TRƯỜNG THCS-THPT
NGUYỄN KHUYẾN

ĐỀ KIỂM TRA THÁNG 10-MÔN TOÁN-LỚP 12
Thời gian làm bài: 90 phút;
(40 câu trắc nghiệm)

Mã đề: 209

Câu 1. Cho hàm số sau $y = 2x^3 + 6x^2 + 6x - 7$. Chọn đáp án đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$.
C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$.
D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có: $y' = 6x^2 + 12x + 6 = 6.(x+1)^2 \geq 0, \forall x \in R$.

Câu 2. Gọi giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = x - 5 + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ là $M;m$ .Khi đó các giá trị $M;m$ lần lượt là?

A. Không có M; $m = -3$.
B. $M = -3$; $m = 1$.
C. $M = 0$; $m = 1$.
D. Không có $M;m$.

Lời giải

Ta có : $y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in (0;+\infty) \\ x = -1 \notin (0;+\infty) \end{array}\right.$$

Dựa vào BBT:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-7	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Trên khoảng $(0;+\infty)$, Không có M; $m = -3$.

Câu 3. Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ biết diện tích tứ giác $ABCD$ là $16a^2$?

A. $12a^3$.
B. $4a^3$.
C. $\frac{64a^3}{3}$.
D. $64a^3$.

Lời giải

Khối lập phương có tất cả các mặt là hình vuông, $S_{ABCD} = 16a^2$ nên độ dài một cạnh là $4a$.

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = 64a^3$

Câu 4. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)=\left|x\right|+3$ trên $\left[-1;1\right]$ là :

A. 3. **B.** 7. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $y=f\left(x\right)=\left|x\right|+3=\left[\begin{array}{l} x+3 \quad khi\, x\in\left[0;1\right] \\ -x+3\; khi\, x\in\left[-1;0\right) \end{array}\right.$.

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} y'=1 \quad khi\, x\in\left[0;1\right] \\ y'=-1\; khi\, x\in\left[-1;0\right) \end{array}\right.$

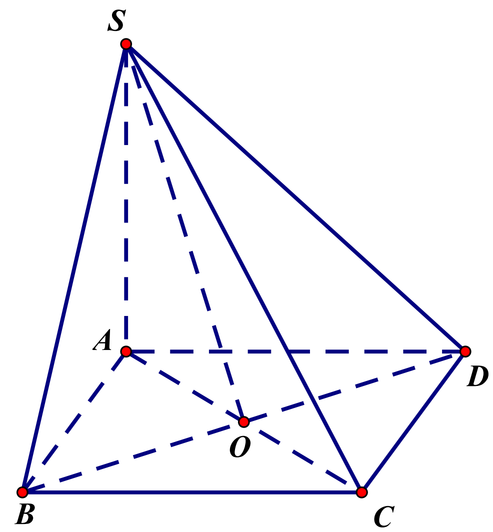
x	-1		0		1
y'		$+$	||	$-$	||
y	4	$\searrow$	3	$\swarrow$	4

.Vậy $\underset{[-1;1]}{Max}\, y+\underset{[-1;1]}{Min}\, y=7$

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc BAC bằng 60^0. $SA\perp\left(ABCD\right)$, góc giữa SC và đáy bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{a^3}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Tam giác BAC đều cạnh a . Góc SCA bằng 60^0. Suy ra $SA=\tan 60^0.AC=a\sqrt{3}$.

Diện tích đáy $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

$$V=\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3}=\frac{a^3}{2}$$

Câu 6. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. $SA\perp\left(ABCD\right)$. Gọi M là trung điểm cạnh BC và $SM=\dfrac{3a}{2}$. Tính $d\left(SM,AD\right)$.

A. a. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

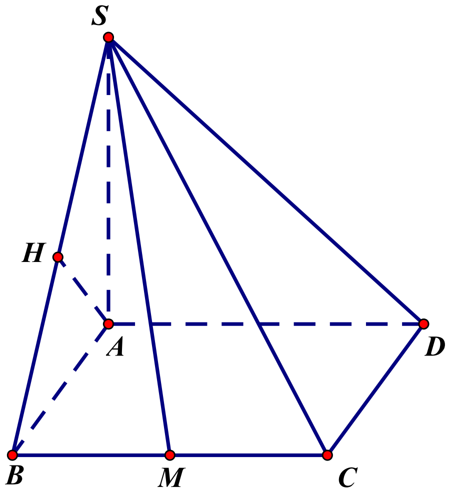
Lời giải

Gọi H là hình chiếu của A lên $SB \Rightarrow AH \perp SB$. Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH, BC \perp SB$. Suy ra:

$d(SM, AD) = d(AD,(SBC)) = d(A,(SBC)) = AH$.

