE 5 3

w 5 3 1 = 2 = 2 = =

➤ Ta thu được hai nghiệm $z_1 = -1 + i$ và $z_2 = -1 - i$. Với các cụm đặc biệt $-1+i$, $-1-i$ ta có điều đặc biệt sau: $(-1+i)^4 = -4$, $(-1-i)^4 = -4$

w 2 (p 1 + b) ^ 4 =

Vậy $P = z_1^{2016} + z_2^{2016} = (-1+i)^{2016} + (-1-i)^{2016} = \left[(-1+i)^4\right]^{504} + \left[(-1-i)^4\right]^{504}$

$= (-4)^{504} + (-4)^{504} = 4^{504} + 4^{504} = 2^{1008} + 2^{1008} = 2.2^{1008} = 2^{1009}$

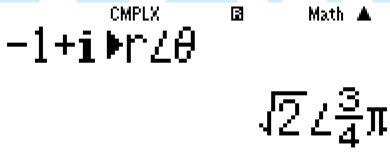
$P = z_1^{2016} + z_2^{2016} = 2^{1009}$ ta thấy **A** là đáp án chính xác

❖ **Cách Casio 2**

➤ Ngoài cách sử dụng tính chất đặc biệt của cụm $(-1 \pm i)^4$ ta có thể xử lý $-1 \pm i$ bằng cách đưa về dạng lượng giác bằng lệnh SHIFT 2 3

Với $z_1 = -1 + i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

p 1 + b q 2 3 =

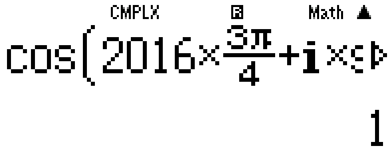


Ta nhận được $r = \sqrt{2}$ và góc $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$

$\Rightarrow z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow z_1^{2016} = \left(\sqrt{2}\right)^{2016}\left(\cos 2016.\dfrac{3\pi}{4} + i\sin 2016.\dfrac{3\pi}{4}\right)$

➤ Tính $\cos\left(2016.\dfrac{3\pi}{4}\right) + i.\sin\left(2016.\dfrac{3\pi}{4}\right)$

k 2 0 1 6 O a 3 q K R 4 $ + b O j 2 0 1 6 O a 3 q K R 4 $)) o =



$z_1^{2016} = \left(\sqrt{2}\right)^{2016} = 2^{1008}$

- Tương tự $z_2^{2016} = 2^{1008} \Rightarrow T = 2^{1009}$

VD3. Kí hiệu z_1, z_2, z_3 và z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 - z^2 - 12 = 0$. Tính tổng : $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$

A. $T = 4$ **B.** $T = 2\sqrt{3}$ **C.** $T = 4 + 2\sqrt{3}$ **D.** $T = 2 + 2\sqrt{3}$

(Đề minh họa bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017)

Lời giải:

❖ **Cách Casio**

- Để tính nghiệm của phương trình ta dùng chức năng MODE 5. Tuy nhiên máy tính chỉ tính được phương trình bậc 2 và 3 nên để tính được phương trình bậc 4 trùng phương $z^4 - z^2 - 12 = 0$ thì ta coi $z^2 = t$ khi đó phương trình trở thành $t^2 - t - 12 = 0$

w 5 3 1 = p 1 = p 1 2 = =

Vậy $\left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = -3 \end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} z^2 = 4 \\ z^2 = -3 \end{array}\right.$

