GIỚI HẠN HÀM SỐ – LỚP 11

Tài liệu bài giảng

A. LÝ THUYẾT

Giới hạn hữu hạn	Giới hạn vô cực, giới hạn ở vô cực
1. Giới hạn đặc biệt $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$; $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$ (c: hằng số) ***2. Định lí:*** a) Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right] = L+M$ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right] = L-M$ $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right] = L.M$ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$) ***3. Giới hạn một bên*** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) =$ $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L.$	***1. Giới hạn đặc biệt:*** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}.$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} c = c$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{c1}{x^k} = 0.$ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{}{x} = +\infty.$ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{\lvert x\rvert} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\lvert x\rvert} = +\infty.$ ***2. Định lí:*** Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \begin{cases} & g(x) \\ & g(x) \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} + & g(x) & \\ & g(x) & g(x) \\ & g(x) & g(x) \end{cases}$ **Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định:* $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0.\infty$ *thì phải tìm cách khử dạng vô định.*

Một số phương pháp khử dạng vô định

1. Dạng $\dfrac{0}{0}$

a) $L = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ **với** $P(x), Q(x)$ **là các đa thức và** $P(x_0) = Q(x_0) = 0$

Phân tích cả tử và mẫu thành nhân tử và rút gọn.

Ví dụ. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x+4}{x+2} = \dfrac{12}{4} = 3.$

b) $L = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ **với** $P(x_0) = Q(x_0) = 0$ **và** $P(x), Q(x)$ **là các biểu thức chứa căn cùng bậc**

Sử dụng các hằng đẳng thức về nhân tử liên hợp ở tử và mẫu.

Ví dụ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\left(2-\sqrt{4-x}\right)\left(2+\sqrt{4+x}\right)}{x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2+\sqrt{4-x}}=\dfrac{1}{4}.$

c) $L=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ **với** $P(x_0)=Q(x_0)=0$ **và** $P(x)$ **là biểu thức chứa căn không đồng bậc**

Giả sử. $P(x)=\sqrt[m]{u(x)}-\sqrt[n]{v(x)}$ *với* $\sqrt[m]{u(x_0)}=\sqrt[n]{v(x_0)}=a.$

Ta phân tích $P(x)=\left(\sqrt[m]{u(x)}-a\right)\left(a-\sqrt[n]{v(x)}\right).$

Ví dụ.

$$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}-\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}\right)$$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}+\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}\right)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{6}.$$

2. Dạng $\dfrac{\infty}{\infty}:L=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ **với** $P(x),Q(x)$ **là các đa thức hoặc các biểu thức chứa căn**

- Nếu $P(x)$, $Q(x)$ *là các đa thức thì chia cả tử và mẫu cho lũy thừa cao nhất của* x.

- Nếu $P(x),Q(x)$ *có chứa căn thì có thể chia cả tử và mẫu cho lũy thừa cao nhất của* x *hoặc nhân lượng liên hợp.*

Ví dụ.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=2.$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1}=-1.$

3. Dạng $\infty-\infty$: **Giới hạn này thường có chứa căn**

Ta thường dùng phương pháp nhân lượng liên hợp của tử và mẫu.

Ví dụ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}=0.$

4. Dạng $0.\infty$:

Ta cũng thường sử dụng phương pháp như các dạng trên.

$$\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x-2}.\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}=\dfrac{0.\sqrt{2}}{2}=0.$$

B. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2+x-3}{x-1}$. Dùng định nghĩa chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=5$.

Giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, $x_n \neq 1$ và $x_n \to 1$.

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2x_n^2 + x_n - 3}{x_n - 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2(x_n - 1)\left(x_n + \frac{3}{2}\right)}{x_n - 1}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 2\left(x_n + \frac{3}{2}\right) = 5.$$

Do đó $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x, & vs\ x \geq 0 \\ 1 - x, & vs\ \ x < 0 \end{cases}$. Dùng định nghĩa chứng minh rằng hàm số $f(x)$ không có giới hạn khi $x \to 0$.

Giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Lấy dãy số (x_n) với $x_n = \frac{1}{n}$.

Ta có $x_n \to 0$ và $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. (1)

Lấy dãy số (y_n) với $y_n = -\frac{1}{n}$.

Ta có $y_n \to 0$ và $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \lim_{n\to+\infty} (1 - y_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra hàm số $f(x)$ không có giới hạn khi $x \to 0$.

Ví dụ 3. Áp dụng định nghĩa giới hạn của hàm số, tìm giới hạn $\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x + +1}$.

Giải

Với $x \neq -1$ ta có. $\frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} = \frac{(x+1)(x-4)}{x+1} = x - 4$.

Với mọi dãy số (x_n) trong $\mathbb{R} \backslash \{-1\}$, $(x_n \neq -1, \forall n)$ mà $\lim x_n = -1$, ta có.

$\lim f(x_n) = \lim (x_n - 4) = 1 - 4 = -5$.

Vậy $\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} = -5$.

Ví dụ 4. Áp dụng định nghĩa giới hạn của hàm số, tìm giới hạn $\lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{5 - x}}$.

Giải

Với $x < 5$, ta có

Với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(-\infty; 5) \backslash \{1\}$ mà $\lim x_n = 1$, ta có

$\lim f(x_n) = \lim \frac{1}{\sqrt{5 - x_n}} = \frac{1}{\sqrt{5 - 1}} = \frac{1}{2}$.

Vậy $\lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{5 - x}} = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 5. Cho hàm số $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ và hai dãy số $(x_n^{/})$, $(x_n^{//})$ với

$x_n' = \dfrac{1}{2n\pi}$; $x_n'' = \dfrac{1}{(2n+1)\dfrac{\pi}{2}}$.

a) Tìm giới hạn của các dãy số (x_n'), (x_n''), $(f(x_n'))$ và $(f(x_n''))$.

b) Tồn tại hay không $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$?

Giải

a) $\lim(x_n') = \lim\dfrac{1}{2n\pi} = \lim\dfrac{1}{2\pi}.\dfrac{1}{n} = 0$

$\lim(x_n'') = \lim\dfrac{1}{(2n+1)\dfrac{\pi}{2}} = \lim\dfrac{1}{2n+1}.\dfrac{2}{\pi} = 0$

$\lim f(x_n') = \lim\cos 2n\pi = 1$

$\lim f(x_n'') = \lim\cos\left[(2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right] = 0$

b) Ta có $\lim f(x_n') \neq \lim f(x_n'')$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$.

Ví dụ 6. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-x+7}{2x^3-1}$.

Giải

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-x+7}{2x^3-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}}{2-\dfrac{1}{x^3}} = \frac{0}{2} = 0$$

Chia cả tử số và mẫu số cho x^3(bậc cao nhất).

Ví dụ 7. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^4+7x^3-15}{x^4+1}$.

Giải

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^4+7x^3-15}{x^4+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2+\dfrac{7}{x}-\dfrac{15}{x^4}}{1+\dfrac{1}{x^4}} = 2.$$

Chia cả tử số và mẫu số cho x^4 (bậc cao nhất).

Ví dụ 8. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1}$.

Giải

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^6+2}}{3x^3-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\sqrt{1+\dfrac{2}{x^6}}}{x^3\left(3-\dfrac{1}{x^3}\right)} \text{ (vì } x>0\text{)} = \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 9. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x-1}{x-3}$.

Giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 3^-}(2x-1) = 5 > 0$, $\lim\limits_{x\to 3^-}(x-3) = 0$ và $(x-3) < 0$ với mọi $x < 3$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x-1}{x-3}=-\infty$.

Ví dụ 10. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-x^3+x^2-x+1\right)$.

Giải

$$\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-x^3+x^2-x+1\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}x^3\left(-1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=+\infty$$

Áp dụng quy tắc về giới hạn vô cực.