Thầy LÊ BÁ TRẦN PHƯƠNG

CHUẨN BỊ KÌ THI THPT QUỐC GIA NĂM 2019

Môn: Toán

CHỦ ĐỀ: DÙNG CASIO ĐỂ GIẢI NHANH CỰC TRỊ CỦA SỐ PHỨC

Nguồn: Sưu tầm

I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Bất đẳng thức thường gặp

- **Bất đẳng thức Bunhiacopxki** :Cho các số thực a,b,x,y ta luôn có

  $(ax+by)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2)$. Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x}=\frac{b}{y}$

- **Bất đẳng thức Vectơ** : Cho 2 vecto $\vec{u}(x;y)$ và $\vec{v}(x';y')$ ta luôn có $|\vec{u}|+|\vec{v}| \ge |\overrightarrow{u+v}|$

  $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x'^2+y'^2} \ge \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$

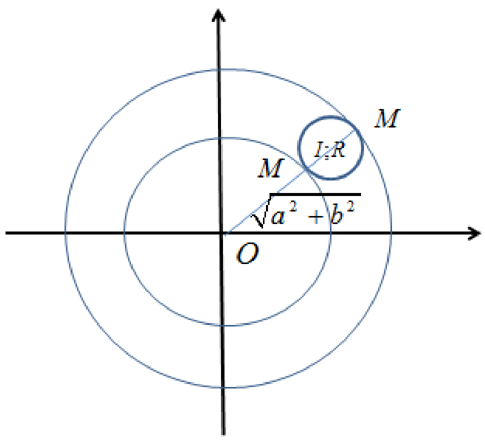
  Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}<0$

2. Phương pháp mẹo sử dụng sử tiếp xúc

- **Dạng 1**: Cho số phức z có tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) bán kính R. Với mỗi điểm M thuộc đường tròn (C) thì cũng thuộc đường tròn (C') tâm gốc tọa độ bán kính $OM=\sqrt{a^2+b^2}$.

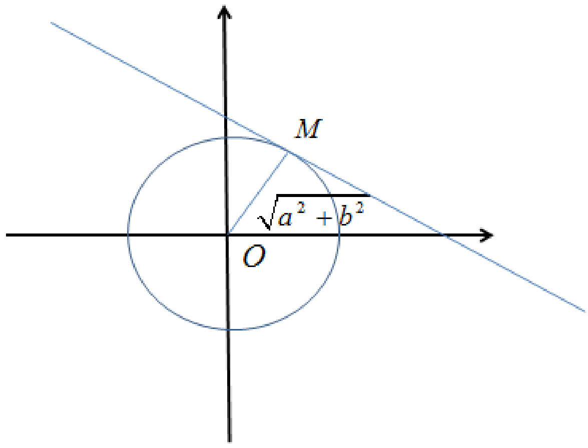
  +)Để $|z|$ lớn nhất thì OM lớn nhất đạt được khi đường tròn (C') tiếp xúc trong với đường tròn (C) và $OM=OI+R$

  +)Để $|z|$ nhỏ nhất thì OM nhỏ nhất đạt được khi đường tròn (C') tiếp xúc ngoài với đường tròn (C) và $OM=OI-R$



- **Dạng 2** : Cho số phức z có tập hợp các điểm biễu diễn số phức z là đường thẳng (d) . Với mỗi điểm M thuộc (d) thì cũng thuộc đường tròn (C')

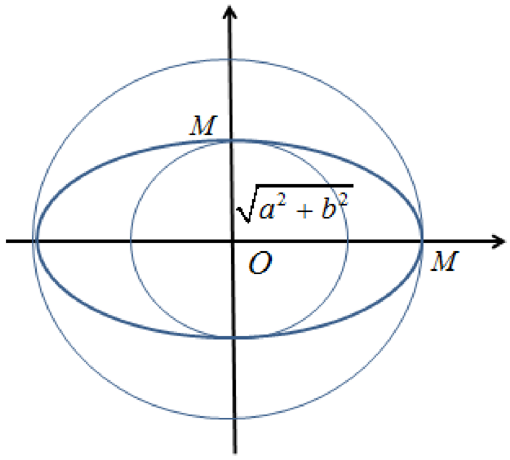
  +)Để $|z|$ nhỏ nhất thì OM nhỏ nhất khi đó OM vuông góc với (d) và $OM=d(O;(d))$



