Thầy LÊ BÁ TRẦN PHƯƠNG

CHUẨN BỊ KÌ THI THPT QUỐC GIA NĂM 2019

Môn: Toán

CHỦ ĐỀ: LÝ THUYẾT VÀ CÁC DẠNG BÀI VỀ SỐ PHỨC

Nguồn: Tổng hợp và sưu tầm

1. Kiến thức cơ bản.

Các phép toán trên số phức.

*** Phép cộng và phép trừ, nhân hai số phức.**

Cho hai số phức z = $a + bi$ và z' = $a' + b'i$. Ta định nghĩa:

$$\begin{cases} z + z' = (a + a') + (b + b')i \\ z - z' = (a - a') + (b - b')i \end{cases}$$

$$zz' = aa' - bb' + (ab' - a'b)i$$

*** Phép chia số phức khác 0.**

Cho số phức z = $a + bi \neq 0$ *(tức là* $a^2 + b^2 > 0$ *)*

Ta định nghĩa số nghịch đảo z^{-1} của số phức $z \neq 0$ là số

$$z^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2}\bar{z} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}$$

Thương $\frac{z'}{z}$ của phép chia số phức z' cho số phức $z \neq 0$ được xác định như sau:

$$\frac{z'}{z} = z.z^{-1} = \frac{z'.\bar{z}}{|z|^2}$$

2. Các dạng bài tập.

2.1. Dạng 1: Các phép toán trên số phức.

<u>Ví dụ 1:</u> Cho số phức z = $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. Tính các số phức sau: $\bar{z}$; z^2; $(\bar{z})^3$; $1 + z + z^2$

Giải:

*Vì z = $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \Rightarrow \bar{z} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

*Ta có $z^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}i^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\Rightarrow (\bar{z})^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^2 = \frac{3}{4}+\frac{1}{4}i^2+\frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$(\bar{z})^3 = (\bar{z})^2.\ \bar{z} = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}i+\frac{3}{4}i-\frac{\sqrt{3}}{4} = i$

Ta có: $1 + z + z^2 = 1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{3+\sqrt{3}}{2}-\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$

Ví dụ 2: Tìm số phức liên hợp của: $z=(1+i)(3-2i)+\frac{1}{3+i}$

Giải:

Ta có $z=5+i+\frac{3-i}{(3+i)(3-i)}=5+i+\frac{3-i}{10}$.

Suy ra số phức liên hợp của z là: $\bar{z}=\frac{53}{10}-\frac{9}{10}i$

Ví dụ 3: Tìm phần ảo của số phức z biết $\bar{z}=\left(\sqrt{2}+i\right)^2\left(1-\sqrt{2}i\right)$

Giải:

$\bar{z}=\left(1+2\sqrt{2}i\right)\left(1-\sqrt{2}i\right)=5+\sqrt{2}i$. Suy ra, $z=5-\sqrt{2}i$

Phần ảo của số phức $z=-\sqrt{2}$

Ví dụ 4: Tìm mô đun của số phức $z=\frac{(1+i)(2-i)}{1+2i}$

Giải: Ta có: $z=\frac{5+i}{5}=1+\frac{1}{5}i$

Vậy mô đun của z bằng: $|z|=\sqrt{1+\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{26}}{5}$

Ví dụ 5: Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z}=\frac{\left(1-\sqrt{3}i\right)^3}{1-i}$. Tìm môđun của số phức $\bar{z}+iz$.

Giải:

Ta có: $\left(1-\sqrt{3}i\right)^3=-8$ Do đó $\bar{z}=\frac{-8}{1-i}=-4-4i \Rightarrow z=-4+4i$

$\Rightarrow \bar{z}+iz=-4-4i+\left(-4+4i\right)i=-8-8i$ Vậy $\left|\bar{z}+iz\right|=8\sqrt{2}$.

Ví dụ 6: Tìm các số thực x, y thỏa mãn đẳng thức:

a) 3x + y + 5xi = 2y – 1 +(x – y)i

b) (2x + 3y + 1) + (–x + 2y)i = (3x – 2y + 2) + (4x – y – 3) i.

c) $x(3+5i)+y(1-2i)^3=-35+23i$

Giải:

a) Theo giả thiết: *3x + y + 5xi = 2y – 1 +(x – y)i* ⇔ *(3x + y) + (5x)i = (2y – 1) +(x – y)i*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=2y-1 \\ 5x=x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{7} \\ y=\dfrac{4}{7} \end{cases}$$

b) Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} 2x+3y+1=3x-2y+2 \\ -x+2y=4x-y-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+5y=1 \\ -5x+3y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{9}{11} \\ y=\dfrac{4}{11} \end{cases}$

c) Ta có $(1-2i)^3=(1-2i)^2(1-2i)=(-3-4i)(1-2i)=2i-11$.

