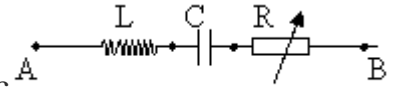


BÀI TOÁN CỰC TRỊ TRONG MẠCH ĐIỆN ĐIỆN XOAY CHIỀU

1. Mạch điện xoay chiều RLC có R thay đổi

Bài toán tổng quát 1:



Cho mạch điện xoay chiều RLC trong đó R có thể thay đổi được (R còn được gọi là biến trở). Tìm giá trị của R để :

- Cường độ hiệu dụng I của mạch đạt giá trị cực đại, (nếu có)
- Cường độ hiệu dụng I của mạch đạt giá trị cực tiểu, (nếu có)
- Điện áp hiệu dụng hai đầu R đạt cực đại, (nếu có)
- Điện áp hiệu dụng hai đầu R đạt cực tiểu, (nếu có)
- Công suất tỏa nhiệt trên điện trở R đạt cực đại

* Hướng dẫn giải:

Nguyên tắc chung: Để tìm cực trị của một biểu thức nào đó thì chúng ta xuất phát từ công thức tổng quát của chúng, thực hiện các phép biến đổi theo quy tắc nếu tử số và mẫu số đều là đại lượng biến thiên thì chỉ để một biểu thức thay đổi (chia cả tử và mẫu cho tử số chẳng hạn..)

Bổ đề :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

- Bất đẳng thức Cauchy : Cho hai số không âm a, b khi đó

Dấu bằng xảy ra khi a = b

- Hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$, với $a > 0$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

$$x = -\frac{b}{2a}; y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{\Delta'}{a}$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} \Rightarrow I_{\max} \Leftrightarrow Z_{\min} \Rightarrow R = 0$$

- Cường độ hiệu dụng

vậy $R = 0$ thì I_{\max} và giá trị $I_{\max} = \frac{U}{|Z_L - Z_C|}$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} \Rightarrow I_{\min} \Leftrightarrow Z_{\max} \Leftrightarrow R \rightarrow \infty$$

-

Vậy khi R rất lớn thì cường độ dòng điện rất nhỏ và giảm dần về 0, (đúng với khái niệm điện trở : cho biết khả năng cản trở sự di chuyển của các điện tích, tức là cản trở dòng điện)

- Điện áp hiệu dụng hai đầu điện trở là:

$$U_R = IR = \frac{U}{Z} \cdot R = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} \cdot R = \frac{U}{\sqrt{1 + \left(\frac{Z_L - Z_C}{R}\right)^2}} \Rightarrow (U_R)_{\max} \Leftrightarrow \left(\frac{Z_L - Z_C}{R}\right)_{\min}^2$$

$$\Leftrightarrow R \rightarrow \infty \Rightarrow (U_R)_{\max} \rightarrow \infty$$

-
- d. Ta có:

$$U_R = IR = \frac{U}{Z} \cdot R = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} \cdot R = \frac{U}{\sqrt{1 + \left(\frac{Z_L - Z_C}{R}\right)^2}} \Rightarrow (U_R)_{\min} \Leftrightarrow \left(\frac{Z_L - Z_C}{R}\right)_{\max}^2$$

$$\Leftrightarrow R = 0 \Rightarrow (U_R)_{\min} = 0$$

e. Công suất tỏa nhiệt trên R (cũng là trên toàn mạch):

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{Z^2} R = \frac{U^2}{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} R = \frac{U^2}{R + \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R}} = \frac{U^2}{y} \quad \text{với } y = R + \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$y = R + \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R} \geq 2\sqrt{R \cdot \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R}} = 2|Z_L - Z_C| \Rightarrow y_{\min} = 2|Z_L - Z_C|$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } R = \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R} \Rightarrow R = |Z_L - Z_C|$$

$$P_{\max} = \frac{U^2}{y_{\min}} = \frac{U^2}{2|Z_L - Z_C|}$$

Khi đó công suất cực đại của mạch

Vậy mạch điện xoay chiều RLC có R thay đổi đạt công suất tỏa nhiệt trên R cực đại:

$$P_{\max} = \frac{U^2}{y_{\min}} = \frac{U^2}{2|Z_L - Z_C|}$$

Khi $R = |Z_L - Z_C|$

Chú ý:

• Trong trường hợp P_{\max} thì hệ số công suất của mạch khi đó là

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + R^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ do } R = |Z_L - Z_C|$$

• Thông thường khi mạch điện có R thay đổi thì đề bài thường yêu cầu tìm R để P_{\max} nên các em chú ý trường hợp này hơn.

Ví dụ 1: Cho mạch điện RLC, R có thể thay đổi được, điện áp hai đầu mạch là:

$$u = 150\sqrt{2}\cos(100\pi)V, L = \frac{1}{\pi}H, C = \frac{1}{2\pi}10^{-4}F. \text{ Tìm R để:}$$

a. Mạch tiêu thụ công suất $P = 90W$ và viết biểu thức của cường độ hiệu dụng trong mạch khi đó.

b. Công suất tỏa nhiệt trên mạch cực đại P_{\max} và tính giá trị P_{\max}

* **Hướng dẫn giải:**

Ta có: $Z_L = 200\Omega, Z_C = 125\Omega, U = 150V$

a. Công suất của mạch tiêu thụ chính là công suất tỏa nhiệt trên điện trở R:

$$P = I^2 R \Leftrightarrow 90 = \frac{U^2}{Z^2} R \Leftrightarrow \frac{150^2 R}{R^2 + 75^2} = 90 \Leftrightarrow 90R^2 - 150^2 R + 90 \cdot 75^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} R = 225\Omega \\ R = 25\Omega \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Với } R = 225\Omega \Rightarrow Z = \sqrt{225^2 + 75^2} = 75\sqrt{10}\Omega \Rightarrow I_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{150\sqrt{2}}{75\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{5}}A$$

Độ lệch pha của u và i thỏa

$$\text{mãn } \tan\varphi = \frac{Z_L - Z_C}{R} = \frac{75}{225} = \frac{1}{3} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \varphi_L - \varphi_C \Rightarrow \varphi_C = -\arctan\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\text{Biểu thức cường độ dòng điện là } i = \frac{2}{\sqrt{5}} \cos\left(100\pi t - \arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)A$$

$$\bullet \text{ Với } R = 25\Omega \Rightarrow Z = \sqrt{25^2 + 75^2} = 25\sqrt{10}\Omega \Rightarrow I_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{150\sqrt{2}}{25\sqrt{10}} = \frac{6}{\sqrt{5}}A$$

$$\text{Độ lệch pha của u và i thỏa mãn } \tan\varphi = \frac{Z_L - Z_C}{R} = \frac{75}{25} = 3 \Rightarrow \varphi = \arctan(3) = \varphi_L - \varphi_C \Rightarrow \varphi_C = -\arctan(3)$$

Biểu thức cường độ dòng điện là $i = \frac{6}{\sqrt{5}} \cos(100\pi t - \arctan(3))A$

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{Z^2} R = \frac{U^2}{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} R = \frac{U^2}{R + \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R}} = \frac{U^2}{y}$$

b.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$y = R + \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R} \geq 2\sqrt{R \cdot \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R}} = 2|Z_L - Z_C| \Rightarrow y_{\min} = 2|Z_L - Z_C|$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } R = \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R} \Rightarrow R = |Z_L - Z_C| = 75\Omega$$

$$\text{Khi đó công suất cực đại của mạch } P_{\max} = \frac{U^2}{y_{\min}} = \frac{U^2}{2|Z_L - Z_C|} = \frac{150^2}{2 \cdot 75} = 150W$$