$SM = \frac{3a}{2} \Rightarrow SB = \sqrt{SM^2 - BM^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = a\sqrt{2}$.

$SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{2a^2 - a^2} = a \Rightarrow AH = \frac{a}{\sqrt{2}}$



Câu 7. Một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $5\sqrt{2}$ thì diện tích của nó lớn nhất là

A. $\frac{25}{8}$. **B.** 25. **C.** $\frac{25}{4}$. **D.** $\frac{25}{2}$.

Lời giải

Gọi x là cạnh góc vuông $\left(0 < x < 5\sqrt{2}\right)$

$S_\Delta = \frac{1}{2}x\sqrt{50 - x^2}$

$S_\Delta' = \frac{25 - x^2}{2\sqrt{50 - x^2}} \Rightarrow S_\Delta' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 5$

Bảng biến thiên

x	0	5
s'	$+$	
s	0	$\frac{25}{2}$

Câu 8. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x} + \sqrt{2 - x}$ trên $[0;2]$ là

A. $\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 0.

Lời giải

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{2 - x}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2 - x} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 1$

Ta có: $y(1) = 0;\ y(0) = \sqrt{2};\ y(2) = \sqrt{2}$

Câu 9. Hàm số $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ đồng biến trên khoảng?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

+ Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

+ $y'=\dfrac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$; $y'=0\Rightarrow 1-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

+ BXD:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	

+ Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 10. Cho hàm số $y=\dfrac{x^4}{4}-2x^2+6$. Chọn phát biểu **đúng**?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$. **B.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

C. Giá trị cực tiểu của hàm số là 6. **D.** Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $M(0;6)$.

Lời giải

+ TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

+ $y'=x^3-4x$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 2\end{array}\right.$.

+ BBT:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

+ Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy điểm cực đại của đồ thị hàm số là $M(0;6)$.

Vậy phát biểu **D** đúng.

Câu 11. Cho hàm số $y=x^3-x^2-x+3$. Chọn phát biểu đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$. **B.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=1$. **D.** Hàm số không có cực trị.

Lời giải

TXĐ: $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 2x - 1, y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-1/3$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			$86/27$				$+\infty$
		↗		↘		↗	
	$-\infty$				2		

Từ BBT suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ và AB, BC, CD đôi một vuông góc. Tính thể tích V của tứ diện $ABCD$ theo a, b, c.

A. $V = \dfrac{1}{6}abc.$ **B.** $V = \dfrac{1}{3}abc.$ **C.** $V = \dfrac{1}{2}abc.$ **D.** $V = abc.$

Lời giải

Ta có $AB \perp BC, AB \perp CD \Rightarrow AB \perp (BCD)$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}AB.S_{BCD} = \frac{1}{3}AB.\frac{1}{2}BC.CD = \frac{1}{6}abc$$

Câu 13. Tìm m để hàm số $y = x^3 - mx^2 - 2x + 1$ có cực đại,cực tiểu?

A. $\forall m \in R$. **B.** $m = 0$. **C.** $m > 0$. **D.** $m < 0$.

Lời giải

TXĐ: $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 2mx - 2$.

Hàm số có cực đại cực tiểu $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 12 > 0$.(Luôn đúng).

Câu 14. Hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào ? 2

A. $(-1;1)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Lời giải

TXĐ: $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = 8x^3; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

BBT:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y’		-	0	+	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Câu 15. Tìm m để hàm số $y = x^4 - (m-2)x^2 + 8$ có ba điểm cực trị

A. $(-\infty; 2]$. **B.** $(2; +\infty)$. **C.** $[2; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 2)$.

Lời giải

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $1.[-(m-2)] < 0 \Leftrightarrow m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$.

Câu 16. Hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ nghịch biến trên khoảng?

A. $(0; 1)$. **B.** $(1; 2)$. **C.** $(-2; 2)$. **D.** $(0; 2)$.

Lời giải

Tập xác định: $D = [0; 2]$.

Ta có $y' = \dfrac{1-x}{\sqrt{2x - x^2}}$.

Lập bảng biến thiên.