Suy ra $x(3+5i)+y(1-2i)^3=-35+23i \Leftrightarrow x(3+5i)+y(2i-11)=-35+23i$

$$\Leftrightarrow (3x-11y)+(5x+2y)i=-35+23i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-11y=-35 \\ 5x+2y=23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$$

➢ **Bài tập tự luyện**

Bài 1. Tìm các số thực x, y biết:

a) (3x –2) + (2y +1)i = (x + 1) – (y – 5)i;

b) (2x + y) + (2y – x)i = (x – 2y + 3) + (y + 2x +1)i;

Bài 2. Chứng minh z = (1+2i)(2 - 3i)(2+i) (3-2i) là một số thực

Bài 3. Tìm các số thực x, y thỏa mãn đẳng thức: $\dfrac{x(3-2i)}{2+3i}+y(1-2i)^3=11+4i$

Bài 4. Cho hai số phức: $z_1=2+5i$; $z_2=3-4i$. Xác định phần thực, phần ảo của số phức $z_1.z_2$

Bài 5. Tìm phần thực, phần ảo và mô đun của số phức:

a) $z=(2+3i)(1-i)-4i$

b) $z=(2-2i)(3+2i)(5-4i)-(2+3i)^3$

c) z = 2i(3 + i)(2 + 4i)

d) $z=\dfrac{-2+5i}{(1+3i)(-2-i)(1+i)}$

e) $z=\dfrac{(1+2i)(-4+i)}{(1-i)(4+3i)}$

Bài 6. Tìm các số phức: $2z+\bar{z}$ và $\dfrac{25i}{z}$, biết $z=3-4i$.

Bài 7. Cho số phức z = 2 + 3i.Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w=\dfrac{\bar{z}+i}{iz-1}$

Bài 8. Cho số phức $z=\dfrac{1+7i}{1+2i}+(3-2i)(-1+3i)$ Tính mô đun của z và tìm tọa độ điểm biểu diễn hình học của z trong hệ tọa độ Oxy.

Bài 9. Cho z thỏa mãn (2 + i)z + $\dfrac{2(1+2i)}{1+i}=7+8i$. Tìm môđun của số phức w = z + 1 + i

Bài 10. Số phức z thỏa mãn $(1+i)^2(2-i)z=8+i+(1+2i)z$. Tìm phần thực, phần ảo của z.

Bài 11. Cho số phức z thỏa mãn $(1-2i)z-\dfrac{2-i}{1+i}=(3-i)z$ .Tìm tọa độ điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

Bài 12. Tìm số phức z biết $z^3 = 18 + 26i$, trong đó z = x + yi (x,y ∈ Z)

2.2. Dạng 2: Tính i^n và áp dụng

Chú ý:

- $i^{4n} = 1$; $i^{4n+1} = i$; $i^{4n+2} = -1$; $i^{4n+3} = -i$; $\forall n \in N^*$ Vậy $i^n \in \{-1;1;-i;i\}$, $\forall n \in N^*$
- $(1+i)^2=2i;(1-i)^2=-2i$
- $\Delta;\Delta_3$

Ví dụ 1: Tính: $i^{105} + i^{23} + i^{20} - i^{34}$

Giải:

Ta có $i^{105} + i^{23} + i^{20} - i^{34} = i^{4.26+1} + i^{4.5+3} + i^{4.5} - i^{4.8+2} = i - i + 1 + 1 = 2$

Ví dụ 2: Tính số phức sau:

a) $z = (1+i)^{15}$ b) $z=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{16}+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{8}$

Giải:

a) Ta có: $(1 + i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i \Rightarrow (1 + i)^{14} = (2i)^7 = 128.i^7 = -128.i$

nên $z = (1+i)^{15} = (1+i)^{14}(1+i) = -128i(1+i) = -128(-1 + i) = 128 - 128i$.

b) Ta có: $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)(1+i)}{2}=\dfrac{2i}{2}=i$

$\Rightarrow \dfrac{1-i}{1+i} = -i$. Vậy $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{16} + \left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{8} = i^{16} + (-i)^8 = 2$

Ví dụ 3: Tìm phần thực, phần ảo của số phức sau:

$$1+(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+...+(1+i)^{20}$$

Giải:

$$P = 1+(1+i)+(1+i)^2+...+(1+i)^{20} = \frac{(1+i)^{21}-1}{i}$$

$$(1+i)^{21} = \left[(1+i)^2\right]^{20}(1+i) = (2i)^{10}(1+i) = -2^{10}(1+i)$$

$$\Rightarrow P = \frac{-2^{10}(1+i)-1}{i} = -2^{10} + \left(2^{10}+1\right)i$$

Vậy phần thực là -2^{10} và phần ảo là $2^{10}+1$

➢ **Bài tập tự luyện**

Bài 1. Tìm phần thực, phần ảo của các số phức sau:

$$z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + (1-i)^{10} + (2+3i)(2-3i) + \frac{1}{i}$$

Bài 2. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z thỏa mãn: $(z+2-3i)(1-i) = (1+i)^{2011}$.

Bài 3. Tìm phần thực, phần ảo của số phức $z = (1+i)^{19}$

2.3. Dạng 3: Tìm số phức dựa vào Dạng đại số của số phức.

Nếu trong hệ thức tìm số phức z xuất hiện 2 hay nhiều đại lượng sau: $z, \bar{z}, |z|, ...$ ta sẽ sử dụng Dạng đại số của z là $z = x + yi$ với $x, y \in R$

Ví dụ 1: Tìm số phức z biết $z - (2+3i)\bar{z} = 1-9i$

Giải:

Gọi z= a+ bi (a,b $\in R$) ta có:

$$z-(2+3i)\bar{z} = 1-9i \Leftrightarrow a+bi-(2+3i)(a-bi) = 1-9i$$

$$\Leftrightarrow -a-3b-(3a-3b)i = 1-9i \Leftrightarrow \begin{cases} -a-3b=1 \\ 3a-3b=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$$

Vậy z= 2-i

Ví dụ 2: Tính mô đun của số phức z biết rằng: $(2z-1)(1+i)+(\bar{z}+1)(1-i) = 2-2i$

Giải:

Gọi z= a+ bi (a, b$\in R$)

Ta có

$(2z-1)(1+i)+(\overline{z}+1)(1-i)=2-2i$

$\Leftrightarrow [(2a-1)+2bi](1+i)+[(a+1)-bi](1-i)=2-2i$

$\Leftrightarrow (2a-2b-1)+(2a+2b-1)i+(a-b+1)-(a+b+1)i=2-2i$

$\Leftrightarrow (3a-3b)+(a+b-2)i=2-2i \Leftrightarrow \begin{cases}3a-3b=2\\ a+b-2=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\\ b=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$

Suy ra mô đun: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

Ví dụ 3: Tìm số phức z thỏa mãn: $|z|^2+2z.\overline{z}+|\overline{z}|^2=8$ và $z+\overline{z}=2$.