Vậy khi $R = 75\Omega$ thì $P_{\max} = 150W$

* **Nhận xét**: Trong mạch điện RLC mà cuộn dây có thêm điện trở hoạt động r thì ta có thể tìm công suất mạch cực đại và công suất tỏa nhiệt trên R cực đại

• Công suất tỏa nhiệt P trên toàn mạch cực đại:

$$P = I^2 (R+r) = \frac{U^2}{Z^2} (R+r) = \frac{U^2}{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2} (R+r) = \frac{U^2}{(R+r) + \frac{(Z_L - Z_C)^2}{(R+r)}} = \frac{U^2}{y}$$

$$\text{với } y = (R+r) + \frac{(Z_L - Z_C)^2}{(R+r)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$y = (R+r) + \frac{(Z_L - Z_C)^2}{(R+r)} \geq 2\sqrt{(R+r) \cdot \frac{(Z_L - Z_C)^2}{(R+r)}} = 2|Z_L - Z_C| \Rightarrow y_{\min} = 2|Z_L - Z_C|$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } (R+r) = \frac{(Z_L - Z_C)^2}{(R+r)} \Leftrightarrow (R+r) = |Z_L - Z_C| \Leftrightarrow R = |Z_L - Z_C| - r$$

$$\text{Khi đó công suất cực đại của mạch } P_{\max} = \frac{U^2}{y_{\min}} = \frac{U^2}{2|Z_L - Z_C|}$$

Vậy mạch điện xoay chiều RLC có R thay đổi và cuộn dây không thuần cảm đạt công suất

$$\text{tỏa nhiệt trên toàn mạch đạt giá trị cực đại } P_{\max} = \frac{U^2}{y_{\min}} = \frac{U^2}{2|Z_L - Z_C|} \text{ khi } R = |Z_L - Z_C| - r$$

• Công suất tỏa nhiệt trên điện trở R , (P_R) cực đại:

$$P_R = I^2 R = \frac{U^2}{Z^2} R = \frac{U^2}{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2} R = \frac{U^2}{\frac{(R^2 + 2Rr + r^2)}{R} + \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R}} = \frac{U^2}{y}$$

$$\text{với } y = \frac{(R^2 + 2Rr + r^2)}{R} + \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$y = \frac{(R^2 + 2Rr + r^2)}{R} + \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R} = R + 2r + \frac{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}{R} = 2r + R + \frac{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}{R} \geq 2r + 2\sqrt{R \cdot \frac{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}{R}}$$

$$= 2r + 2\sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2} \Rightarrow y_{\min} = 2r + 2\sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}$$

Dấu bằng xảy ra khi
$$R = \frac{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}{R} \Leftrightarrow R = \sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}$$

$$P_{\max} = \frac{U^2}{y_{\min}} = \frac{U^2}{2r + 2\sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}}$$

Khi đó công suất cực đại của mạch

Vậy mạch điện xoay chiều RLC có R thay đổi và cuộn dây không thuần cảm đạt công suất

tỏa nhiệt trên R cực đại
$$P_{\max} = \frac{U^2}{y_{\min}} = \frac{U^2}{2r + 2\sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}} \text{ khi: } R = \sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}$$

Ví dụ 2: Cho mạch điện xoay chiều gồm cuộn dây có $r = 50\Omega$, $L = \frac{4}{10\pi}H$ và tụ điện có điện

dung $C = \frac{10^{-4}}{\pi}F$ và điện trở thuần R thay đổi được. Tất cả được mắc nối tiếp với nhau, rồi đặt vào hai đầu đoạn mạch có hiệu điện thế xoay chiều $u = 100\sqrt{2}\cos(100\pi t)V$. Tìm R để:

a. Hệ số công suất của mạch là $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b. Công suất tỏa nhiệt trên toàn mạch đạt cực đại. Tính giá trị cực đại đó.

c. Công suất tỏa nhiệt trên điện trở R cực đại. Tính giá trị cực đại của công suất đó.

* **Hướng dẫn giải:**

Ta có $Z_L = 40\Omega, Z_C = 100\Omega, U = 100V$

$$\cos\varphi = \frac{R+r}{Z} \Leftrightarrow \frac{R+r}{\sqrt{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

a. Hệ số công suất của mạch là

$$\frac{R+50}{\sqrt{(R+50)^2 + 60^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 4(R+50)^2 = 3[(R+50)^2 + 60^2]$$

Thay số ta được

Giải phương trình trên ta được các nghiệm R cần tìm

b. Công suất tiêu thụ trên đoạn mạch đạt giá trị cực đại

khi $R+r = |Z_L - Z_C| \Leftrightarrow R+50 = 60 \Rightarrow R = 10\Omega$

$$P_{\max} = \frac{U^2}{2|Z_L - Z_C|} = \frac{100^2}{2 \cdot 60} = \frac{250}{3}W$$

Khi đó công suất cực đại của mạch

c. Ta có công suất tỏa nhiệt trên R là:

$$P_k = I^2 R = \frac{U^2}{Z^2} R = \frac{U^2}{(R+r)^2 + (Z_L - Z_C)^2} R = \frac{U^2}{\frac{(R^2 + 2Rr + r^2)}{R} + \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R}} = \frac{U^2}{y}$$

với
$$y = \frac{(R^2 + 2Rr + r^2)}{R} + \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\begin{aligned} y &= \frac{(R^2 + 2Rr + r^2)}{R} + \frac{(Z_L - Z_C)^2}{R} = R + 2r + \frac{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}{R} = 2r + R + \frac{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}{R} \geq 2r + 2\sqrt{R \cdot \frac{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}{R}} \\ &= 2r + 2\sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2} \Rightarrow y_{\min} = 2r + 2\sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2} \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $R = \frac{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}{R} \Leftrightarrow R = \sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{50^2 + 60^2} = 10\sqrt{61} (\Omega)$

$$P_{\max} = \frac{U^2}{y_{\min}} = \frac{U^2}{2r + 2\sqrt{r^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = \frac{100^2}{100 + 20\sqrt{61}} (W)$$

Khi đó công suất cực đại của mạch:

Bài toán tổng quát 2:

Cho mạch điện RLC có R thay đổi. Điện áp hiệu dụng hai đầu mạch điện là U. Khi $R = R_1$ và $R = R_2$ thì mạch tiêu thụ cùng một công suất (hay $P_1 = P_2$) Chứng minh rằng:

a. $R_1 R_2 = (Z_L - Z_C)^2$

b. Công suất tiêu thụ $P = \frac{U^2}{R_1 + R_2}$

* **Hướng dẫn giải:**

a. Theo giả thiết ta có $P_1 = P_2$

$$\Leftrightarrow I_1^2 R_1 = I_2^2 R_2 \Leftrightarrow \frac{U^2}{R_1^2 + (Z_L - Z_C)^2} R_1 = \frac{U^2}{R_2^2 + (Z_L - Z_C)^2} R_2 \Leftrightarrow R_1 [R_2^2 + (Z_L - Z_C)^2] = R_2 [R_1^2 + (Z_L - Z_C)^2]$$

$$\Leftrightarrow R_1 R_2^2 + R_1 (Z_L - Z_C)^2 = R_2 R_1^2 + R_2 (Z_L - Z_C)^2 \Leftrightarrow R_1 R_2 (R_2 - R_1) = (Z_L - Z_C)^2 (R_2 - R_1)$$

$$\Leftrightarrow R_1 R_2 = (Z_L - Z_C)^2$$

b. Ta có $P = P_1 = P_2 = I_1^2 R_1 \Leftrightarrow P = \frac{U^2}{R_1^2 + (Z_L - Z_C)^2} R_1 = \frac{U^2}{R_1^2 + R_1 R_2} R_1 = \frac{U^2}{R_1 + R_2}$