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
y'			+	0	−		

Câu 17. Tìm m để hàm số $y = (m-3)x - (2m+1)\cos x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

A. $-4 \le m \le \frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{2} < m \le 3$. **C.** không có m. **D.** $-2 \le m \le \frac{1}{2}$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là: $\mathbb{R}$

$y' = m - 3 + (2m+1)\sin x$

+) Xét $2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2} \Rightarrow y' = -\frac{1}{2} - 3 < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

+) Xét $2m+1\ne 0\Leftrightarrow m\ne -\frac{1}{2}$, đặt $\sin x=t\left(-1\le t\le 1\right)$ thì $y'=m-3+\left(2m+1\right)t=f\left(t\right)$

$f\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=\frac{3-m}{2m+1}$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\le 0\forall x\in \mathbb{R}\Leftrightarrow f\left(t\right)\le 0\ \forall t\in \left[-1;1\right]$

Nếu $2m+1>0\Leftrightarrow m>-\frac{1}{2}$ thì $f\left(t\right)\le 0\ \forall t\in \left[-1;1\right]\Leftrightarrow 1\le \frac{3-m}{2m+1}\Leftrightarrow \frac{3m-2}{2m+1}\le 0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<m\le \frac{2}{3}$

Nếu $2m+1<0\Leftrightarrow m<-\frac{1}{2}$ thì $f\left(t\right)\le 0\ \forall t\in \left[-1;1\right]\Leftrightarrow \frac{3-m}{2m+1}\le -1\Leftrightarrow \frac{m+4}{2m+1}\le 0\Leftrightarrow -4\le m<-\frac{1}{2}$

Kết hợp các trường hợp lại ta được $-4\le m\le \frac{2}{3}$.

Câu 18. Tìm m để hàm số $y=\frac{m}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\left(m-2\right)x+1$ có cực trị x_1,x_2 thỏa mãn $\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|>1$.

A. $\frac{2-\sqrt{5}}{2}<m<\frac{2+\sqrt{5}}{2}$.

B. $\frac{2-\sqrt{5}}{2}<m<\frac{2+\sqrt{5}}{2}$ $m\ne 0$.

C. $\frac{2-\sqrt{5}}{2}<m<\frac{6+\sqrt{21}}{5};m\ne 0$.

D. $\frac{6-\sqrt{21}}{5}<m<\frac{6+\sqrt{21}}{5}$.

Lời giải

Ta có $y'=mx^2+x+m-2$.

$\Delta =-4m^2+8m+1$

Hàm số có hai cực trị $x_1,x_2\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2\Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 0 \\ \Delta >0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 0 \\ -4m^2+8m+1>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 0 \\ \frac{2-\sqrt{5}}{2}<m<\frac{2+\sqrt{5}}{2} \end{cases}\ (*)$

$\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|>1\Leftrightarrow \left|x_2-x_1\right|>\left|x_1.x_2\right|\Leftrightarrow \sqrt{\Delta }>\left|m-2\right|\Leftrightarrow \Delta >\left(m-2\right)^2$

$\Leftrightarrow 5m^2-12m+3<0\Leftrightarrow \frac{6-\sqrt{21}}{5}<m<\frac{6+\sqrt{21}}{5}(**)$

Kết hợp $(*)$ và $(**)$ ta được $\frac{6-\sqrt{21}}{5}<m<\frac{6+\sqrt{21}}{5}$

Câu 19. Tìm m để phương trình $2x-1=m\sqrt{x^2+1}$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $\left(-\sqrt{5};-2\right]$. **B.** $\left(-\sqrt{5};-2\right)$. **C.** $\left[-\sqrt{5};2\right]$. **D.** $\left(-\sqrt{5};2\right)$.

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với

$$m=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}\left(1\right)$$

Xét $f\left(x\right)=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}};x\in\mathbb{R}.$

Ta có $f'\left(x\right)=\dfrac{2\sqrt{x^2+1}-\left(2x-1\right).\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\dfrac{2\left(x^2+1\right)-x\left(2x-1\right)}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{2+x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=-2$

Ta có bảng biến thiên

		-2	
$f'\left(x\right)$			
$f\left(x\right)$	↘		↗

Suy ra $\left(1\right)$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-\sqrt{5}<m<-2$

Câu 20. Cho $P=\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$, với $x^2+y^2\neq 0$. Giá trị nhỏ nhất của P là

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Nếu $y=0$ thì $P=1$.

Nếu $y\neq 0, P=\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}+1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{x}{y}+1}$, Đặt $t=\dfrac{x}{y}$, ta có $P=f\left(t\right)=\dfrac{t^2+t+1}{t^2-t+1};t\in\mathbb{R}$

Lập bảng biến thiên của $f\left(t\right)$ ta suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{1}{3}$.