- **Dạng 3** : Cho số phức z có tập hợp các điểm biễu diễn số phức z là Elip có đỉnh thuộc trục lớn $A(a;0)$ và đỉnh thuộc trục nhỏ $B(0;b)$. Với mỗi điểm M thuộc (d) thì cũng thuộc đường tròn (E)

  +)Để $|z|$ lớn nhất thì OM lớn nhất khi đó M trùng với đỉnh thuộc trục lớn và
  $\max|z| = OM = OA$

  +)Để $|z|$ nhỏ nhất thì OM nhỏ nhất khi đó M trùng với đỉnh thuộc trục nhỏ và
  $\max|z| = OM = OB$



- **Dạng 4** : Cho số phức z có tập hợp các điểm biễu diễn số phức z là Hyperbol $(H):\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ có hai đỉnh thuộc trục thực $A'(-a;0), A(a;0)$ thì số phức z có môđun nhỏ nhất nếu điểm biểu diễn số phức z này trùng với các đỉnh trên. (môđun lớn nhất không tồn tại)

II) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Thi thử THPT Vĩnh Chân – Phú Thọ lần 1 năm 2017]

Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i| = |z-2i|$. Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

A. $z=-1+i$ **B.** $z=-2+2i$ **C.** $z=2+2i$ **D.** $z=3+2i$

GIẢI

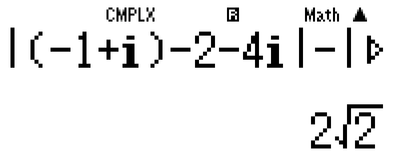
❖ **Cách Casio**

➢ Trong các số phức ở đáp án, ta sẽ tiến hành xắp xếp các số phức theo thứ tự môđun tăng dần : $|-1+i| < |-2+2i| = |2+2i| < |3+2i|$

- Tiếp theo sẽ tiến hành thử nghiệm từng số phức theo thứ tự môđun tăng dần, số phức nào thỏa mãn hệ thức điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$ đầu tiên thì là đúng

  Với $z=-1+i$ Xét hiệu : $|(-1+i)-2-4i|-|(-1+i)-2i|$

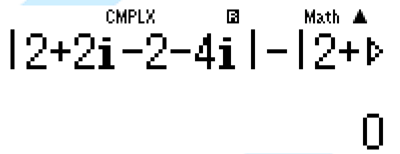
  q c (p 1 + b) p 2 p 4 b $ p q c p 1 + b p 2 b =



  Ra một giá trị khác 0 vậy $z=-1+i$ không thỏa mãn hệ thức. $\Rightarrow$ Đáp án **A** sai

- Tương tự như vậy với $z=2+2i$

  q c 2 + 2 b p 2 p 4 b $ p q c 2 + 2 b p 2 b =



  Vậy số phức $z=2+2i$ thỏa mãn hệ thức $\Rightarrow$ Đáp số **C** là đáp số chính xác

❖ **Cách mẹo**

Gọi số phức z có dạng $z=a+bi$. z thỏa mãn $|z-2-4i|=|z-2i|$

$\Leftrightarrow |a-2+(b-4)i|=|a+(b-2)i|$

$\Leftrightarrow (a-2)^2+(b-4)^2=a^2+(b-2)^2$

$\Leftrightarrow a^2-4a+4+b^2-8b+16=a^2+b^2-4b+4$

$\Leftrightarrow 4a+4b=16$

$\Leftrightarrow a+b-4=0$

Trong các đáp án chỉ có đáp án **C** thỏa mãn $a+b-4=0 \Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

❖ **Cách tự luận**

Gọi số phức z có dạng $z=a+bi$. z thỏa mãn $|z-2-4i|=|z-2i|$

$\Leftrightarrow |a-2+(b-4)i|=|a+(b-2)i|$

$\Leftrightarrow (a-2)^2+(b-4)^2=a^2+(b-2)^2$

$\Leftrightarrow a^2-4a+4+b^2-8b+16=a^2+b^2-4b+4$

$\Leftrightarrow 4a+4b=16$

$\Leftrightarrow a+b=4$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki :

$16=(a+b)^2 \le (1^2+1^2)(a^2+b^2) \Rightarrow |z|^2=a^2+b^2 \ge 8$

$\Rightarrow |z| \ge 2\sqrt{2}$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{1} \\ a+b=4 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=2 \Rightarrow z=2+2i$

VD2-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]