Giải

Gọi z = x + iy (x, y∈R), ta có $\overline{z}=x-iy; |z|^2=|\overline{z}|^2=z\overline{z}=x^2+y^2$

$|z|^2+2z.\overline{z}+|\overline{z}|^2=8 \Leftrightarrow 4(x^2+y^2)=8 \Leftrightarrow (x^2+y^2)=2$ (1)

$z+\overline{z}=2 \Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x=1$ (2)

Từ (1) và (2) tìm được x = 1 ; y = ±1

Vậy các số phức cần tìm là 1 + i và 1 - i

Ví dụ 4: Tìm số phức z thỏa mãn hai điều kiện: $|z+1-2i|=|\overline{z}+3+4i|$ và $\dfrac{z-2i}{\overline{z}+i}$ là một số thuần ảo.

Giải

Đặt z= x+ yi (x,y $\in R$)

Theo bài ra ta có

$|x+1+(y-2)i|=|x+3+(4-y)i|$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=(x+3)^2+(y-4)^2 \Leftrightarrow y=x+5$

Số phức $w=\dfrac{z-2i}{\overline{z}+i}=\dfrac{x+(y-2)i}{x+(1-y)i}=\dfrac{x^2-(y-2)(y-1)+x(2y-3)i}{x^2+(y-1)^2}$

w là một số ảo khi và chỉ khi $\begin{cases}x^2-(y-2)(y-1)=0\\ x^2+(y-1)^2>0\\ y=x+5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{12}{7}\\ y=\dfrac{23}{7}\end{cases}$

Vậy $z=-\dfrac{12}{7}+\dfrac{23}{7}i$

Ví dụ 5: Tìm tất cả các số phức z biết $z^2 = |z|^2 + \overline{z}$

Giải:

Gọi z= a+ bi (a, b $\in R$) ta có:

$z^2 + |z|^2 + \overline{z} \Leftrightarrow (a+bi)^2 = a^2 + b^2 + a - bi$

$\Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi = a^2 + b^2 + a - bi$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = a^2 + b^2 + a \\ 2ab = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b^2 \\ b(2a+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = 0 \\ a = -\frac{1}{2}; b = \frac{1}{2} \\ a = -\frac{1}{2}; b = \frac{-1}{2} \end{array} \right.$$

Vậy z=0; $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i; z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

Ví dụ 6: Tìm số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo.

Giải:

Gọi z= a+ bi (a, b $\in R$) Ta có $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ và $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi $\begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ a^2 - b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 1 \end{cases}$

Vậy các số phức cần tìm là 1+i; 1-i; -1+i; -1-i

Ví dụ 7: Tìm số phức z biết $\overline{z} - \frac{5 + i\sqrt{3}}{z} - 1 = 0$

Giải:

Gọi z= a+ bi (a, b $\in R$) và $a^2 + b^2 \neq 0$ ta có

$$\overline{z} - \frac{5 + i\sqrt{3}}{z} - 1 = 0 \Leftrightarrow a - bi - \frac{5 + i\sqrt{3}}{a + bi} - 1 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 5 - i\sqrt{3} - a - bi = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - a - 5) - (b + \sqrt{3})i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - a - 5 = 0 \\ b + \sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - 2 = 0 \\ b = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1; b = -\sqrt{3} \\ 2 = a = 2; b = -\sqrt{3} \end{array} \right.$$

Vậy $z = -1 - i\sqrt{3}$ hoặc $z = 2 + i\sqrt{3}$

Ví dụ 8: Tìm số phức z thỏa mãn $|z - i| = \sqrt{2}$ và $(z-1)(\overline{z} + i)$ là số thực

Giải:

Giả sử z= x+ yi (x, y $\in R$)

Khi đó,

$|z-i|=\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=2$ (1)

$$(z-1)(\overline{z}+i)=(x-1+yi)(x-(y-1)i)=x(x-1)+y(y-1)+(x+y-1)i$$

$(z-1)(\overline{z}+i) \in R \Leftrightarrow x+y-1=0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có x=1; y=0 hoặc x=-1; y=2

Vậy z=1; z=-1+ 2i

➤ **<u>Bài tập tự luyện</u>**

<u>Bài 1.</u> Tìm số phức z thỏa mãn: $|z-2+i|=2$. Biết phần ảo nhỏ hơn phần thực 3 đơn vị.

<u>Bài 2.</u> Tìm số phức z thỏa mãn: | z | - iz = 1 – 2i

<u>Bài 3.</u> Tìm số phức z thỏa mãn: $|z-(2+i)|=\sqrt{10}$ và $z.\overline{z}=25$.

<u>Bài 4.</u> Tìm số phức z thỏa mãn $|z-(1+2i)|=\sqrt{26}$ và $z.\overline{z}=25$.

<u>Bài 5.</u> Tìm số phức z thỏa mãn từng trường hợp:

a) $|z|=2$ và z là số thuần ảo. b) $|z|=5$ và phần thực của z bằng hai lần phần ảo của nó.