Vậy mạch RLC có R thay đổi mà $R = R_1$ và $R = R_2$ thì $P_1 = P_2$ sẽ thỏa mãn $\begin{cases} R_1 R_2 = (Z_L - Z_C)^2 \\ P = \frac{U^2}{R_1 + R_2} \end{cases}$

Ví dụ: (Đại học – 2009)

Đặt điện áp xoay chiều có giá trị hiệu dụng không đổi vào hai đầu đoạn mạch gồm biến trở R mắc nối tiếp với tụ điện. Dung kháng của tụ điện là 100Ω . Khi điều chỉnh R thì tại hai giá trị R_1 và R_2 công suất tiêu thụ của đoạn mạch như nhau. Biết điện áp hiệu dụng giữa hai đầu tụ điện khi $R = R_1$ bằng hai lần điện áp hiệu dụng giữa hai đầu tụ điện khi $R = R_2$. Các giá trị R_1 và R_2 là:

- A. $R_1 = 50\Omega, R_2 = 100\Omega$.
- B. $R_1 = 40\Omega, R_2 = 250\Omega$.
- C. $R_1 = 50\Omega, R_2 = 200\Omega$.
- D. $R_1 = 25\Omega, R_2 = 100\Omega$.

* **Hướng dẫn giải:**

Theo giả thiết ta có $P_1 = P_2$

$$\Leftrightarrow I_1^2 R_1 = I_2^2 R_2 \Leftrightarrow \frac{U^2}{R_1^2 + Z_C^2} R_1 = \frac{U^2}{R_2^2 + Z_C^2} R_2 \Leftrightarrow R_1 [R_2^2 + Z_C^2] = R_2 [R_1^2 + Z_C^2]$$

$$R_1 R_2^2 + R_1 Z_C^2 = R_2 R_1^2 + R_2 Z_C^2 \Leftrightarrow R_1 R_2 (R_2 - R_1) = Z_C^2 (R_2 - R_1) \Leftrightarrow R_1 R_2 = Z_C^2 \Leftrightarrow R_1 R_2 = 100^2, (1)$$

Mặt khác, gọi U_{1C} là điện áp tụ điện khi $R = R_1$ và U_{2C} là điện áp tụ điện khi $R = R_2$

$$U_{1C} = 2U_{2C} \Leftrightarrow I_1 Z_C = 2I_2 Z_C \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = 2$$

Khi đó theo bài ta được

$$P_1 = P_2 \Leftrightarrow I_1^2 R_1 = I_2^2 R_2 \Leftrightarrow \frac{R_2}{R_1} = \left(\frac{I_1}{I_2}\right)^2 = 4$$

Lại có

Giải (1) và (2) ta được $R_1 = 50\Omega$, $R_2 = 200\Omega$.

Ví dụ 2: Một mạch điện gồm một tụ điện C, một cuộn cảm L thuần cảm kháng và một biến trở R được mắc nối tiếp. Đặt vào hai đầu mạch điện một hiệu điện thế xoay

chiều $u = 120\sqrt{2}\cos(120\pi t)V$. Biết rằng ứng với hai giá trị của biến trở: $R_1 = 18\Omega$ và $R_2 = 32\Omega$ thì công suất tiêu thụ P trên đoạn mạch là như nhau. Công suất P của đoạn mạch có thể nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

* **Hướng dẫn giải:**

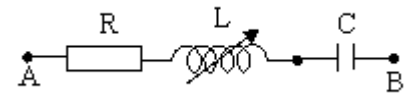
$$P = \frac{U^2}{R_1 + R_2} = \frac{120^2}{18 + 32} = 288W$$

Theo chứng minh công thức ở trên ta được

2. Mạch điện xoay chiều RLC có L thay đổi

Bài toán tổng quát:

Cho mạch điện xoay chiều RLC trong đó L có thể thay đổi được. Tìm giá trị của L để:



- Cường độ hiệu dụng I của mạch đạt giá trị cực đại
- Công suất tỏa nhiệt của mạch đạt cực đại. Tính giá trị P_{\max}
- Điện áp hiệu dụng hai đầu L đạt cực đại

* **Hướng dẫn giải:**

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} \Rightarrow I_{\max} \Leftrightarrow Z_{\min} \Rightarrow Z_L - Z_C = 0 \Leftrightarrow L = \frac{1}{\omega^2 C}$$

a. Cường độ hiệu dụng

vậy $L = \frac{1}{\omega^2 C}$ thì I_{\max} và giá trị $I_{\max} = \frac{U}{R}$

b. Công suất tỏa nhiệt trên mạch $P = I^2 R$. Do R không đổi

nên $P_{\max} \Leftrightarrow I_{\max} \Leftrightarrow Z_L - Z_C = 0 \Rightarrow L = \frac{1}{\omega^2 C}$

Giá trị $P_{\max} = I_{\max}^2 R = \frac{U^2}{R}$

c. Điện áp hiệu dụng hai đầu cuộn cảm là:

$$U_L = I Z_L = \frac{U}{Z} \cdot Z_L = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} \cdot Z_L = \frac{U}{\sqrt{\frac{R^2}{Z_L^2} + \left(\frac{Z_L - Z_C}{Z_L}\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{\frac{R^2}{Z_L^2} + \left(1 - \frac{Z_C}{Z_L}\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{y}} \Rightarrow (U_L)_{\max} \Leftrightarrow y_{\min}$$

Với $y = \frac{R^2}{Z_L^2} + \left(1 - \frac{Z_C}{Z_L}\right)^2$, đặt $\frac{1}{Z_L} = x \Rightarrow y = R^2 x^2 + (1 - Z_C x)^2 = (R^2 + Z_C^2)x^2 - 2Z_C x + 1$

Do hệ số $a = (R^2 + Z_C^2) > 0$ hàm số y đạt giá trị nhỏ nhất khi:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2Z_C}{2(R^2 + Z_C^2)} \Leftrightarrow \frac{1}{Z_L} = \frac{Z_C}{(R^2 + Z_C^2)} \Rightarrow Z_L = \frac{R^2 + Z_C^2}{Z_C}$$

Khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số y là:

$$y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{\Delta'}{a} = -\frac{Z_c^2 - (R^2 + Z_c^2)}{R^2 + Z_c^2} = \frac{R^2}{R^2 + Z_c^2}$$

$$\Rightarrow (U_L)_{\max} = \frac{U}{\sqrt{y_{\min}}} = \frac{U}{\sqrt{\frac{R^2}{R^2 + Z_c^2}}} = \frac{U}{R} \sqrt{R^2 + Z_c^2}$$

Vậy $(U_L)_{\max} = \frac{U}{R} \sqrt{R^2 + Z_c^2}$ khi $Z_L = \frac{R^2 + Z_c^2}{Z_c}$

Ví dụ điển hình:

Ví dụ 1: Cho mạch điện như hình vẽ. Trong đó $R = 100\sqrt{3}\Omega$, $C = \frac{10^{-4}}{2\pi} F$. Cuộn dây thuần cảm có độ tự cảm L thay đổi được. Điện áp giữa hai đầu đoạn mạch là $u = 200\cos(100\pi t)$ (V). Xác định độ tự cảm của cuộn dây trong các trường hợp sau:

- Hệ số công suất của mạch $\cos\varphi = 1$.
- Hệ số công suất của mạch $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Điện áp hiệu dụng trên cuộn cảm L là cực đại.

