Ví dụ 2: (Đề thi đại học khối D – 2004): *Trong không gian với hệ toạ độ* Oxyz *cho ba điểm* A(2; 0; 1), B(1; 0; 0), C(1; 1; 1) *và mặt phẳng* (P): x + y + z – 2 = 0. *Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm* A, B, C *và có tâm thuộc mặt phẳng* (P).

✍ *Giải*

1. Giả sử mặt cầu (S) có dạng:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0, \text{ với } a^2 + b^2 + c^2 - d \geq 0.$$

- Điểm $A \in (S) \Leftrightarrow 5 - 4a - 2c + d = 0$. (1)
- Điểm $B \in (S) \Leftrightarrow 1 - 2a + d = 0$. (2)
- Điểm $C \in (S) \Leftrightarrow 3 - 2a - 2b - 2c + d = 0$. (3)
- Tâm $I(a; b; c) \in (P) \Leftrightarrow a + b + c - 2 = 0$. (4)

Giải hệ phương trình tạo bởi (1), (2), (3), (4), ta được

$a = 1, b = 0, c = 1, d = 1$, thoả mãn điều kiện.

Vậy, phương trình mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0$.

Ví dụ 3: (Đề thi đại học khối A – 2005): *Trong không gian với hệ toạ độ* Oxyz *cho đường thẳng* (d) *và mặt phẳng* (P) *có phương trình*:

$$(d): \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}; \quad (P): 2x + y - 2z + 9 = 0.$$

a. *Tìm toạ độ điểm* I *thuộc* (d) *sao cho khoảng cách từ* I *tới* (P) *bằng* 2.

b. *Tìm toạ độ giao điểm* A *của* (d) *và* (P). *Viết phương trình tham số của đường thẳng* (Δ) *nằm trong mặt phẳng* (P), *biết* (Δ) *đi qua* A *và vuông góc với* (d).

✍ *Giải*

Chuyển phương trình (d) về dạng tham số:

$$(d): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

a. Với giả thiết $I \in (d)$ suy ra $I(1 - t; 2t - 3; 3 + t)$.

Với điều kiện $d(I, P) = 2$, ta được:

$$\frac{|2(1-t) + (2t-3) - 2(3+t) + 9|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = -2 \end{array}\right.$$

- Với t = 4, ta được $I_1(-3; 5; 7)$.
- Với t = –2, ta được $I_2(3; -7; 1)$.

Vậy, tồn tại hai điểm I_1, I_2 thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Thay phương trình tham số của (d) vào (P), ta được:

$2(1 - t) + (2t - 3) - 2(3 + t) + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow A(0; -1; 4)$.

Gọi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{n}$ theo thứ tự là vtcp của (d), vtcp của (Δ), vtpt của (P), ta có

$\vec{a}(-1; 2; 1)$ và $\vec{n}(2; 1; -2)$.

Nhận xét rằng:

$$\begin{cases}(\Delta)\subset(P)\\(\Delta)\perp(d)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{b}\perp\vec{n}\\\vec{b}\perp\vec{a}\end{cases}\Leftrightarrow \vec{b} = [\vec{n}, \vec{a}] = (5; 0; 5) \text{ chọn } \vec{b}(1; 0; 1).$$

Khi đó:

$$(\Delta): \begin{cases}\text{qua } A(0,-1,4)\\\text{vtct } \vec{b}(1,0,1)\end{cases}\Leftrightarrow(\Delta): \begin{cases}x = t\\y=-1\\z=4+t\end{cases}, t\in\mathbb{R}.$$

Ví dụ 4: (Đề thi đại học khối D – 2005): *Trong không gian với hệ toạ độ* Oxyz *cho hai đường thẳng*

$$(d_1): \frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+1}{2} \text{ và } (d_2): \begin{cases}x+y-z-2=0\\x+3y-12=0\end{cases}.$$

a. *Chứng minh rằng* (d_1) *và* (d_2) *song song với nhau. Viết phương trình mặt phẳng* (P) *chứa cả hai đường thẳng* (d_1) *và* (d_2).

b. *Mặt phẳng toạ độ* Oxz *cắt hai đường thẳng* d_1, d_2 *lần lượt tại các điểm* A, B. *Tính diện tích* ΔOAB, *với* O *là gốc toạ độ*.