<u>Bài 6.</u> Tìm số phức z thoả mãn $|z|=\sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo.

<u>Bài 7.</u> Giải phương trình:

a) $z^2+\overline{z}=0$. b) $z^2+|z|=\overline{z}$

<u>Bài 8.</u> Tìm số phức z biết $(z+1)(1+i)+\dfrac{\overline{z}-1}{1-i}=|z|^2$.

<u>Bài 9.</u> Tìm số phức z biết: $|z-1|=1$ và $(1+i)(\overline{z}-1)$ có phần ảo bằng 1.

<u>Bài 10.</u> Tìm số phức z thỏa mãn: $|z-1|=5$ và $17(z+\overline{z})=5z\overline{z}$.

<u>Bài 11.</u> Tìm số phức z thỏa mãn $\begin{cases} |z|=\sqrt{5} \\ \left|\dfrac{\overline{z}}{2(1+i)}-(2+i)\right|=\dfrac{5\sqrt{2}}{4} \end{cases}$.

2.4. Dạng 4: Biểu diễn hình học một số phức. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z.

Trong dạng này, ta gặp các bài toán biểu diễn hình học của số phức hay còn gọi là tìm tập hợp điểm biểu diễn một số phức z trong đó số phức z thỏa mãn một hệ thức nào đó (thường là hệ thức liên quan đến môđun của số phức). Khi đó ta giải bài toán này như sau:

Giả sử z = x+yi (x, y $\in$ R). Khi đó số phức z biểu diễn trên mặt phẳng phức bởi điểm M(x;y). Sử dụng dữ kiện của đề bài để tìm mối liên hệ giữa x và y từ đó suy ra tập hợp điểm M.

Ví dụ 1: Giả sử M(z) là điểm trên mặt phẳng phức biểu diễn số phức z. Tìm tập hợp các điểm M(z) thỏa mãn một trong các điều kiện sau đây:

a) $|z-1+i|=2$ b) $|2+z|=|1-i|$ c) $|z-4i|+|z+4i|=10$

Giải:

Đặt z = x +yi (x, y ∈ R) được biểu diễn bởi điểm M(x;y)

a) Xét hệ thức: $|z-1+i|=2$ (1)

Đặt z = x +yi (x, y ∈ R) ⇒ z – 1 + i = (x – 1) + (y + 1)i.

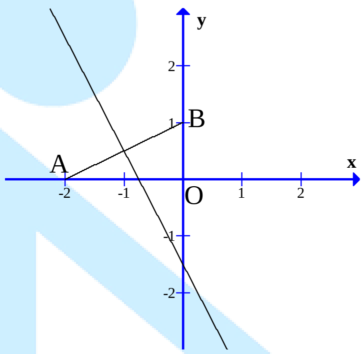
Khi đó (1) ⇔ $\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=2$

⇔ $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$. ⇒ Tập hợp các điểm M(z) trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z thỏa mãn (1) là đường tròn có tâm tại I(1;-1) và bán kính R = 2.

b) Xét hệ thức $|2+z|=|z-i|$ ⇔ |(x+2) +yi| = |-x+(1-y)i|

⇔ $(x+2)^2 + y^2 = x^2 + (1-y)^2$ ⇔ 4x + 2y + 3 = 0.

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng 4x + 2y + 3 = 0.



Nhận xét: Đường thẳng 4x + 2y + 3 = 0 chính là đường trung trực của đoạn AB.

c) Xét hệ thức: $|z-4i|+|z+4i|=10$

Xét F_1, F_2 tương ứng biểu diễn các điểm 4i và -4i tức là F_1 (0;4) và F_2 =(0;-4). Do đó:

$|z-4i|+|z+4i|=10$ ⇔ $MF_1 + MF_2 = 10$

Ta có $F_1F_2 = 8$ ⇒ Tập hợp tất cả các điểm M nằm trên (E) có hai tiêu điểm là F_1 và F_2 và có độ dài trục lớn bằng 10.

Phương trình của (E) là: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn

$|z-i|=|(1+i)z|$

Giải:

Đặt z= x+ yi (x,y $\in R$)

Ta có:

$|z-i|=|(1+i)z| \Leftrightarrow |x+(y-1)i|=|(x-y)+(x+y)i|$

$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=(x-y)^2+(x+y)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2xy-1=0 \Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=2$

Vậy tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z là đường tròn có phương trình $x^2+(y+1)^2=2$

Ví dụ 3: Cho số phức $z_1=\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^3}{(1+i)^5}$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn $A=\left|z+2i\bar{z}\right|$, biết rằng $x-y-1=0$

.

Giải

$\Leftrightarrow t^2-4t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=4 \end{array}\right.$

$t=0 \Rightarrow B(0;-1), C(4;-1)$

$t=4 \Rightarrow B(4;-1), C(0;-1)$

Giả sử $z_2=x+yi \quad x,y\in R$ biểu diễn bởi điểm M(x;y). Khi đó ta có:

$\overrightarrow{n_P}=(a,b,c), a^2+b^2+c^2\neq 0$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z_2 là đường tròn tâm O, bán kính 2

Ví dụ 4: Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$.Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

Giả sử số phức z cần tìm có dạng z = x + yi (x,y ∈ R) được biểu diễn bởi điểm M(x;y).