*** Hướng dẫn giải:**

Ta có $Z_c = \frac{1}{\omega C} = 200\Omega$

$$\cos\varphi = 1 \Leftrightarrow \frac{R}{Z} = 1 \Leftrightarrow R = Z \Leftrightarrow Z_L = Z_c \Rightarrow L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{(100\pi)^2 \cdot \frac{10^{-4}}{2\pi}} = \frac{2}{\pi} H$$

a. Hệ số công suất

b. Khi $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{R}{Z} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2R = \sqrt{3}Z \Leftrightarrow 4R^2 = 3Z^2 = 3[R^2 + (Z_L - Z_c)^2] \Leftrightarrow R^2 = 3(Z_L - Z_c)^2$

$$\Leftrightarrow Z_L - Z_c = \pm \frac{R}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_L = 300\Omega \\ Z_L = 100\Omega \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L = \frac{3}{\pi} H \\ L = \frac{1}{\pi} H \end{cases}$$

c. Theo chứng minh trên ta được khi $Z_L = \frac{R^2 + Z_c^2}{Z_c} = \frac{(100\sqrt{3})^2 + 200^2}{200} = 350\Omega \Rightarrow L = \frac{35}{10\pi} H$ thì điện

áp hiệu dụng hai đầu L đạt cực đại. Giá trị cực đại:

$$(U_L)_{\max} = \frac{U}{R} \sqrt{R^2 + Z_c^2} = \frac{100\sqrt{2}}{100\sqrt{3}} \sqrt{(100\sqrt{3})^2 + 200^2} = \frac{100\sqrt{42}}{3} V$$

Ví dụ 2: Cho mạch điện RLC, L có thể thay đổi được, điện áp hai đầu mạch

là $u = 170\sqrt{2}\cos(100\pi t)V$. Các giá trị $R = 80\Omega$, $C = \frac{10^{-4}}{2\pi} F$. Tìm L để:

- Mạch có công suất cực đại. Tính P_{\max}
- Mạch có công suất $P = 80W$
- Điện áp hiệu dụng giữa hai đầu L đạt cực đại. Tính giá trị cực đại đó.

*** Hướng dẫn giải:**

Ta có $R = 80\Omega, Z_C = 200\Omega$

a. Công suất của mạch $P = I^2.R$. Do R không đổi nên:

$$P_{\max} \Leftrightarrow I_{\max} \Leftrightarrow Z_L - Z_C = 0 \Leftrightarrow Z_L = Z_C = 200\Omega \Rightarrow L = \frac{2}{\pi} \text{ H}$$

Khi đó $P_{\max} = I_{\max}^2.R = \frac{U^2}{R^2}.R = \frac{U^2}{R} = \frac{170^2}{80} \text{ W}$

b. $P = I^2.R = 200 \Leftrightarrow \frac{U^2}{Z^2}.R = 80 \Leftrightarrow \frac{170^2.80}{80^2 + (Z_L - 200)^2} = 80 \Leftrightarrow \begin{cases} Z_L = 350\Omega \\ Z_L = 50\Omega \end{cases}$

Từ đó ta tìm được hai giá trị của L thỏa mãn đề bài là $\begin{cases} L = \frac{3,5}{\pi} \text{ F} \\ L = \frac{1}{2\pi} \text{ F} \end{cases}$

c. Điện áp hiệu dụng hai đầu L đạt cực đại khi $Z_L = \frac{R^2 + Z_C^2}{Z_C} = \frac{80^2 + 200^2}{200} = 232\Omega \Rightarrow L = \frac{232}{100\pi} \text{ H}$

Giá trị cực đại $(U_L)_{\max} = \frac{U}{R} \sqrt{R^2 + Z_C^2} = \frac{170}{80} \sqrt{80^2 + 200^2} = 85\sqrt{29} \text{ V}$

Ví dụ 3: Cho mạch điện RLC, điện áp hai đầu mạch điện là $u = 200\sqrt{2} \cos(100\pi t)$ (V). L thay đổi được. Khi mạch có $L = L_1 = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ (H) và $L = L_2 = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$ (H). Thì mạch có cùng cường độ dòng điện hiệu dụng nhưng giá trị tức thời lệch pha nhau góc $\frac{2\pi}{3}$.

a. Tính R và C

b. Viết biểu thức của i

* **Hướng dẫn giải:**

Ta có $Z_{L_1} = 300\sqrt{3}\Omega, Z_{L_2} = 100\sqrt{3}\Omega$

a. Do $I_1 = I_2 \Leftrightarrow Z_1 = Z_2 \Leftrightarrow R^2 + (Z_{L_1} - Z_C)^2 = R^2 + (Z_{L_2} - Z_C)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} Z_{L_1} - Z_C = Z_{L_2} - Z_C \\ Z_{L_1} - Z_C = Z_C - Z_{L_2} \end{cases}$

Theo bài thì u_1 và u_2 lệch pha nhau góc $\frac{2\pi}{3}$ nên có một biểu thức là nhanh pha hơn i và một biểu thức chậm pha hơn i.

Do $Z_{L_1} = 300\sqrt{3}\Omega > Z_{L_2} = 100\sqrt{3}\Omega$ nên u_1 nhanh pha hơn i còn u_2 chậm pha hơn i.

Khi đó $|\varphi_1| + |\varphi_2| = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \tan(|\varphi_1| + |\varphi_2|) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\tan|\varphi_1| + \tan|\varphi_2|}{1 - \tan|\varphi_1|\tan|\varphi_2|} = -\sqrt{3}, (1)$

Trong đó $\tan|\varphi_1| = \frac{Z_{L_1} - Z_C}{R} = \frac{100\sqrt{3}}{R}; \tan|\varphi_2| = \frac{Z_C - Z_{L_2}}{R} = \frac{100\sqrt{3}}{R}$

(1) $\Leftrightarrow \frac{\frac{100\sqrt{3}}{R} + \frac{100\sqrt{3}}{R}}{1 - \left(\frac{100\sqrt{3}}{R}\right)^2} = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{3.10^4}{R^2} - \frac{200}{R} - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} R = -300\Omega \\ R = 100\Omega \end{cases}$

Vậy các giá trị cần tìm là $R = 100\Omega, C = \frac{10^{-4}}{2\sqrt{3}\pi} \text{ F}$

b. Viết biểu thức của i

- Với $R = 100\Omega, Z_c = 200\sqrt{3}\Omega, Z_L = 300\sqrt{3}\Omega$

Tổng trở của mạch $Z = \sqrt{100^2 + (100\sqrt{3})^2} = 200\Omega \Rightarrow I_0 = \frac{200\sqrt{2}}{200} = \sqrt{2}A$