✍ *Giải*

a. Ta có:

- (d_1) có vtcp $\vec{a_1}(3; -1; 2)$ và đi qua điểm $M_1(1; -2; -1)$.
- (d_2) có vtcp $\vec{a_2}(3; -1; 2)$ và đi qua điểm $M_2(0; 4; 2)$.

Nhận xét rằng $\vec{a_1} = \vec{a_2}$ và điểm $M_1 \notin (d_2)$.

Vậy, hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song với nhau.

Để lập phương trình mặt phẳng (P) chúng ta có hai cách sau:

Cách 1: (*Sử dụng chùm mặt phẳng*): Mặt phẳng (P) chứa (d_2) nên có dạng:

$$(P): A(x + y - z - 2) + B(x + 3y - 12) = 0. \quad (1)$$

Để (P) chứa (d_1) điều kiện là:

$$M_1\in(P)\Leftrightarrow A(1-2+1-2)+B(1-6-12)=0\Leftrightarrow A=-\frac{17}{2}B. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được (P): $15x + 11y - 17z - 10 = 0$.

Cách 2: Ta có ngay:

$$(P): \begin{cases}\text{qua } M_1\\\text{cặp vtcp } \vec{a_1} \text{ và } \overrightarrow{M_1M_2}\end{cases}\Leftrightarrow(P): \begin{cases}\text{qua } M_1(1,-2,-1)\\\text{vtpt } \vec{n}=[\vec{a_1}, \overrightarrow{M_1M_2}]=(15,11,-17)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (P): 15(x-1)+11(y+2)-17(z+1)=0 \Leftrightarrow (P): 15x+11y-17z-10=0.$$

b. Ta lần lượt có:

- Toạ độ của A là nghiệm của hệ tạo bởi (d_1) và (Oxz) nên:

$$\begin{cases}\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+1}{2}\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5\\y=0\\z=-5\end{cases}\Rightarrow A(-5; 0; -5).$$

- Toạ độ của B là nghiệm của hệ tạo bởi (d_2) và (Oxz) nên:

$$\begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x + 3y - 12 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 0 \\ z = 10 \end{cases} \Rightarrow B(12;\ 0;\ 10).$$

Khi đó, diện tích ΔOAB, với O là gốc toạ độ được cho bởi:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]\right| = \frac{1}{2}\left|[(-5;\ 0;\ -5),\ (12;\ 0;\ 10)]\right| = 5 \text{ đvdt}.$$

<u>Ví dụ 5:</u> (Đề thi đại học khối A – 2002): *Trong không gian* Oxyz, *cho* 2 *đường thẳng*:

$$(\Delta_1): \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ x + 2y - 2z + 4 = 0 \end{cases},\ (\Delta_2): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}.$$

a. *Lập phương trình mặt phẳng* (P) *chứa* (Δ_1) *và song song với* (Δ_2).

b. *Cho điểm* M(2; 1; 4). *Tìm toạ độ điểm* H *thuộc* (Δ_2) *sao cho độ dài* MH *ngắn nhất*.

✍ *Giải*

Ta lần lượt có:

a. (P) chứa (Δ_1) $\Leftrightarrow$ (P) thuộc chùm tạo bởi (Δ_1), có dạng:

(P): A(x – 2y + z – 4) + B(x + 2y – 2z + 4) = 0

$\Leftrightarrow$ (P): (B + A)x + 2(B – A)y + (A – 2B)z – 4A + 4B = 0

$\Rightarrow$ vtpt $\overrightarrow{n_P}$ (B + A; 2B – 2A; A – 2B).