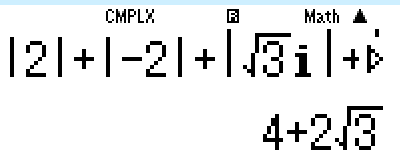
- Với $z^2 = 4 \Rightarrow z = \pm 2$
- Với $z^2 = -3$ ta có thể đưa về $z^2 = 3i^2 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{3}i$ với $i^2 = -1$. Hoặc ta có thể tiếp tục sử dụng chức năng MODE 5 cho phương trình $z^2 = -3 \Leftrightarrow z^2 + 3 = 0$

w 5 3 1 = 0 = 3 = =

Tóm lại ta sẽ có 4 nghiệm $z = \pm 1, z = \pm\sqrt{3}i$

- Tính T ta lại sử dụng chức năng tính môđun SHIFT HYP

w 2 q c 2 $ + q c p 2 $ + q c s 3 $ b $ + q c p s 3 $ b =



$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

VD4- Giải phương trình sau trên tập số phức : $z^3 + (i+1)z^2 + (i+1)z + i = 0$

A. $z = -i$ **B.** $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **C.** $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **D.** Cả **A**, **B**, **C** đều đúng

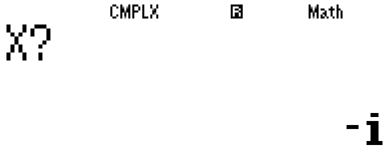
(Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 3 năm 2017)

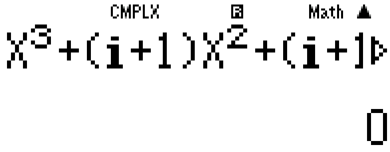
Lời giải:

❖ **Cách Casio**

➢ Để kiểm tra nghiệm của 1 phương trình ta sử dụng chức năng CALC

Q) ^ 3 $ + (b + 1) Q) d + (b + 1) Q) + b r p b =

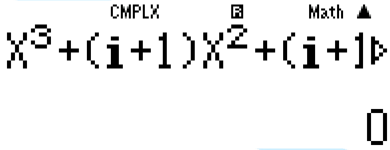




Vậy $z=-i$ là nghiệm

➢ Tiếp tục kiểm tra $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ nếu giá trị này là nghiệm thì cả đáp án **A** và **B** đều đúng có nghĩa là đáp án **D** chính xác. Nếu giá trị này không là nghiệm thì chỉ có đáp án **A** đúng duy nhất.

r p (1 P 2) + (s 3) P 2) b =



Vậy $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ tiếp tục là nghiệm có nghĩa là đáp án **A** và **B** đều đúng

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **D**

❖ **Cách tự luận**

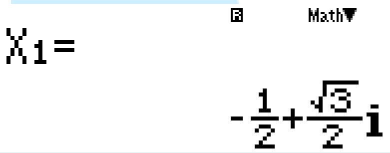
➢ Để giải phương trình số phức xuất hiện số i trong đó ta không thể sử dụng chức năng MODE 5 được mà phải tiến hành nhóm nhân tử chung

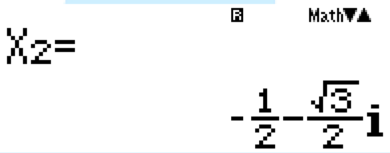
Phương trình $\Leftrightarrow z^3+z^2+z+\left(z^2+z+1\right)i=0$

$$\Leftrightarrow (z+i)\left(z^2+z+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-i \\ z^2+z+1=0 \end{array}\right.$$

➢ Phương trình $z^2+z+1=0$ không chứa số i nên ta có thể sử dụng máy tính Casio với chức năng giải phương trình MODE 5

w 5 3 1 = 1 = 1 = =





Tóm lại phương trình có 3 nghiệm $z=-i; z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i; z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\Rightarrow$ **D** là đáp án chính xác

VD5. Trong các phương trình dưới đây, phương trình nào có hai nghiệm $z_1=1+\sqrt{3}; z_2=1-\sqrt{3}$

A. $z^2+i\sqrt{3}z+1=0$ **B.** $z^2+2z+4=0$ **C.** $z^2-2z+4=0$ **D.** $z^2-2z-4=0$

(Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017)

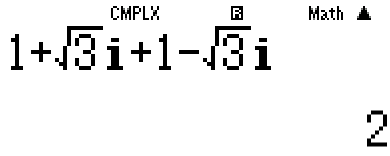
Lời giải:

➢ Ta hiểu phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ nếu có hai nghiệm thì sẽ tuân theo định lý Vi-et (kể cả trên tập số thực hay tập số phức)

$$\begin{cases} z_1+z_2=-\frac{b}{a} \\ z_1z_2=\frac{c}{a} \end{cases}$$

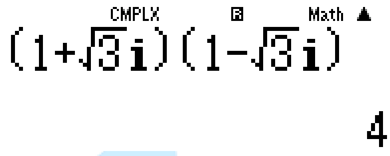
➢ Tính $z_1+z_2=2$

w 2 1 + s 3 $ b + 1 p s 3 $ b =



Tính $z_1z_2 = 4$

(1 + s 3 $ b) (1 p s 3 $ b) =



Rõ ràng chỉ có phương trình $z^2 - 2z + 4 = 0$ có $-\dfrac{b}{a} = 2$ và $\dfrac{c}{a} = 4$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

VD6. Phương trình $z^2 + iz + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm trong tập số phức :

A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** Vô số

(Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 1 năm 2017)

Lời giải:

- Ta phân biệt : Trên tập số thực phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ sẽ có hai nghiệm phân biệt nếu $\Delta > 0$, có hai nghiệm kép nếu $\Delta = 0$, vô nghiệm nếu $\Delta < 0$. Tuy nhiên trên tập số phức phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có 1 nghiệm duy nhất nếu $\Delta = 0$, có hai nghiệm phân biệt nếu $\left[\begin{array}{l}\Delta > 0\\ \Delta < 0\end{array}\right.$
- Vậy ta chỉ cần tính Δ là xong. Với phương trình $z^2 + iz + 1 = 0$ thì $\Delta = i^2 - 4 = -5$ là một đại lượng < 0 vậy phương trình trên có 2 nghiệm phân biệt

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

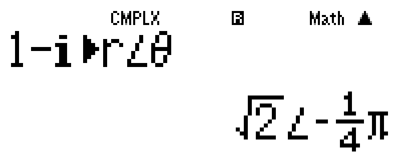
VD7. Phần thực của số phức z là bao nhiêu biết $z = \dfrac{(1-i)^{10}\left(\sqrt{3}+i\right)^5}{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{10}}$

A. $-1+i$ **B.** 1 **C.** $3-2i$ **D.** $2^5 i$

Lời giải:

- Để xử lý số phức bậc cao (>3) ta sử đưa số phức về dạng lượng giác và sử dụng công thức Moa-vơ . Và để dễ nhìn ta đặt $z = \dfrac{z_1^{10}.z_2^5}{z_3^{10}}$
- Tính $z_1 = 1 - i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Để tính r và φ ta lại sử dụng chức năng SHIF 2 3

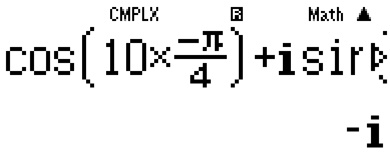
1 p b q 2 3 =



Vậy $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{-\pi}{4} + i\sin\dfrac{-\pi}{4}\right)$ $z_1^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos 10.\dfrac{-\pi}{4} + i\sin 10.\dfrac{-\pi}{4}\right)$

Tính $\cos 10.\dfrac{-\pi}{4} + i\sin 10.\dfrac{-\pi}{4}$

k 1 0 O a p q K R 4 $) + b j 1 0 O a p q K R 4 $) =



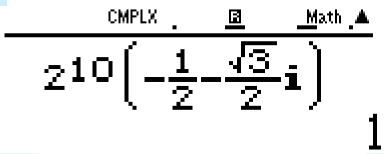
Vậy $z_1^{10} = \left(\sqrt{2}\right)^{10}.i = 2^5.i$