Độ lệch pha của u và i: $\tan \varphi = \frac{Z_L - Z_c}{R} = \frac{100\sqrt{3}}{100} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} = \varphi_u - \varphi_i \Rightarrow \varphi_i = -\frac{\pi}{3}$

Biểu thức của cường độ dòng điện i là: $i = \sqrt{2}\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{3}\right)A$

- Với $R = 100\Omega, Z_c = 200\sqrt{3}\Omega, Z_L = 100\sqrt{3}\Omega$

Tổng trở của mạch: $Z = \sqrt{100^2 + (-100\sqrt{3})^2} = 200\Omega \Rightarrow I_0 = \frac{200\sqrt{2}}{200} = \sqrt{2}A$

Độ lệch pha của u và i: $\tan \varphi = \frac{Z_L - Z_c}{R} = \frac{-100\sqrt{3}}{100} = -\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{3} = \varphi_u - \varphi_i \Rightarrow \varphi_i = \frac{\pi}{3}$

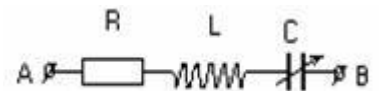
Biểu thức của cường độ dòng điện i là: $i = \sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)A$

* **Nhận xét:** Cách giải trên là tổng quát cho trường hợp độ lệch pha bất kỳ. Tuy nhiên trong bài toán trên chúng ta có thể nhận xét được rằng do cường độ dòng điện trong hai trường hợp bằng nhau nên trong hai trường hợp đó độ lệch pha của u và i có cùng độ lớn. Khi đó u_1 sẽ nhanh pha hơn i góc $\frac{\pi}{3}$ là giải ra R luôn chứ không cần phải khai triển công thức lượng giác.

3. Mạch điện xoay chiều RLC có C thay đổi

Bài toán tổng quát:

Cho mạch điện xoay chiều RLC trong đó C có thể thay đổi được. Tìm giá trị của C để:



- Cường độ hiệu dụng I của mạch đạt giá trị cực đại
- Công suất tỏa nhiệt của mạch đạt cực đại. Tính giá trị P_{\max} đó.
- Điện áp hiệu dụng hai đầu C đạt cực đại

* Hướng dẫn giải:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_c)^2}} \Rightarrow I_{\max} \Leftrightarrow Z_{\min} \Rightarrow Z_L - Z_c = 0 \Leftrightarrow C = \frac{1}{\omega^2 L}$$

- Cường độ hiệu dụng

vậy $C = \frac{1}{\omega^2 L}$ thì I_{\max} và giá trị $I_{\max} = \frac{U}{R}$

- Công suất tỏa nhiệt trên mạch $P = I^2 \cdot R$. Do R không đổi

nên $P_{\max} \Leftrightarrow I_{\max} \Leftrightarrow Z_L - Z_c = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{\omega^2 L}$

Giá trị: $P_{\max} = I_{\max}^2 R = \frac{U^2}{R}$

- Điện áp hiệu dụng hai đầu tụ điện là:

$$U_c = I Z_c = \frac{U}{Z} Z_c = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_c)^2}} Z_c = \frac{U}{\sqrt{\frac{R^2}{Z_c^2} + \left(\frac{Z_L - Z_c}{Z_c}\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{\frac{R^2}{Z_c^2} + \left(\frac{Z_L}{Z_c} - 1\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{y}} \Rightarrow (U_c)_{\max} \Leftrightarrow y_{\min}$$

Với $y = \frac{R^2}{Z_c^2} + \left(1 - \frac{Z_L}{Z_c}\right)^2$, đặt $\frac{1}{Z_c} = x \Rightarrow y = R^2 x^2 + (1 - Z_L x)^2 = (R^2 + Z_L^2)x^2 - 2Z_L x + 1$

Do hệ số $a = (R^2 + Z_L^2) > 0$ hàm số y đạt giá trị nhỏ nhất khi

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2Z_L}{2(R^2 + Z_L^2)} \Leftrightarrow \frac{1}{Z_c} = \frac{Z_L}{(R^2 + Z_L^2)} \Rightarrow Z_c = \frac{R^2 + Z_L^2}{Z_L}$$

Khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số y là $y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{\Delta'}{a} = -\frac{Z_L^2 - (R^2 + Z_L^2)}{R^2 + Z_L^2} = \frac{R^2}{R^2 + Z_L^2}$

$$\Rightarrow (U_c)_{\max} = \frac{U}{\sqrt{y_{\min}}} = \frac{U}{\sqrt{\frac{R^2}{R^2 + Z_L^2}}} = \frac{U}{R} \sqrt{R^2 + Z_L^2}$$

Vậy: $(U_c)_{\max} = \frac{U}{R} \sqrt{R^2 + Z_L^2}$ khi $Z_c = \frac{R^2 + Z_L^2}{Z_L}$

Ví dụ điển hình:

Ví dụ 1: Cho mạch điện RLC có $R = 100\Omega$, $L = \frac{1}{\pi} H$, C thay đổi. Điện áp hai đầu đoạn

mạch $u = 100\sqrt{2}\cos(100\pi t)V$. Tìm C để:

- Mạch tiêu thụ công suất $P = 50W$
- Mạch tiêu thụ công suất cực đại. Tính P_{\max}
- U_c max

* Hướng dẫn giải:

Ta có $R = 100\Omega$, $Z_L = 100\Omega$

$$P = I^2 R = 50 \Leftrightarrow \frac{U^2}{Z^2} R = 50 \Leftrightarrow \frac{100^2 \cdot 100}{100^2 + (100 - Z_c)^2} = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} 100 - Z_c = 100 \\ 100 - Z_c = -100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_c = 0 \\ Z_c = 200\Omega \end{cases}$$

$$C = \frac{10^{-4}}{2\pi} F$$

Nhận nghiệm $Z_c = 200\Omega$ ta được

b. Công suất của mạch $P = I^2 R$. Do R không đổi nên:

$$P_{\max} \Leftrightarrow I_{\max} \Leftrightarrow Z_L - Z_c = 0 \Leftrightarrow Z_c = Z_L = 100\Omega \Rightarrow C = \frac{10^{-4}}{\pi} F$$

$$\text{Khi đó } P_{\max} = I_{\max}^2 R = \frac{U^2}{R^2} R = \frac{U^2}{R} = \frac{100^2}{100} = 100W$$

c. Theo công thức đã chứng minh được điện áp hiệu dụng giữa hai bản tụ cực đại khi:

$$Z_c = \frac{R^2 + Z_L^2}{Z_L} = \frac{100^2 + 100^2}{100} = 200\Omega \Rightarrow C = \frac{10^{-4}}{2\pi} F$$

$$\text{Khi đó } (U_c)_{\max} = \frac{U}{R} \sqrt{R^2 + Z_L^2} = \frac{100}{100} \sqrt{100^2 + 100^2} = 100\sqrt{2}V$$

Ví dụ 2: Cho mạch điện RLC có C thay đổi, hiệu điện thế hai đầu đoạn

mạch: $u = 200\sqrt{2}\cos(100\pi t)V$

Khi $C = C_1 = \frac{10^{-4}}{4\pi} F$ và $C = C_2 = \frac{10^{-4}}{2\pi} F$ thì mạch có cùng công suất $P = 200W$.