Với các số phức z thỏa mãn $|(1+i)z+1-7i|=\sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z|$

A. $\max|z|=4$ **B.** $\max|z|=3$ **C.** $\max|z|=7$ **D.** $\max|z|=6$

GIẢI

❖ **Cách mẹo**

- Gọi số phức z có dạng $z=a+bi$. z thỏa mãn $|(1+i)z+1-7i|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |(a+bi)(1+i)+1-7i|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |a-b+1+(a+b-7)i|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (a-b+1)^2+(a+b-7)^2=2$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+50-12a-16b=2$

$\Leftrightarrow a^2+b^2-6a-8b+25=1$

$\Leftrightarrow (a-3)^2+(b-4)^2=1$

Vậy quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(3;4)$ bán kính $R=1$. Ta gọi đây là đường tròn (C)

- Với mỗi điểm M biểu diễn số phức $z=a+bi$ thì M cũng thuộc đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $\sqrt{a^2+b^2}$. Ta gọi đây là đường tròn (C') , Môđun của z cũng là bán kính đường tròn (C')
- Để bán kính (C') lớn nhất thì O,I,M thẳng hàng (như hình) và (C') tiếp xúc trong với (C)

Khi đó $OM=OI+R=5+1=6$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

❖ **Cách tự luận**

- Gọi số phức z có dạng $z=a+bi$. z thỏa mãn $|(1+i)z+1-7i|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |(a+bi)(1+i)+1-7i|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |a-b+1+(a+b-7)i|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (a-b+1)^2+(a+b-7)^2=2$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+50-12a-16b=2$

$\Leftrightarrow a^2+b^2-6a-8b+25=1$

$\Leftrightarrow (a-3)^2+(b-4)^2=1$

- Ta có $|z|^2=a^2+b^2=6a+8b-24=6(a-3)+8(b-4)+26$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có : $6(a-3)+8(b-4)\le|6(a-3)+8(b-4)|$

$\le\sqrt{(6^2+8^2)\left[(a-3)^2+(b-4)^2\right]}=10$

Vậy $|z|^2\le 36\Leftrightarrow|z|\le 6$

$\Rightarrow$ đáp án **D** là chính xác

❖ **Bình luận**

- Việc sử dụng bất đẳng thức để đánh giá $|z|$ là rất khó khăn, đòi hỏi học sinh phải nắm rất vững bất đẳng thức Bunhiacopxki và các biến dạng của nó
- Trong tình huống của bài toán này, khi so sánh 2 cách giải ta thấy dùng mẹo tiếp xúc tỏ ra đơn giản dễ hiểu và tiết kiệm thời gian hơn.

VD3-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 5 năm 2017]

Cho số phức z thỏa mãn $|z-4|+|z+4|=10$, giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ lần lượt là :

A. 10 và 4 **B.** 5 và 4 **C.** 4 và 3 **D.** 5 và 3

GIẢI

❖ **Cách mẹo**

- Gọi số phức z có dạng $z=a+bi$. z thỏa mãn $|z-4|+|z+4|=10$

$\Leftrightarrow |a-4+bi|+|a+4+bi|=10$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a-4)^2+b^2}+\sqrt{(a+4)^2+b^2}=10$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a+4)^2+b^2}=10-\sqrt{(a-4)^2+b^2}$

$\Leftrightarrow a^2+8a+16+b^2=100+a^2-8a+16+b^2-20\sqrt{(a-4)^2+b^2}$

$\Leftrightarrow 20\sqrt{(a-4)^2+b^2}=100-16a$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{(a-4)^2+b^2}=25-4a$

$\Leftrightarrow 25\left(a^2-8a+16+b^2\right)=625-200a+16a^2$

$\Leftrightarrow 9a^2+25b^2=225$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2}{25}+\dfrac{b^2}{9}=1$

Vậy quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường Elip đỉnh thuộc đáy lớn là $A(5;0)$, đỉnh thuộc đáy nhỏ là $B(0;3)$

- Với mỗi điểm M biểu diễn số phức $z=a+bi$ thì M cũng thuộc đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $\sqrt{a^2+b^2}$. Ta gọi đây là đường tròn (C'), Môđun của z cũng là bán kính đường tròn (C')
- Để bán kính (C') lớn nhất thì M trùng với đỉnh thuộc trục lớn và $M\equiv A(5;0)\Rightarrow OM=5$
  $\Rightarrow \max|z|=5$
- Để bán kính (C') lớn nhất thì M trùng với đỉnh thuộc trục nhỏ và $M\equiv B(0;3)\Rightarrow OM=3$
  $\Rightarrow \min|z|=3$
  $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