Gọi $\overrightarrow{a_2}$ là vtcp của (Δ_2), ta được $\overrightarrow{a_2}$ (1; 1; 2).

Vì (P)//(Δ_2) nên:

$$\overrightarrow{n_P} \perp \overrightarrow{a_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{a_2} = 0 \Leftrightarrow 1.(B + A) + 1.2(B - A) + 2.(A - 2B) = 0 \Leftrightarrow B = A.$$

Vậy, ta được (P): 2x – z = 0.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Để H$\in$(Δ_2): MH_{Min} $\Leftrightarrow$ H là hình chiếu vuông góc của M lên (Δ_2)

Đường thẳng (Δ_2) có vtcp $\vec{a}_2$ (1; 1; 2).

Vì H $\in$ (Δ_2) nên:

H(1 + t; 2 + t; 1 + 2t) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{MH}$ (t – 1; 1 + t; 2t – 3),

MH $\perp$ (Δ_2) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MH} \perp \vec{a}_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\vec{a}_2 = 0$

$\Leftrightarrow$ 1.(t – 1) + 1.(1 + t) + 2.(2t – 3) = 0 $\Leftrightarrow$ t = 1 $\Rightarrow$ H(2; 3; 3).

Cách 2: Để H$\in$(Δ_2): MH_{Min}

$\Leftrightarrow$ H là hình chiếu vuông góc của M lên (Δ_2) $\Leftrightarrow$ H = (Q)$\cap$(Δ_2),

trong đó:

$$(Q): \begin{cases} \text{qua } M \\ (Q) \perp (\Delta_2) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): \begin{cases} \text{qua } M(2, 1, 4) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{a_2}(1, 1, 2) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): x = y + 2z - 11 = 0.$$

Bằng cách thay x, y, z từ (Δ_2) vào (Q), ta được t = 1 nên H(2; 3; 3).

Ví dụ 6: (Đề thi đại học khối B – 2004): *Trong không gian với hệ toạ độ* Oxyz *cho* A(–4; –2; 4) *và đường thẳng* (d) *có phương trình*:

$$(d): \begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = 1 - t \quad , t \in \mathbb{R} \\ z = 4t - 1 \end{cases}.$$

Viết phương trình đường thẳng (Δ) *đi qua điểm* A, *cắt và vuông góc với đường thẳng* (d).

Giải

1. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách giải sau:

Cách 1: Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{a}\,(2; -1; 4)$, lấy điểm $B(-3; 1; -1) \in (d)$.

Gọi (P_1) là mặt phẳng thoả mãn:

$$(P_1): \begin{cases} \text{qua A} \\ \text{chứa (d)} \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): \begin{cases} \text{qua A} \\ \text{cặp vtcp } \vec{a} \text{ và } \overrightarrow{AB} \end{cases} \Leftrightarrow (P_1): \begin{cases} \text{qua } A(-4, -2, 4) \\ \text{vtpt } \vec{n} = (1, -2, -1) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (P_1): x - 2y - z + 4 = 0.$

Gọi (P_2) là mặt phẳng thoả mãn:

$$(P_2): \begin{cases} \text{qua A} \\ (P_2) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): \begin{cases} \text{qua } A(-4, -2, 4) \\ \text{vtpt } \vec{a}(2, -1, 4) \end{cases} \Leftrightarrow (P_2): 2x - y + 4z - 10 = 0.$$

Nhận xét rằng, (Δ) chính là giao tuyến của (P_1) và (P_2) do đó có phương trình:

$$(\Delta): \begin{cases} x - 2y - z + 4 = 0 \\ 2x - y + 4z - 10 = 0 \end{cases}.$$

Cách 2: Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{a}\,(2; -1; 4)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (d), suy ra:

$H(2t - 3; 1 - t; 4t - 1) \Rightarrow \overrightarrow{AH}\,(2t + 1; 3 - t; 4t - 5)$,

$\overrightarrow{AH} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{a} = 0 \Leftrightarrow 2(2t + 1) - (3 - t) + 4(4t - 5) = 0$

$\Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \overrightarrow{AH}\,(3; 2; -1)$.