- Tính R và L
- Tính hệ số công suất của mạch ứng với C_1, C_2 .

* **Hướng dẫn giải:**

a. $Z_{C_1} = 400\Omega, Z_{C_2} = 200\Omega$

Theo giả thiết ta có:

$$P = P_1 = P_2 = 200 \Leftrightarrow I_1^2 R = I_2^2 R \Leftrightarrow Z_1^2 = Z_2^2 \Leftrightarrow Z_L - Z_{C_1} = Z_{C_2} - Z_L \Rightarrow Z_L = \frac{Z_{C_1} + Z_{C_2}}{2} = 300\Omega \Rightarrow L = \frac{3}{\pi} H$$

Với $Z_L = 300\Omega$ ta

$$P_1 = 200 \Leftrightarrow \frac{U^2}{R^2 + (Z_L - Z_{C_1})^2} R = 200 \Leftrightarrow \frac{200^2 R}{R^2 + 100^2} = 200 \Rightarrow R^2 - 200R + 100^2 = 0$$

được

Giải phương trình ta được nghiệm duy nhất $R = 100\Omega$.

Vậy $R = 100\Omega, L = \frac{3}{\pi} H$

b. Tính hệ số công suất ứng với các trường hợp

• Khi $C = C_1 = \frac{10^{-4}}{4\pi} F \Rightarrow Z = \sqrt{100^2 + (300 - 400)^2} = 100\sqrt{2} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{100}{100\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

• Khi $C = C_2 = \frac{10^{-4}}{2\pi} F \Rightarrow Z = \sqrt{100^2 + (300 - 200)^2} = 100\sqrt{2} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{100}{100\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Nhận xét: Trong hai trường hợp L thay đổi và C thay đổi chúng ta thấy vai trò của L và C là bình đẳng nên hoán đổi vị trí của L và C ta sẽ được kết quả. Vậy nên trong trắc nghiệm chúng ta chỉ cần nhớ kết quả với C hoặc L.

$$(U_C)_{\max} = \frac{U}{R} \sqrt{R^2 + Z_L^2} \text{ khi } Z_C = \frac{R^2 + Z_L^2}{Z_L}$$

$$(U_L)_{\max} = \frac{U}{R} \sqrt{R^2 + Z_C^2} \text{ khi } Z_L = \frac{R^2 + Z_C^2}{Z_C}$$

4. Mạch điện xoay chiều RLC có tần số f hay ω thay đổi

Bài toán tổng quát:

Cho mạch điện xoay chiều RLC trong đó tần số góc ω thay đổi được. Tìm ω để :

- Cường độ hiệu dụng của dòng điện đạt cực đại. Tính giá trị cực đại đó.
- Công suất tỏa nhiệt trên mạch đạt cực đại. Tính giá trị cực đại đó.
- Điện áp hiệu dụng hai đầu R, hai đầu L, hai đầu C đạt cực đại

* **Hướng dẫn giải:**

a. Cường độ hiệu dụng:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} \Rightarrow I_{\max} \Leftrightarrow Z_{\min} \Leftrightarrow Z_L - Z_C = 0 \Leftrightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Vậy khi $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ thì cường độ hiệu dụng trong mạch đạt giá trị cực đại và giá trị $I_{\max} = \frac{U}{R}$.

b. Công suất tỏa nhiệt trên mạch $P = I^2.R$.

Do R không đổi nên $P_{\max} \Leftrightarrow I_{\max} \Leftrightarrow Z_L - Z_C = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Giá trị $P_{\max} = I_{\max}^2 R = \frac{U^2}{R}$

c. Điện áp hiệu dụng đạt cực đại

• **U_R đạt cực đại**

$$U_R = IR \Rightarrow (U_R)_{\max} \Leftrightarrow I_{\max} \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Khi đó $(U_R)_{\max} = I_{\max} R = U$

• **U_L đạt cực đại**

$$U_L = IZ_L = \frac{U}{Z} Z_L = \frac{U \cdot \omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{\frac{R^2}{\omega^2 L^2} + \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{y}}$$

Với $y = \frac{R^2}{\omega^2 L^2} + \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)^2$, đặt $\frac{1}{\omega^2} = x \Rightarrow y = \frac{R^2}{L^2} x + \left(1 - \frac{x}{LC}\right)^2 = \frac{1}{L^2 C^2} x^2 + \left(\frac{R^2}{L^2} - \frac{2}{LC}\right)x + 1$

$$a = \frac{1}{L^2 C^2} > 0 \Rightarrow y_{\min} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} = \frac{\frac{2}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}{\frac{2}{L^2 C^2}} = \frac{2LC - R^2 C^2}{2}$$

Do hệ số

$$\Rightarrow \frac{1}{\omega^2} = \frac{2LC - R^2 C^2}{2} \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{2}{2LC - R^2 C^2}}$$

Vậy U_L đạt cực đại khi $\omega = \sqrt{\frac{2}{2LC - R^2 C^2}}$

• **U_C đạt cực đại**

$$U_C = IZ_C = \frac{U}{Z} Z_C = \frac{U}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 \omega^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} = \frac{U}{\sqrt{y}}$$

Với $y = R^2 \omega^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2$, đặt $\omega^2 = x \Rightarrow y = R^2 C^2 x + (LCx - 1)^2 = L^2 C^2 x^2 + (R^2 C^2 - 2LC)x + 1$

Do hệ số $a = L^2 C^2 > 0 \Rightarrow y_{\min} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} = \frac{2LC - R^2 C^2}{2L^2 C^2} = \frac{2L - R^2 C}{2L^2 C} \Rightarrow \omega^2 = \frac{2L - R^2 C}{2L^2 C}$

$$\Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{2L - R^2 C}{2L^2 C}}$$

Vậy U_C đạt cực đại khi tần số góc $\omega = \sqrt{\frac{2L - R^2 C}{2L^2 C}}$

Nhận xét:

- Do vai trò của f và ω là như nhau nên nếu f thay đổi thì bằng phép thay $\omega = 2\pi f$ ta sẽ giải quyết được lớp bài toán mà có f thay đổi.

- Do việc tính toán để tìm các giá trị U_L max hay U_C max là tương đối phức tạp nên những bài toán dạng này chỉ dừng lại ở việc tìm giá trị ω (hay f) để cho điện áp hiệu dụng đạt cực đại.

Ví dụ điển hình:

Ví dụ 1: Cho đoạn mạch điện MN gồm một điện trở thuần $R = 100\Omega$, cuộn dây thuần cảm có

độ tự cảm $L = \frac{1}{\pi} H$, tụ điện có điện dung $C = \frac{10^{-4}}{2\pi} F$, mắc nối tiếp. Mắc hai đầu M, N vào nguồn điện xoay chiều có điện áp tức thời $u_{MN} = 120\sqrt{2}\cos(2\pi ft)V$, tần số f của nguồn điện có thể điều chỉnh thay đổi được.

a. Khi $f = f_1 = 50$ Hz, tính cường độ hiệu dụng của dòng điện và tính công suất tiêu thụ P_1 trên đoạn mạch điện MN. Viết biểu thức cường độ dòng điện tức thời chạy trong đoạn mạch đó.

b. Điều chỉnh tần số của nguồn điện đến giá trị f_2 sao cho công suất tiêu thụ trên đoạn mạch điện MN lúc đó là $P_2 = 2P_1$. Hãy xác định tần số f_2 của nguồn điện khi đó. Tính hệ số công suất.