➤ Tương tự $z_2^5 = 2^5\left(\cos 5.\frac{\pi}{6} + i\sin 5.\frac{\pi}{6}\right) = 2^5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$z_3^{10} = 2^{10}\left(\cos 10.\frac{-2\pi}{3} + i\sin 10.\frac{-2\pi}{3}\right) = 2^{10}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

Tổng hợp $z = \frac{z_1^{10}.z_2^5}{z_3^{10}} = \frac{2^5 i.2^5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)}{2^{10}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}$

a 2 ^ 5 $ b O 2 ^ 5 $ (p a s 3 R 2 $ + a 1 R 2 $ b) R 2 ^ 1 0 $ (p a 1 R 2 $ p a s 3 R 2 $ b) =



Vậy $z = 1 \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

III) BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho phương trình $z^2 - 2z + 17 = 0$ có hai nghiệm phức z_1 và z_2 . Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ là :

A. $2\sqrt{17}$ **B.** $2\sqrt{13}$ **C.** $2\sqrt{10}$ **D.** $2\sqrt{15}$

(Thi thử chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa lần 2 năm 2017)

Bài 2. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính giá trị biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$

A. $2\sqrt{10}$ **B.** 20 **C.** $5\sqrt{2}$ **D.** $10\sqrt{3}$

(Đề thi toán Đại học – Cao đẳng khối A năm 2009)

Bài 3. Kí hiệu z_1, z_2, z_3 là nghiệm của phương trình $z^3 + 27 = 0$. Tính tổng $T = |z_1| + |z_2| + |z_3|$

A. $T = 0$ **B.** $T = 3\sqrt{3}$ **C.** $T = 9$ **D.** $T = 3$

(Thi thử Group Nhóm toán lần 5 năm 2017)

Bài 4. Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $2z^4 - 3z^2 - 2 = 0$. Tính tổng sau $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$

A. 5 **B.** $5\sqrt{2}$ **C.** $3\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{2}$

(Thi thử THPT Bảo Lâm – Lâm Đồng lần 1 năm 2017)

Bài 5. Xét phương trình $z^3 = 1$ trên tập số phức . Tập nghiệm của phương trình là :

A. $S=\{1\}$ **B.** $S=\left\{1;\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}\right\}$ **C.** $S=\left\{1;-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ **D.** $S=\left\{-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

(Thi thử THPT Bảo Lâm – Lâm Đồng lần 1 năm 2017)

Bài 6. Biết z là nghiệm của phương trình $z+\frac{1}{z}=1$. Tính giá trị biểu thức $P=z^{2009}+\frac{1}{z^{2009}}$

A. $P=1$ **B.** $P=0$ **C.** $P=-\frac{5}{2}$ **D.** $P=\frac{7}{4}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho phương trình $z^2-2z+17=0$ có hai nghiệm phức z_1 và z_2. Giá trị của $|z_1|+|z_2|$ là :

A. $2\sqrt{17}$ **B.** $2\sqrt{13}$ **C.** $2\sqrt{10}$ **D.** $2\sqrt{15}$

(Thi thử chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa lần 2 năm 2017)

Lời giải:

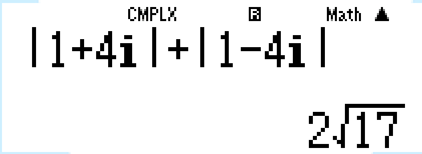
❖ **Cách Casio**

- Tìm hai nghiệm của phương trình $z^2-2z+17=0$

w 5 3 1 = p 2 = 1 7 = =

- Tính tổng hai môđun bằng lệnh SHIFT HYP

w 2 q c 1 + 4 b $ + q c 1 p 4 b =



Vậy $|z_1|+|z_2|=2\sqrt{17}\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài 2. Gọi z_1,z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+2z+10=0$. Tính giá trị biểu thức $A=|z_1|^2+|z_2|^2$