Khi đó, phương trình đường thẳng (Δ) được cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{qua } A(-4, -2, 4) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{AH}(3, 2, -1) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \frac{x + 4}{3} = \frac{y + 2}{2} = \frac{z - 4}{-1}.$$

Ví dụ 7: (Đề thi đại học khối A – 2003): *Trong không gian với hệ toạ độ* Oxyz *cho hình hộp chữ nhật* $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ *có* A *trùng với gốc của hệ toạ độ*, B(a; 0; 0), D(0; a; 0), $A_1(0; 0; b)$ *với* a, b > 0. *Gọi* G *là trung điểm cạnh* CC_1.

a. *Tính thể tích khối tứ diện* BDA_1M *theo* a *và* b.

b. *Xác định tỉ số* $\frac{a}{b}$ *để* $(A_1BD) \perp (MBD)$.

Giải

Từ giả thiết suy ra C(a; a; 0) và $C_1(a; a; b) \Rightarrow M(a; a; \frac{b}{2})$.

a. Ta có ngay:

$$V_{BDA_1M} = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA_1}].\overrightarrow{BM}\right|. \qquad (1)$$

trong đó:

$$\overrightarrow{BD}(-a;\ a;\ 0),\ \ \overrightarrow{BA_1}(-a;\ 0;\ b),\ \ \overrightarrow{BM}(0;\ a;\ \frac{b}{2}),\ \ [\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA_1}] = (ab;\ ab;\ a^2).$$

Từ đó, suy ra:

$$V_{BDA_1M} = \frac{1}{6}\left|(ab;\ ab;\ a^2).\ (0;\ a;\ \frac{b}{2})\right| = \frac{a^2b}{4}.$$

b. Gọi $\vec{n}_{A_1BD}$, $\vec{n}_{MBD}$ theo thứ tự là vtpt của các mặt phẳng (A_1BD) và (MBD), ta có ngay:

$$\vec{n}_{A_1BD} = [\overrightarrow{BD},\ \overrightarrow{BA_1}] = (ab;\ ab;\ a^2), \qquad \vec{n}_{MBD} = [\overrightarrow{BD},\ \overrightarrow{BM}] = (\frac{ab}{2};\ \frac{ab}{2};\ -a^2)$$

Để $(A_1BD) \perp (MBD)$ điều kiện là:

$$\vec{n}_{A_1BD} \perp \vec{n}_{MBD} \Leftrightarrow \vec{n}_{A_1BD}.\vec{n}_{MBD} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2b^2}{2} + \frac{a^2b^2}{2} - a^4 = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b.$$

Vậy, với a = b thoả mãn điều kiện đầu bài.

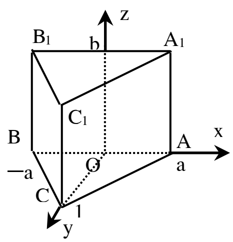
<u>Ví dụ 8:</u> (Đề thi đại học khối D – 2004): *Trong không gian với hệ toạ độ* Oxyz *cho hình lăng trụ đứng* $ABCA_1B_1C_1$. *Biết* A(a; 0; 0), B(– a; 0; 0), C(0; 1; 0), $B_1(-a;\ 0;\ b)$, a > 0, b > 0. *Gọi* M *là trung điểm cạnh* SC.

a. *Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng* B_1C, AC_1.

b. *Cho* a, b *thay đổi nhưng luôn thoả mãn* a + b = 4. *Tìm* a, b, *để khoảng cách giữa hai đường thẳng* B_1C, AC_1 *lớn nhất*.