Ta có $|x-2+(y-4)i|=|x+(y-2)i| \quad (1) \quad \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$

$\Leftrightarrow y=-x+4$. Do đó tập hợp các điểm M biểu diễn cho các số phức z thỏa mãn (1) là đường thẳng x + y = 4. Mặt khác $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+x^2-8x+16}=\sqrt{2x^2-8x+16}$

Hay $|z|=\sqrt{2(x-2)^2+8}\geq 2\sqrt{2}$

Do đó $|z|_{\min} \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=2$. Vậy $z=2+2i$

Ví dụ 5: Biết rằng số phức z thỏa mãn $u=(z+3-i)(\bar{z}+1+3i)$ là một số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

Giải

Đặt z= x+ yi (x, y $\in R$) ta có

$u=\left[(x+3)+(y-1)i\right]\left[(x+1)-(y-3)i\right]=x^2+y^2+4x-4y+6+2(x--y-4)i$

Ta có: $u\in R \Leftrightarrow x-y-4=0$

Tập hợp các điểm biểu diễn của z là đường thẳng d: x-y-4=0, M(x;y) là điểm biểu diễn của z thì mô đun của z nhỏ nhất khi và chỉ khi độ dài OM nhỏ nhất $\Leftrightarrow OM \perp d$ Tìm được M(-2;2) suy ra z=-2+2i.

<u>Ví dụ 6:</u> Tìm số phức Z có mô đun lớn nhất và thỏa mãn điều kiện $\left|\overline{Z}(1+i)-3+2i\right|=\frac{\sqrt{13}}{2}$

Giải

Gọi $z=x+yi(x,y\in R)\Rightarrow \overline{z}=x-yi$

$$\left|\overline{z}(1+i)-3+2i\right|=\frac{\sqrt{13}}{2}\Leftrightarrow x^2+y^2-x-5y+\frac{39}{8}=0$$

Gọi M (x;y) là điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ Oxy$\Rightarrow M\in(C)$ là đường tròn có tâm $I(\frac{1}{2};\frac{5}{2})$ và bán kính $R=\frac{\sqrt{26}}{4}$

Gọi d là đường thẳng đi qua O và I $\Rightarrow d: y=5x$

Gọi M_1, M_2 là hai giao điểm của d và (C)$\Rightarrow M_1(\frac{3}{4};\frac{15}{4})$ và $M_2(\frac{1}{4};\frac{5}{4})$

Ta thấy $\begin{cases} OM_1 > OM_2 \\ OM_1 = OI + R \geq OM\,(M\in(C)) \end{cases}$

$\Rightarrow$ số phức cần tìm ứng với điểm biểu diễn M_1 hay $z=\frac{3}{4}+\frac{15}{4}i$

<u>Ví dụ 7:</u> Tìm tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z sao cho $u=\frac{z+2+3i}{z-i}$ là một số thuần ảo.

Giải

Đặt z= x+ yi (x, y $\in R$), khi đó:

$$u=\frac{(x+2)+(y+3)i}{x+(y-1)i}=\frac{\left[(x+2)+(y+3)i\right]\left[x-(y-1)i\right]}{x^2+(y-1)^2}$$

$$=\frac{(x^2+y^2+2x+2y-3)+2(2x-y+1)i}{x^2+(y-1)^2}$$

u là số thuần ảo khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2+y^2+2x+2y-3=0 \\ x^2+(y-1)^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2+(y+1)^2=5 \\ (x;y)\neq(0;1) \end{cases}$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của z là đường tròn tâm I(-1;-1), bán kính $\sqrt{5}$ trừ điểm (0;1)

➢ **<u>Bài tập tự luyện</u>**

Bài 1. Giả sử M(z) là điểm trên mặt phẳng tọa đô biểu diễn số phức z. Tìm tập hợp những điểm M(z) thỏa mãn điều kiện sau

a) $|z+(1-3i)|=|\overline{z}+3-2i|$ b) $2|z-i|=|z-\overline{z}+2i|$ c) $|z-(3-4i)|=2$

Bài 2. Trong các số phức thỏa mãn $|z-2+3i|=\frac{3}{2}$. Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ. Tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z-i|=|\overline{z}-3i-2|$. Trong các số phức thỏa mãn điều kiện trên, tìm số phức có môdun nhỏ nhất

Bài 4. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$.Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

Bài 5. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+1-5i|=|\overline{z}+3-i|$. Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

Bài 6. Trong các số phức z thỏa mãn $|z-2-i|=\sqrt{52}$, tìm số phức z mà $|z-4+2i|$ là nhỏ nhất.

Bài 7. Tìm số phức Z có mô đun lớn nhất và thỏa mãn điều kiện Trong tất cả các số phức z thỏa mãn $|z-2+2i|=1$, hãy tìm số phức có $|z|$ nhỏ nhất

Bài 8. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|\frac{(1+i)z}{1-i}+2\right|=1$.Tìm số phức có mô đun nhỏ nhất, lớn nhất.

2.5. Dạng 5. Phương trình bậc hai trên tập số phức

2.5.1. Vấn đề 1. Tìm căn bậc hai của một số phức. (Đọc thêm)

Cho số phức w = $a + bi$. Tìm căn bậc hai của số phức này.

Phương pháp:

+) Nếu w = 0 $\Rightarrow$ w có một căn bậc hai là 0

+) Nếu w = a > 0 (a $\in$ R) $\Rightarrow$ w có hai căn bậc hai là $\sqrt{a}$ và - $\sqrt{a}$

+) Nếu w = a < 0 (a $\in$ R) $\Rightarrow$ w có hai căn bậc hai là $\sqrt{-a}i$ và - $\sqrt{-a}i$

+) Nếu w = $a + bi$ (b $\neq$ 0)

Giả sử z = x +yi (x, y thuộc R) là một căn bậc hai của w $\Leftrightarrow$ z^2 = w $\Leftrightarrow$ $(x+yi)^2 = a + bi$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=a \\ 2xy=b \end{cases}$$

Để tìm căn bậc hai của w ta cần giải hệ này để tìm x, y. Mỗi cặp (x, y) nghiệm đúng phương trình đó cho ta một căn bậc hai của w.