❖ Cách tự luận

- Gọi số phức z có dạng $z=a+bi$. z thỏa mãn $|z-4|+|z+4|=10$

$\Leftrightarrow |a-4+bi|+|a+4+bi|=10$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a-4)^2+b^2}+\sqrt{(a+4)^2+b^2}=10$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a+4)^2+b^2}+\sqrt{(-a+4)^2+(-b)^2}=10$

Theo bất đẳng thức vecto ta có :

$\Leftrightarrow 10=\sqrt{(a+4)^2+b^2}+\sqrt{(-a+4)^2+(-b)^2}\ge\sqrt{\left[(a+4)-(-a+4)\right]^2+\left[b-(-b)\right]^2}$

$\Leftrightarrow 10\ge\sqrt{4a^2+4b^2}$

$\Leftrightarrow 10\ge 2|z|\Rightarrow |z|\le 5$

- Ta có $\Leftrightarrow \sqrt{(a-4)^2+b^2}+\sqrt{(a+4)^2+b^2}=10$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có :

$100=\left(\sqrt{(a-4)^2+b^2}+\sqrt{(a+4)^2+b^2}\right)^2\le\left(1^2+1^2\right)\left[(a-4)^2+b^2+(a+4)^2+b^2\right]$

$\Leftrightarrow 100\le 2\left(2a^2+2b^2+32\right)$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+32\ge 50$

$\Leftrightarrow a^2+b^2\ge 9$

Vậy $|z|^2\ge 9\Leftrightarrow |z|\le 3$

$\Rightarrow 3 \le |z| \le 5 \Rightarrow$ đáp án **D** là chính xác

VD4-Trong các số phức z thỏa mãn $|z-2|-|z+2|=2$, tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

A. $z=1-\sqrt{3}i$ **B.** $z=-1+\sqrt{3}i$ **C.** $z=1$ **D.** $z=\sqrt{3}+i$

GIẢI

❖ **Cách mẹo**

➢ Gọi số phức z có dạng $z=x+yi$. z thỏa mãn $|z-2|-|z+2|=2$

$\Leftrightarrow |x-2+yi|-|x+2+yi|=2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2}-\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2}=2+\sqrt{(x+2)^2+y^2}$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=4+4\sqrt{(x+2)^2+y^2}+(x+2)^2+y^2$

$\Leftrightarrow -1-2x=\sqrt{(x+2)^2+y^2}\ \left(-1-2x\ge 0 \Leftrightarrow x\le -\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 1+4x+4x^2=x^2+4x+4+y^2$

$\Leftrightarrow x^2-\frac{y^2}{3}=1$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là Hypebol $(H): x^2-\frac{y^2}{3}=1$ có 2 đỉnh thuộc thực là $A'(-1;0), B(1;0)$

➢ Số phức $z=x+yi$ có điểm biểu diễn $M(x;y)$ và có môđun là $OM=\sqrt{a^2+b^2}$. Để OM đạt giá trị nhỏ nhất thì M trùng với hai đỉnh của (H)

$M \equiv A \Rightarrow M(1;0) \Rightarrow z=1$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

II) BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-Cho các số phức z thỏa mãn $|2z-2+2i|=1$. Môđun z nhỏ nhất có thể đạt được là bao nhiêu :

A. $\frac{-1+2\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\sqrt{2}+1$ **D.** $\sqrt{2}-1$

Bài 2-Trong các số phức z thỏa mãn $|z-3i|+|i\bar{z}+3|=10$. Hai số phức z_1 và z_2 có môđun nhỏ nhất. Hỏi tích z_1z_2 là bao nhiêu

A. 25 **B.** -25 **C.** 16 **D.** -16

Bài 3-Trong các số phức z thỏa mãn $|iz-3|=|z-2-i|$. Tính giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **C.** $\frac{1}{5}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-Cho các số phức z thỏa mãn $|2z-2+2i|=1$. Môđun z nhỏ nhất có thể đạt được là bao nhiêu :