✍ *Giải*

Ta có $A_1(a;\ 0;\ b)$, $C_1(0;\ 1;\ b)$.



a. Ta có:

$$d(B_1C,\ AC_1) = \frac{|[\overrightarrow{B_1C},\overrightarrow{AC_1}].\overrightarrow{CC_1}|}{|[\overrightarrow{B_1C},\overrightarrow{AC_1}]|} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

b. Sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta được:

$$d(B_1C,\ AC_1) = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \le \frac{ab}{\sqrt{2ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{2}} \le \frac{a+b}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Suy ra $d_{max} = \sqrt{2}$, đạt được khi $a = b \overset{a+b=4}{\Leftrightarrow} a = b = 2$.

<u>Ví dụ 9:</u> (Đề thi đại học khối B – 2005): *Trong không gian với hệ toạ độ* Oxyz *cho hình lăng trụ đứng* $ABC.A_1B_1C_1$ với A(0; –3; 0), B(4; 0; 0), C(0; 3; 0), $B_1(4;\ 0;\ 4)$.

a. *Tìm toạ độ các đỉnh* A_1, C_1.

b. *Viết phương trình mặt cầu có tâm* A *và tiếp xúc với mặt phẳng* (BCC_1B_1).

c. *Gọi* M *là trung điểm của* A_1B_1. *Viết phương trình mặt phẳng* (P) *đi qua hai điểm* A, M *và song song với* BC_1.

d. *Mặt phẳng* (P) *cắt đường thẳng* (A_1C_1) *tại* N. *Tính độ dài đoạn* MN.

✍ *Giải*

a. $A_1(0; -3; 4)$, $C_1(0; 3; 4)$.

b. Phương trình mặt phẳng (BCC_1B_1) được cho bởi:

$$(BCC_1B_1): \begin{cases} \text{qua } B \\ \text{cÆp vtcp } \overrightarrow{BC} \text{ vµ } \overrightarrow{BB_1} \end{cases} \Leftrightarrow (BCC_1B_1): \begin{cases} \text{qua } B(4,0,0) \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC}] = (3,4,0) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (BCC_1B_1): 3(x - 4) + 4y = 0 \Leftrightarrow (BCC_1B_1): 3x + 4y - 12 = 0.$

Mặt cầu (S) tâm A tiếp xúc với mặt phẳng (BCC_1B_1) khi:

$$R = d(A, (BCC_1B_1)) = \frac{|4.(-3) - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{24}{5}.$$

Vậy, phương trình mặt cầu S(A, R) có dạng:

$$(S): x^2 + (y + 3)^2 + z^2 = \frac{576}{25}.$$

c. Ta có $M(2; -\frac{3}{2}; 4)$ và khi đó:

$$(P): \begin{cases} \text{qua } A \\ \text{cÆp vtcp } \overrightarrow{AM} \text{ vµ } \overrightarrow{BC_1} \end{cases} \Leftrightarrow (P): \begin{cases} \text{qua } A \\ \text{vtpt } \vec{n} = [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC_1}] = (1, 4, -2) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (P): x + 4(y + 3) - 2z = 0 \Leftrightarrow (P): x + 4y - 2z + 12 = 0.$

d. Phương trình tham số của đường thẳng (A_1C_1) được cho bởi:

$$(A_1C_1): \begin{cases} \text{qua } A_1(0,-3,4) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{A_1C_1}(0,6,0) \end{cases} \Leftrightarrow (A_1C_1): \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 + t \\ z = 4 \end{cases}, \text{ với } t \in \mathbb{R}.$$

Bằng cách thay phương trình tham số của (A_1C_1) vào phương trình của (P) ta được:

$0 + 4(-3 + t) - 2.4 + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow N(0; -1; 4)$

$$\Rightarrow MN = \sqrt{(0-2)^2 + (-1+\frac{3}{2})^2 + (4-4)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$