***Nhận xét*: Mỗi số phức khác 0 có hai căn bậc hai là hai số đối nhau.**

Ví dụ: Tìm các căn bậc hai của mỗi số phức sau:

a) $4 + 6\sqrt{5}i$ b) $-1-2\sqrt{6}i$

Giải:

1) Giả sử z = x +yi (x, y thuộc R) là một căn bậc hai của $w = 4 + 6\sqrt{5}i$

Khi đó: $z^2 = w \Leftrightarrow (x+yi)^2 = 4 + 6\sqrt{5}i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ 2xy = 6\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3\sqrt{5}}{x} & (1) \\ x^2 - \dfrac{45}{x^2} = 4 & (2) \end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - 45 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

$x = 3 \Rightarrow y = \sqrt{5}$

$x = -3 \Rightarrow y = -\sqrt{5}$

Vậy số phức $w = 4 + 6\sqrt{5}i$ có hai căn bậc hai là: $z_1 = 3 + \sqrt{5}i$ và $z_2 = -3 - \sqrt{5}i$

2) Giả sử z = x +yi (x, y thuộc R) là một căn bậc hai của $w = -1-2\sqrt{6}i$

Khi đó: $z^2 = w \Leftrightarrow (x+yi)^2 = -1-2\sqrt{6}i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -1 \\ 2xy = -2\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-\sqrt{6}}{x} & (1) \\ x^2 - \dfrac{6}{x^2} = -1 & (2) \end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow x^4 + x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

$x = \sqrt{2} \Rightarrow y = -\sqrt{3}$

$x = -\sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{3}$

Vậy số phức $w = 4 + 6\sqrt{5}i$ có hai căn bậc hai là: $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{3}i$ và $z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{3}i$

2.5.2. Vấn đề 2: Giải phương trình bậc hai

Cho phương trình bậc hai: $Az^2 + Bz + C = 0$ (1) ($A, B, C \in \mathbb{C}$, $A \neq 0$)

Phương pháp:

Tính $\Delta = B^2 - 4AC$

*) Nếu $\Delta \neq 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $z_1 = \dfrac{-B+\delta}{2A}$, $z_2 = \dfrac{-B-\delta}{2A}$

(trong đó δ là một căn bậc hai của Δ).

*) Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép: $z_1 = z_2 = -\dfrac{B}{2A}$

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau trên tập số phức

$a)\ z^2 - z + 1 = 0 \qquad b)\ x^2 + 2x + 5 = 0 \qquad c)\ z^4 + 2z^2 - 3 = 0$

Giải:

$a)\ z^2 - z + 1 = 0$

- ✓ $\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2$
- ✓ căn bậc hai của Δ là $\pm i\sqrt{3}$
- ✓ Phương trình có nghiệm: $z_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ \ z_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$b)\ x^2 + 2x + 5 = 0$

- ✓ $\Delta = 4 - 20 = -16 = 16i^2$
- ✓ Căn bậc hai của Δ là $\pm 4i$.
- ✓ Phương trình có nghiệm: $x_1 = -1 - 2i,\ \ x_2 = -1 + 2i$

$c)\ z^4 + 2z^2 - 3 = 0$

- ✓ Đặt t = z^2.
- ✓ Phương trình trở thành:

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = 1 \\ z^2 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm 1 \\ z = \pm i\sqrt{3} \end{array}\right.$$

- ✓ Vậy phương trình có 4 nghiệm: -1, 1, $-i\sqrt{3},\ i\sqrt{3}$

Ví dụ 2: Giải các phương trình bậc hai sau:

a) $z^2 + 2z + 5 = 0$

b) $z^2 + (1-3i)z - 2(1 + i) = 0$ *(tham khảo)*

Giải:

a) Xét phương trình: $z^2 + 2z + 5 = 0$

Ta có: $\Delta = -4 = 4i^2 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm: $z_1 = -1 + 2i$ và $z_2 = -1 - 2i$.

b) Ta có: $\Delta = (1-3i)^2 + 8(1+i) = 2i = (1+i)^2$

nên 1+i là một căn bậc hai của số phức 2i

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm là: $z_1 = \dfrac{3i - 1 + 1 + i}{2} = 2i$; $z_2 = \dfrac{3i - 1 - 1 - i}{2} = -1 + i$

Ví dụ 3: Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$ Tính giá trị biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$

Giải:

Ta có

$$z^2+2z+10=0\Leftrightarrow (z+1)^2=-9\Leftrightarrow (z+1)^2=(3i)^2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-1+3i \\ z=-1-3i \end{array}\right.$$

$$z_1=-1+3i\Rightarrow |z_1|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$$

$$z_2=-1-3i\Rightarrow |z_2|=\sqrt{10}$$

Vậy $A=|z_1|^2+|z_2|^2=20$

Ví dụ 4: Cho số phức z thỏa mãn $z^2-6z+13=0$ Tính $\left|z+\dfrac{6}{z+i}\right|$

Giải:

$$z^2-6z+13=0\Leftrightarrow (z-3)^2=-4\Leftrightarrow (z-3)^2=(2i)^2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=3+2i \\ z=3-2i \end{array}\right.$$