A. $\frac{-1+2\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\sqrt{2}+1$ **D.** $\sqrt{2}-1$

GIẢI

❖ **Cách mẹo**

- Gọi số phức $z=x+yi$ thỏa mãn $|2z-2+2i|=1 \Leftrightarrow |2x-2+2yi+2i|=1$

$\Leftrightarrow (2x-2)^2+(2y+2)^2=1$

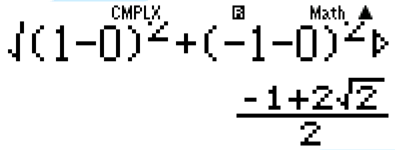
$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=\dfrac{1}{4}$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(1;-1)$ bán kính $R=\dfrac{1}{2}$

- Với mỗi điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z=x+yi$ sẽ thuộc đường tròn tâm O bán kính $R'=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Vì vậy để $R=|z|$ nhỏ nhất thì đường tròn (C') phải tiếp xúc ngoài với đường (C')

Khi đó điểm M sẽ là tiếp điểm của đường tròn (C) và (C') và $|z|=OM=OI-R=\dfrac{-1+2\sqrt{2}}{2}$

s (1 p 0) d + (p 1 p 0) d $ p a 1 R 2 =



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài 2-Trong các số phức z thỏa mãn $|z-3i|+|i\bar{z}+3|=10$. Hai số phức z_1 và z_2 có môđun nhỏ nhất. Hỏi tích z_1z_2 là bao nhiêu

A. 25 **B.** -25 **C.** 16 **D.** -16

GIẢI

❖ **Cách mẹo**

- Gọi số phức $z=x+yi$ thỏa mãn $|z-3i|+|i\bar{z}+3|=10$

$\Leftrightarrow |x+(y-3)i|+|y+3+xi|=10$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-3)^2}+\sqrt{(y+3)^2+x^2}=10$

$\Leftrightarrow \sqrt{(y+3)^2+x^2}=10-\sqrt{x^2+(y-3)^2}$

$\Leftrightarrow (y+3)^2+x^2=100-20\sqrt{x^2+(y-3)^2}+x^2+(y-3)^2$

$\Leftrightarrow 20\sqrt{x^2+(y-3)^2}=100-12y$

$\Leftrightarrow 25x^2+16y^2=400$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường Elip $(E):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$ có 2 đỉnh thuộc trục nhỏ là $A(-4;0),A'(4;0)$

- Với mỗi điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z=x+yi$ sẽ thuộc đường tròn tâm O bán kính $R'=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. Vì elip (E) và đường tròn (C) có cùng tâm O nên để OM nhỏ nhất thì M là đỉnh thuộc trục nhỏ

$\Rightarrow M\equiv A'\Rightarrow z_1=-4$, $M\equiv A\Rightarrow z_2=4$

Tổng hợp $z_1.z_2=(-4).4=-16$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

❖ **Mở rộng**

- Nếu đề bài hỏi tích z_1z_2 với $|z_1|,|z_2|$ có giá trị lớn nhất thì hai điểm M biểu diễn hai số phức trên là hai đỉnh thuộc trục lớn $B(0;-5), B'(0;5)$

$\Rightarrow M \equiv B' \Rightarrow z_1 = -5i$, $M \equiv A \Rightarrow z_2 = 5i$

Tổng hợp $z_1z_2 = 5i.(-5i) = -25i^2 = 25$

Bài 3-Trong các số phức z thỏa mãn $|iz-3| = |z-2-i|$. Tính giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **C.** $\frac{1}{5}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$

GIẢI

❖ **Cách mẹo**

- Gọi số phức $z = x + yi$ thỏa mãn $|iz-3| = |z-2-i|$

$\Leftrightarrow |-y-3+xi| = |x-2+(y-1)i|$

$\Leftrightarrow (-y-3)^2 + x^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2$

$\Leftrightarrow y^2 + 6y + 9 + x^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1$

$\Leftrightarrow x + 2y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 20\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 100 - 12y$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $(d): x + 2y + 1 = 0$

- Với mỗi điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$ thì $|z| = OM \geq OH$ với H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng (d) và OH là khoảng cách từ điểm O lên đường thẳng (d)

Tính $OH = d(O;(d)) = \dfrac{|1.0 + 2.0 + 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Vậy $|z| \geq \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

$$\left|x + yi + \frac{1}{x + yi}\right| = \left|\frac{x^2 - y^2 + 1 + 2xyi}{x + yi}\right| = \left|\frac{x^3 - xy^2 + x + x^2yi + y^3i - yi + 2xy^2}{x^2 + y^2}\right|.$$