A. $2\sqrt{10}$ **B.** 20 **C.** $5\sqrt{2}$ **D.** $10\sqrt{3}$

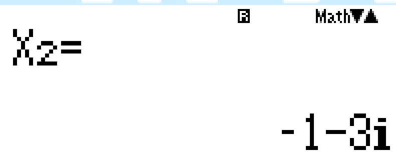
(Đề thi toán Đại học – Cao đẳng khối A năm 2009)

Lời giải:

❖ **Cách Casio**

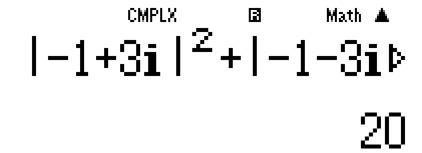
- Tìm hai nghiệm của phương trình $z^2+2z+10=0$

w 5 3 1 = 2 = 1 0 = =



- Tính tổng bình phương hai môđun bằng lệnh SHIFT HYP

w 2 q c p 1 + 3 b $ d + q c p 1 p 3 b $ d =



Vậy $A=|z_1|^2+|z_2|^2=20\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

Bài 3. Kí hiệu z_1, z_2, z_3 là nghiệm của phương trình $z^3 + 27 = 0$. Tính tổng $T = |z_1| + |z_2| + |z_3|$

A. $T = 0$ **B.** $T = 3\sqrt{3}$ **C.** $T = 9$ **D.** $T = 3$

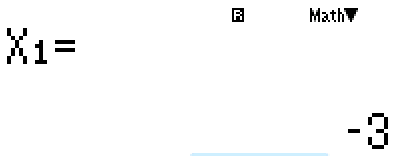
(Thi thử Group Nhóm toán lần 5 năm 2017)

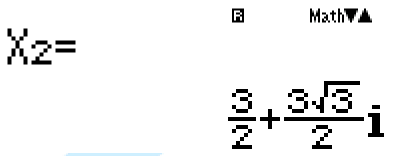
Lời giải:

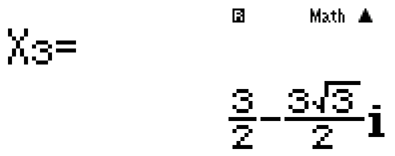
❖ **Cách Casio**

- Tính nghiệm của phương trình $z^3 + 27 = 0$ bằng chức năng MODE 5 4

w 5 4 1 = 0 = 0 = 2 7 = =



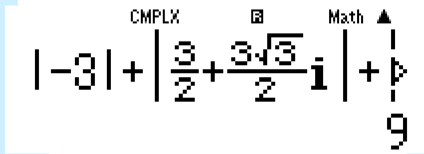




Vậy $z_1 = -3, z_2 = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i, z_3 = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

- Tính tổng môđun $T = |z_1| + |z_2| + |z_3|$

w 5 4 1 = 0 = 0 = 2 7 = = = = w 1 w 2
q c p 3 $ + q c a 3 R 2 $ + a 3 s 3 R 2
$ b $ + q c a 3 R 2 $ p a 3 s 3 R 2 $ b =



Vậy $T = 9 \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Bài 4. Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $2z^4 - 3z^2 - 2 = 0$. Tính tổng sau $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$

A. 5 **B.** $5\sqrt{2}$ **C.** $3\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{2}$

(Thi thử THPT Bảo Lâm – Lâm Đồng lần 1 năm 2017)

Lời giải:

❖ **Cách Casio**

- Đặt $t = z^2$. Tìm nghiệm của phương trình $2t^2 - 3t - 2 = 0$

w 5 3 2 = p 3 = p 2 = =

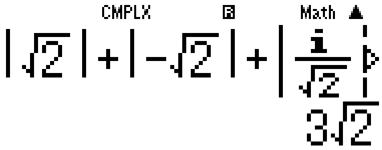
Vậy $\left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = 2 \\ z^2 = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