Với $z=3+2i$ ta có $\left|z+\dfrac{6}{z+i}\right|=\left|3+2i+\dfrac{6}{3+3i}\right|=|4+i|=\sqrt{17}$

Với $z=3-2i$ ta có $\left|z+\dfrac{6}{z+i}\right|=\left|3-2i+\dfrac{6}{3-i}\right|=\dfrac{1}{5}|24-7i|=5$

Ví dụ 5: Giải phương trình sau trên tập hợp các số phức: $\dfrac{4z-3+7i}{z-i}=z-2i$ (tham khảo)

Giải

Điều kiện: $z\neq -1$

Phương trình đã cho tương đương với $z^2-(4+3i)z+1+7i=0$

Phương trình có biệt thức $\Delta=(4+3i)^2-4(1+7i)=3-4i=(2-i)^2$

Phương trình có hai nghiệm là: $z=1+2i$ và $z=3+i$.

➢ **Bài tập tự luyện**

Bài 1. Cho z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $2z^2-4z+11=0$. Tính giá trị của biểu thức A = $\dfrac{|z_1|^2+|z_2|^2}{(z_1+z_2)^2}$.

Bài 2. Giải phương trình: $z^2-2.\dfrac{(1+i)^{2009}}{(1-i)^{2008}}z+2i=0$ trên tập số phức. **(Tham khảo)**

Bài 3. Gọi $z_1;z_2$ là các nghiệm phức của phương trình: $z^2-4z+5=0$.Tính:

$(z_1-1)^{2011}+(z_2-1)^{2011}$

2.5.3. Vấn đề 3: Phương trình quy về bậc hai

- Đối với dạng này ta thường gặp phương trình bậc 3 hoặc phương trình bậc 4 dạng đặc biệt có thể quy được về bậc hai.

- Đối với phương trình bậc 3 (hoặc cao hơn), về nguyên tắc ta cố gắng phân tích vế trái thành nhân tử (để đưa về phương trình tích) từ đó dẫn đến việc giải phương trình bậc nhất và bậc hai.

- Đối với một số phương trình khác, ta có thể đặt ẩn phụ để quy về phương trình bậc hai mà ta đã biết cách giải.

a. Phương pháp phân tích thành nhân tử.

Ví dụ 1: Giải các phương trình: $z^3 - 27 = 0$

Giải: $z^3 - 27 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z^2 + 3z + 9) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z^2 + 3z + 9 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z_{2,3} = \dfrac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2} \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Ví dụ 2: Giải phương trình trên tập hợp số phức: $z^4 - z^3 + 6z^2 - 6z - 16 = 0$

Giải:

Nhận biết được hai nghiệm z=-1 và z=2

Phương trình đã cho tương đương với $(z-2)(z+1)(z^2+8) = 0$

Giải ra ta được bốn nghiệm: $z = -1;\ z = 2;\ z = \pm 2\sqrt{2}i$

Ví dụ 3: Cho phương trình sau: $z^3 + (2 - 2i)z^2 + (5 - 4i)z - 10i = 0$ (1)biết rằng phương trình có nghiệm thuần ảo. **(Tham khảo)**

Giải:

Đặt $z = yi$ với $y \in R$

Phương trình (1) có dạng: $(iy)^3 + (2i-2)(yi)^2 + (5-4i)(yi) - 10i = 0$

$\Leftrightarrow -iy^3 - 2y^2 + 2iy^2 + 5iy + 4y - 10i = 0 = 0 + 0i$

đồng nhất hoá hai vế ta được:

$\begin{cases} -2y^2 + 4y = 0 \\ -y^3 + 2y^2 + 5y - 10 = 0 \end{cases}$ giải hệ này ta được nghiệm duy nhất $y = 2$

Suy ra phương trình (1) có nghiệm thuần ảo $z = 2i$.

* Vì phương trình (1) nhận nghiệm 2i

$\Rightarrow$ vế trái của (1) có thể phân tích dưới dạng:

$z^3 + (2 - 2i)z^2 + (5 - 4i)z - 10i = (z - 2i)(z^2 + az + b)$ $(a, b \in R)$

đồng nhất hoá hai vế ta giải được a = 2 và b = 5.

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow (z-2i)(z^2+2z+5)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z=2i \\ z^2+2z+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2i \\ z=-1-2i \\ z=-1+2i \end{cases}$$

Vậy phương trình (1) có 3 nghiệm.

Ví dụ 4: Giải phương trình $z^3-(3-i)z^2-(2-i)z+16-2i=0$ biết rằng phương trình có 1 nghiệm thực. **(Tham khảo)**

Giải

Gọi nghiệm thực là z_0 ta có:

$$z_0^3-(3-i)z_0^2-(2-i)z_0+16-2i=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_0^3-3z_0^2-2z_0+16=0 \\ z_o^2+z_0-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow z_0=-2$$

Khi đó ta có phương trình $(z+2)\left(z^2-(5-i)z+8-i\right)=0$

Tìm được các nghiệm của phương trình là z= -2; z= 2+ i; z= 3- 2i

Ví dụ 5: Giải phương trình $z^3-(2-3i)z^2+3(1-2i)z+9i=0$ biết rằng phương trình có một nghiệm thuần ảo. (tham khảo)

Giải

Giả sử phương trình có nghiệm thuần ảo là bi, $b \in R$

Thay vào phương trình ta được:

$$(bi)^3-(2-3i)(bi)^2+3(1-2i)(bi)+9i=0$$

$$\Leftrightarrow 2b^2+6b+\left(-b^3-3b^2+3b+9\right)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2+6b=0 \\ -b^3-3b^2+3b+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow b=-3$$

$$\Rightarrow z=-3i$$

Phương trình có thể phân tích thành $(z+3i)\left(z^2-2z+3\right)=0$

Các nghiệm của phương trình là z= -3i; $z=1\pm\sqrt{2}i$

b. Phương pháp đặt ẩn phụ.