* **Hướng dẫn giải:**

$$\Rightarrow \omega = 100\pi \Rightarrow \begin{cases} Z_L = 100\Omega \\ Z_C = 200\Omega \end{cases} \Rightarrow Z = \sqrt{100^2 + 100^2} = 100\sqrt{2}\Omega$$

a. Khi $f = f_1 = 50$ Hz

$$\text{Cường độ hiệu dụng của dòng điện trong mạch là: } I = \frac{U}{Z} = \frac{120}{100\sqrt{2}} = \frac{1,2}{\sqrt{2}} (A)$$

$$\text{Công suất tiêu thụ trên đoạn mạch điện là: } P_1 = I^2 R = \left(\frac{1,2}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot 100 = 72 (W)$$

$$\text{Độ lệch pha của } u \text{ và } i \text{ trong mạch: } \tan \varphi = \frac{Z_L - Z_C}{R} = \frac{-100}{100} = -1 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4} = \varphi_u - \varphi_i \Rightarrow \varphi_i = \frac{\pi}{4}$$

$$i = 1,2 \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) A$$

Biểu thức của cường độ dòng điện trong mạch là:

b. Khi thay đổi f để $P_2 = 2P_1$ tức $P_2 = 144W$

$$P_2 = I_2^2 R = 144 \Leftrightarrow \frac{U^2 R}{R^2 + \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right)^2} = 144 \Leftrightarrow \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right)^2 = 0 \Rightarrow \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Ta có

Đây là trường hợp xảy ra cộng hưởng điện, thay số ta tìm được:

$$f_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{10^{-4}}{2\pi}}} = 50\sqrt{2} (Hz)$$

$$\text{Hệ số công suất khi đó } \cos \varphi = \frac{R}{Z} = 1$$

Ví dụ 2: Một mạch điện xoay chiều RLC có $R = 100\Omega$, $L = 1/\pi(H)$ và $C = 10^{-4}/2\pi (F)$ mắc nối tiếp. Đoạn mạch được mắc vào một hiệu điện thế xoay chiều có tần số f có thể thay đổi. Khi hiệu điện thế giữa hai đầu tụ điện đạt giá trị cực đại thì tần số f có giá trị là bao nhiêu?

* **Hướng dẫn giải:**

$$\Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{2L - R^2 C}{2L^2 C}} = \sqrt{\frac{\frac{2}{\pi} - 100^2 \cdot \frac{10^{-4}}{2\pi}}{2\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \frac{10^{-4}}{2\pi}}} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot 100^2 \pi^2} \square 100\pi \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{50\sqrt{6}}{4} \approx 61 (Hz)$$

Ta có:

$$\text{Với } y = R^2 \omega^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2, \text{ đặt } \omega^2 = x \Rightarrow y = R^2 C^2 x + (LCx - 1)^2 = L^2 C^2 x^2 + (R^2 C^2 - 2LC)x + 1$$

$$\text{Do hệ số } a = L^2 C^2 > 0 \Rightarrow y_{\min} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} = \frac{2LC - R^2 C^2}{2L^2 C^2} = \frac{2L - R^2 C}{2L^2 C} \Rightarrow \omega^2 = \frac{2L - R^2 C}{2L^2 C}$$

$$\Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{2L - R^2 C}{2L^2 C}} = \sqrt{\frac{\frac{2}{\pi} - 100^2 \cdot \frac{10^{-4}}{2\pi}}{2 \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \frac{10^{-4}}{2\pi}}} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot 100^2 \pi^2} \square 100\pi \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{50\sqrt{6}}{4} \approx 61(\text{Hz})$$

Vậy U_C đạt cực đại khi tần số dao động $f = 61(\text{Hz})$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Dạng 1: Mạch có R thay đổi

Bài 1: Cho mạch RLC có C thay đổi, $u = U\sqrt{2}\cos(\omega t)V$

Khi $C = C_1 = \frac{10^{-4}}{\pi} F$ thì dòng điện trễ pha $\frac{\pi}{4}$ so với điện áp u

Khi $C = C_2 = \frac{10^{-4}}{2,5\pi} F$ thì điện áp hiệu dụng 2 đầu tụ điện cực đại

a. Tính R và tần số góc ω , biết $L = \frac{2}{\pi} H$

b. Biết $U_C \max = 250V$. Viết biểu thức điện áp u hai đầu mạch điện

Bài 2: Cho mạch điện RLC; $u = 30\sqrt{2}\cos(100\pi t)$ (V). R thay đổi được. Khi mạch có $R = R_1 = 9\Omega$ thì độ lệch pha giữa u và i là φ_1 . Khi mạch có $R = R_2 = 16\Omega$ thì độ lệch pha giữa u và i là

φ_2 . biết $|\varphi_1| + |\varphi_2| = \frac{\pi}{2}$

a. Tính công suất ứng với R_1 và R_2

b. Viết biểu thức của cường độ dòng điện ứng với R_1, R_2

c. Tính L biết $C = \frac{1}{2\pi} \cdot 10^{-4} F$.

d. Tính công suất cực đại của mạch

Bài 3: Cho mạch điện RLC; $u = U\sqrt{2}\cos\pi t$ (V). R thay đổi được. Khi mạch có $R = R_1 = 90\Omega$ thì độ lệch pha giữa u và i là φ_1 . Khi mạch có $R = R_2 = 160\Omega$ thì độ lệch pha giữa u và i là

φ_2 . biết $|\varphi_1| + |\varphi_2| = \frac{\pi}{2}$

a. Tìm L biết $C = \frac{1}{\pi} \cdot 10^{-4} F$; $\omega = 100\pi \text{rad/s}$

b. Tìm C biết $L = \frac{1}{\pi} (H)$; $\omega = 100\pi \text{rad/s}$

c. Tìm ω . Biết $L = \frac{3,2}{\pi} (H)$; $C = \frac{1}{2\pi} \cdot 10^{-4} F$

Bài 4: Cho mạch điện RLC; $u = U\sqrt{2}\cos 100\pi t$ (V). R thay đổi được; Khi mạch có $R = R_1 = 90\Omega$ u và $R = R_2 = 160\Omega$ thì mạch có cùng công suất P.

a. Tính C biết $L = \frac{2}{\pi} (H)$

b. Tính U khi $P = 40W$

Bài 5: Cho mạch điện RLC, R có thể thay đổi được, Hiệu điện thế hai đầu mạch là $u =$

$$200\sqrt{2} \cos(100\pi t) \text{ V}; L = \frac{2}{\pi} \text{ (H)}, C = \frac{1}{\pi} \cdot 10^{-4} \text{ F}. \text{ Tìm R để:}$$

- Hệ số công suất của mạch là $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- Hiệu điện thế hiệu dụng giữa hai đầu điện trở là $U_R = 50\sqrt{2} \text{ V}$
- Mạch tiêu thụ công suất $P = 80 \text{ W}$

Bài 6: Cho mạch điện RLC, R có thể thay đổi được, Hiệu điện thế hai đầu mạch là $u =$

$$240\sqrt{2} \cos(100\pi t) \text{ V}; C = \frac{1}{\pi} \cdot 10^{-4} \text{ F}.$$

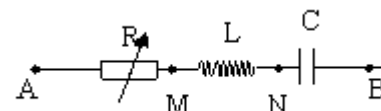
Khi mạch có $R = R_1 = 90\Omega$ và $R = R_2 = 160\Omega$ thì mạch có cùng công suất P.