- Với $z^2 = 2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{2}$

Với $z^2 = \frac{-1}{2} \Rightarrow z^2 = \frac{i^2}{2} \Rightarrow z = \pm\frac{i}{\sqrt{2}}$

- Tính tổng môđun $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$

w 2 q c s 2 $ $ + q c p s 2 $ $ + q c a b
R s 2 $ $ $ + q c a p b R s 2 =



Vậy $T=3\sqrt{2} \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Bài 5. Xét phương trình $z^3=1$ trên tập số phức . Tập nghiệm của phương trình là :

A. $S=\{1\}$ **B.** $S=\left\{1;\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}\right\}$ **C.** $S=\left\{1;-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ **D.** $S=\left\{-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

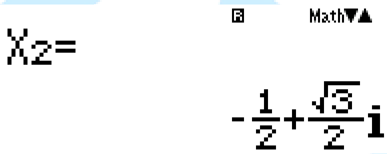
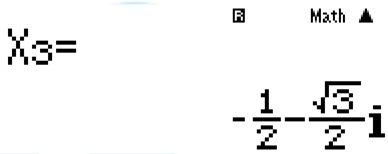
(Thi thử THPT Bảo Lâm – Lâm Đồng lần 1 năm 2017)

Lời giải:

❖ **Cách Casio**

- Giải phương trình bậc ba $z^3-1=0$ với chức năng MODE 54

w 5 4 1 = 0 = 0 = p 1 = =

- Phương trình có 3 nghiệm $x_1=1, x_2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i, x_3=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Bài 6. Biết z là nghiệm của phương trình $z+\dfrac{1}{z}=1$. Tính giá trị biểu thức $P=z^{2009}+\dfrac{1}{z^{2009}}$

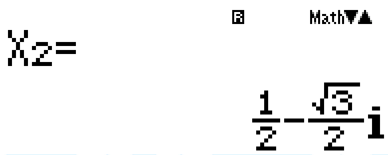
A. $P=1$ **B.** $P=0$ **C.** $P=-\dfrac{5}{2}$ **D.** $P=\dfrac{7}{4}$

Lời giải:

❖ **Cách Casio**

- Quy đồng phương trình $z+\dfrac{1}{z}=0$ ta được phương trình bậc hai $z^2-z+1=0$. Tính nghiệm phương trình này với chức năng MODE 5 3

w 5 3 1 = p 1 = 1 = =

- Ta thu được hai nghiệm z nhưng hai nghiệm này có vai trò như nhau nên chỉ cần lấy một nghiệm z đại diện là được

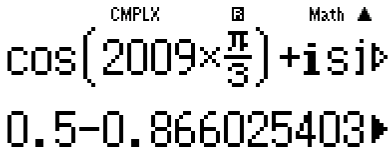
Với $z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ta chuyển về dạng lượng giác $\Rightarrow z=1\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

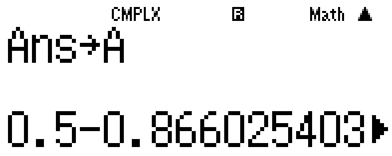
a 1 R 2 $ + a s 3 R 2 $ b q 2 3 =

Vậy $\Rightarrow z^{2009}=1^{2009}\left(\cos 2009.\dfrac{\pi}{3}+i\sin 2009.\dfrac{\pi}{3}\right)=\left(\cos 2009.\dfrac{\pi}{3}+i\sin 2009.\dfrac{\pi}{3}\right)$

Tính z^{2009} và lưu và biến A

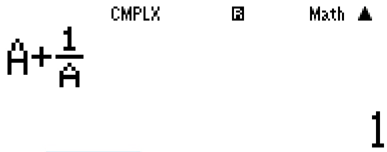
W k 2 0 0 9 O a q K R 3 $) + b j 2 0 0 9 O a q K R 3 $) = q J z





Tổng kết $P = A + \frac{1}{A} = 1$

Q z + a 1 R Q z =



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**