Ví dụ 1: Giải phương trình sau trên tập số phức $(z^2 + z)^2 + 4(z^2 + z) - 12 = 0$

Giải:

Đặt $t = z^2 + z$, khi đó phương trình đã cho có dạng:

$$t^2 + 4t - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -6 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 + z - 6 = 0 \\ z^2 + z - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \dfrac{-1+\sqrt{23}i}{2} \\ z = \dfrac{-1-\sqrt{23}i}{2} \\ z = 1 \\ z = -2 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Ví dụ 2: Giải phương trình sau trên tập số phức $(z^2 + 3z + 6)^2 + 2z(z^2 + 3z + 6) - 3z^2 = 0$

Giải:

Đặt $t = z^2 + 3z + 6$ phương trình đã cho có dạng:

$$t^2 + 2zt - 3z^2 = 0 \Leftrightarrow (t - z)(t + 3z) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = z \\ t = -3z \end{array}\right.$$

+ Với $t = z \Leftrightarrow z^2 + 3z + 6 - z = 0 \Leftrightarrow z^2 + 2z + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -1+\sqrt{5}i \\ z = -1-\sqrt{5}i \end{array}\right.$

+ Với $t = -3z \Leftrightarrow z^2 + 3z + 6 + 3z = 0 \Leftrightarrow z^2 + 6z + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -3+\sqrt{3} \\ z = -3-\sqrt{3} \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $(z^2 - z)(z+3)(z+2) = 10,\ z \in C$.

Giải:

PT $\Leftrightarrow z(z+2)(z-1)(z+3) = 10 \Leftrightarrow (z^2 + 2z)(z^2 + 2z - 3) = 0$

Đặt $t = z^2 + 2z$. Khi đó phương trình (8) trở thành:

Đặt $t = z^2 + 2z$. Khi đó phương trình (8) trở thành

$$t^2 - 3t - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = -1 \pm i \\ z = -1 \pm \sqrt{6} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có các nghiệm: $z = -1 \pm \sqrt{6}\,;\, z = -1 \pm i$

Ví dụ 4: Giải phương trình sau trên tập số phức $z^4 - z^3 + \dfrac{z^2}{2} + z + 1 = 0$ (tham khảo)

Giải:

Nhận xét z=0 không là nghiệm của phương trình (1) vậy $z \neq 0$

Chia hai vế PT (1) cho z^2 ta được: $(z^2+\frac{1}{z^2})-(z-\frac{1}{z})+\frac{1}{2}=0$ (2)

Đặt t=z-$\frac{1}{z}$ Khi đó $t^2=z^2+\frac{1}{z^2}-2 \Leftrightarrow z^2+\frac{1}{z^2}=t^2+2$

Phương trình (2) có dạng: $t^2-t+\frac{5}{2}=0$ (3)

$\Delta=1-4.\frac{5}{2}=-9=9i^2$

PT (3) có 2 nghiệm t=$\frac{1+3i}{2}$,t=$\frac{1-3i}{2}$

Với t=$\frac{1+3i}{2}$ ta có $z-\frac{1}{z}=\frac{1+3i}{2} \Leftrightarrow 2z^2-(1+3i)z-2=0(4)$

Có $\Delta=(1+3i)^2+16=8+6i=9+6i+i^2=(3+i)^2$

PT(4) có 2 nghiệm: z=$\frac{(1+3i)+(3+i)}{4}=1+i$,z=$\frac{(1+3i)-(3+i)}{4}=\frac{i-1}{2}$

Với t=$\frac{1-3i}{2}$ ta có $z-\frac{1}{z}=\frac{1-3i}{2} \Leftrightarrow 2z^2-(1-3i)z-2=0(4)$

Có $\Delta=(1-3i)^2+16=8-6i=9-6i+i^2=(3-i)^2$

PT(4) có 2 nghiệm: z=$\frac{(1-3i)+(3-i)}{4}=1-i$,z=$\frac{(1-3i)-(3-i)}{4}=\frac{-i-1}{2}$

Vậy PT đã cho có 4 nghiệm: z=1+i; z=1-i ; z=$\frac{i-1}{2}$; z=$\frac{-i-1}{2}$

➢ **Bài tập tự luyện**

Bài 1. Giải phương trình $z^3+(1-2i)z^2+(1-i)z-2i=0$., biết rằng phương trình có một nghiệm thuần ảo.(tham khảo)

Bài 2. Cho phương trình: $z^3-(4+i)z^2+(3+8i)z-15i=0$. Biết phương trình có một nghiệm thực. Gọi z_1, z_2, z_3 là các nghiệm của phương trình. Hãy tính $|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2$

Bài 3. Gọi z_1,z_2,z_3,z_4 là bốn nghiệm của phương trình $z^4-z^3-2z^2+6z-4=0$ trên tập số phức tính tổng $S=\frac{1}{z_1^2}+\frac{1}{z_2^2}+\frac{1}{z_3^2}+\frac{1}{z_4^2}$

Bài 4. Giải các phương trình trên tập số phức:

a) $\left(\frac{z+i}{i-z}\right)^3=1$

b) $(z^2+1)^2+(z+3)^2=0$

c) $z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 16z + 12 = 0$