- Tính L, P
- Giả sử chưa biết L chỉ biết $P_{\max} = 240 \text{ W}$ và với 2 giá trị R_3 và R_4 thì mạch có cùng công suất là $P = 230,4 \text{ W}$ Tính giá trị R_3 và R_4

Bài 7: Cho mạch điện như hình vẽ : $U_{AB} = 100\sqrt{2} \text{ V}; U_{AN} =$

$$100\sqrt{2} \text{ V}; U_{NB} = 200 \text{ V}$$

Công suất của mạch là $P = 100\sqrt{2} \text{ W}.$



- Chứng minh rằng $P = 100\sqrt{2} \text{ W}$ chính là giá trị công suất cực đại của mạch
- Với hai giá trị R_1 và R_2 thì mạch có cùng công suất P' . Tính P' và R_2 biết $R_1 = 200\Omega$

Dạng 2: Mạch có L thay đổi

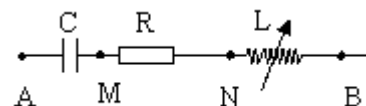
Bài 1: Cho mạch điện RLC, L có thể thay đổi được, hiệu điện thế hai đầu mạch là $u = 200\sqrt{2}$

$$\cos(100\pi t) \text{ V}; C = \frac{1}{0,9\pi} \cdot 10^{-4} \text{ F}. R = 120\Omega$$

- Tính L để U_L max. Tính U_L max
- Tính L để U_L bằng $175\sqrt{2} \text{ V}$

Bài 2: Cho mạch điện như hình vẽ, $u = U\sqrt{2} \cos 100\pi t \text{ (V)}, C = \frac{1}{9\pi} \cdot 10^{-3} \text{ F}, R = 120\Omega$

- Tính L để \vec{U}_{AN} vuông góc với \vec{U}_{MB}
- Tính L để U_{AN} đạt giá trị cực đại
- Tính L để $\cos\varphi = 0,6$



Bài 3: Cho mạch điện RLC, L có thể thay đổi được, Hiệu điện

thế hai đầu mạch là $u = 100\sqrt{2} \cos(100\pi t) \text{ V};$ Khi mạch có $L = L_1 = \frac{1}{\pi} \text{ (H)}$ và $L = L_2 = \frac{3}{\pi} \text{ (H)}$ thì mạch có cùng công suất $P = 40 \text{ W}$

- Tính R và C
- Viết biểu thức của i ứng với L_1 và L_2

Bài 4: Cho mạch điện RLC, L có thể thay đổi được, Hiệu điện thế hai đầu mạch là $u =$

$$170\sqrt{2} \cos(100\pi t) \text{ V}; R = 80\Omega, C = \frac{1}{2\pi} \cdot 10^{-4} \text{ F}, \text{ Tìm L để:}$$

- Mạch có công suất cực đại. Tính P_{\max}
- Mạch có công suất $P = 80 \text{ W}$

Bài 5: Cho mạch điện RLC; $u = 200\sqrt{2} \cos 100\pi t$ (V) $R = 200\sqrt{3} \Omega$; $C = \frac{1}{4\pi} \cdot 10^{-4} F$. L có thể thay đổi được

- Khi $L = \frac{2}{\pi} H$ viết biểu thức của i tính P
- Tìm L để U_{Lmax} . Tính U_{Lmax}
- Tính L để P_{max} , Tìm P_{max}

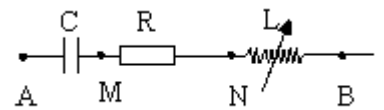
Bài 6: Cho mạch điện RLC, L thay đổi được, Hiệu điện thế hai đầu mạch là $u = U\sqrt{2} \cos(\omega t)$

V; Khi mạch có $L = L_1 = \frac{1}{\pi} H$ và $L = L_2 = \frac{3}{\pi} H$ thì giá trị tức thời của các dòng điện đều lệch pha một góc $\frac{\pi}{4}$ so với u

- Tính R và ω biết $C = \frac{1}{2\pi} \cdot 10^{-4} F$.
- Tính ω và C biết $R = 100 \Omega$
- Tính C và R biết $\omega = 100\pi \text{ rad/s}$

Bài 7: Cho mạch điện RLC mắc nối tiếp như hình vẽ, L có thể

thay đổi được $u = 200\sqrt{2} \cos(100\pi t)$ V, $L = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} H$, $C = \frac{1}{\sqrt{3}\pi} \cdot 10^{-4} F$,



- Viết biểu thức của i , tính P
- Viết biểu thức của U_{AN}
- Viết biểu thức của U_{MB}
- Tính góc hợp bởi U_{AM} và U_{MB}
- Tính góc lệch giữa U_{AM} và U_{MB}

Dạng 3: Mạch có C thay đổi

Bài 1: Cho mạch điện RLC, C thay đổi, hiệu điện thế hai đầu đoạn mạch: $u = 120\sqrt{2}$

$\cos(100\pi t)$ (V), $R = 240 \Omega$, $L = \frac{3,2}{\pi} H$. Tìm C để:

- $I = I_{max}$, $P = P_{max}$. Tính I_{max} , P_{max} . Tính U_L khi đó.
- $U_C = U_C \text{ max}$. Tính $U_C \text{ max}$

Bài 2: Cho mạch điện RLC, $u = U\sqrt{2} \cos \omega t$ (V), C thay đổi, $R = 120 \Omega$, $U = 150 V$

- Để $U_C = U_L = nU$ thì phải chọn L và C bằng bao nhiêu? Áp dụng $n = 4/3$
- Để U_C trễ pha hơn u góc φ có $\tan \varphi = 4/3$. Tính U_C khi đó

Bài 3: Cho mạch điện RLC, C thay đổi, hiệu điện thế hai đầu đoạn mạch: $u =$

$200 \cos(100\pi t) V$. Khi $C = C_1 = \frac{10^{-4}}{\pi} F$ và $C = C_2 = \frac{10^{-4}}{5\pi} F$ thì i_1 và i_2 đều lệch pha với u một góc $\frac{\pi}{3}$ rad.

- Tính R, L
- Viết biểu thức i_1 và i_2

Bài 4: Cho mạch điện RLC, C thay đổi, hiệu điện thế hai đầu đoạn mạch: $u =$

$U_0 \cos(100\pi t) V$. Khi $C = C_1 = \frac{1,5}{\pi} F$ và $C = C_2 = \frac{10^{-4}}{\pi} F$ thì mạch có cùng công suất, nhưng

i_1 và i_2 (ứng với 2 giá trị của C) đều lệch pha với nhau một góc $\frac{\pi}{3}$ rad.

a. Tính R và biết $L = \frac{1,5}{\pi}$ H

b. Tính L và ω , biết $R = 50\sqrt{3}\Omega$

c. Tính R và L, biết $\omega = 100\pi$ (rad/s)

Bài 5: Cho mạch điện RLC, C thay đổi, $u = 120\sqrt{2} \cos(100\pi t)$ V. Khi $C = C_0$ thì $U_{C_{\max}} = 200$ V. Khi đó $P = 38,4$ W. Tính R, L, C_0