Câu 21. Cho $x\ge 0;\ \ y\ge 0$ và $x+3y=4$. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $P=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{3y}{1+y}$ lần lượt là:

A. 2; không có giá trị nhỏ nhất.

B. $2;\ \dfrac{4}{5}$.

C. $\dfrac{4}{5};\ 2$.

D. không có giá trị lớn nhất; $\dfrac{4}{5}$.

Lời giải

$x\ge 0;\ y\ge 0$ và $x+3y=4\Rightarrow x=4-3y$ và $0\le y\le\dfrac{4}{3}$.

$$P=\frac{4-3y}{5-3y}+\frac{3y}{1+y}=4+\frac{1}{3y-5}-\frac{3}{y+1}=f(y).$$

Ta có: $f'(y)=\dfrac{-3}{\left(3y-5\right)^2}+\dfrac{3}{\left(y+1\right)^2}=0\ \Leftrightarrow 8y^2-32y+24=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\in\left[0;\dfrac{4}{3}\right]\\ y=3\notin\left[0;\dfrac{4}{3}\right]\end{array}\right.$

$f\left(0\right)=\dfrac{4}{5};\quad f(1)=2;\quad f\left(\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{12}{7}$.

Vậy GTLN, GTNN của biểu thức lần lượt là: $2;\ \dfrac{4}{5}$.

Câu 22. Điểm cực đại của hàm số $y=\sin 2x$ là:

A. $\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

B. $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

C. $\dfrac{3\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

D. $\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải

$y'=2\cos 2x;\ y''=-4\sin 2x$

$y'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$

$y''\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\right)=-4\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)=\begin{cases}-4\ \forall k=2n\\ 4\ \forall k=2n+1\end{cases}\left(n\in\mathbb{Z}\right)$

Nên $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$ là điểm cực đại khi $k=2n$. Khi đó $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2n\pi}{2}=\dfrac{\pi}{4}+n\pi$.

Hay điểm cực đại của hàm số là: $\dfrac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Câu 23. Tìm m để hàm số $y=\dfrac{x^2-2mx+2m^2}{x-m}$ đồng biến trên $\left(2;+\infty\right)$?

A. $\left(-\infty;\frac{5}{4}\right]\cup[2;+\infty)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{5}{4}\right]$. **C.** $\left[\frac{5}{4};2\right]$. **D.** $(-\infty;1]$.

Lời giải

Điều kiện $x\neq m$.

Ta có $y'=\frac{x^2-2mx}{(x-m)^2}$. Hàm số đã cho đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}x^2-2mx\geq 0\,\forall x\in(2;+\infty)\\ m\notin(2;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq\frac{x}{2}\,\forall x\in(2;+\infty)\\ m\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq 1\\ m\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow m\leq 1.$$

Câu 24. Tìm m để hàm số $y=\frac{25+mx}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$?

A. $-5<m\leq-1$. **B.** $m\geq-1$. **C.** $-5\leq m\leq 5$. **D.** $-5<m<5$.

Lời giải

Điều kiện $x\neq-m$.

Ta có $y'=\frac{m^2-25}{(x+m)^2}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty;1)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}m^2-25<0\,\forall x\in(-\infty;1)\\ -m\notin(-\infty;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5<m<5\\ m\leq-1\end{cases}\Leftrightarrow-5<m\leq-1.$$

Câu 25. Tìm m để đồ thị hàm số $y=mx^3-(m^2-m-2)x^2-(m-2)x$ có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua gốc tọa độ O?

A. Không có m. **B.** $m=-1$ hoặc $m=2$.

C. $m=2$. **D.** $m=-1$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3mx^2-2(m^2-m-2)-(m-2)$.

Hàm số đã cho có hai điểm cực trị khi: $\begin{cases}m\neq 0\\ \Delta'=(m^2-m-2)^2+3m(m-2)>0\end{cases}$ (*).

Gọi hai điểm cực trị là $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$.

Do A,B đối xứng qua O nên $x_1+x_2=0\Leftrightarrow\frac{2(m^2-m-2)}{3m}=0\Leftrightarrow m=2\vee m=-1$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $m=-1$.

Với $m=-1$ thì $y=-x^3+3x$. Khi đó $y'=-3x^2+3$ nên $y'=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(1;2)$ và $B(-1;-2)$.

Vậy $m=-1$.

Câu 26. Tìm b để hàm số $y=\sin x-bx$ nghịch biến trên tập xác định.

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1]$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $[1;+\infty)$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=\cos x-b$.

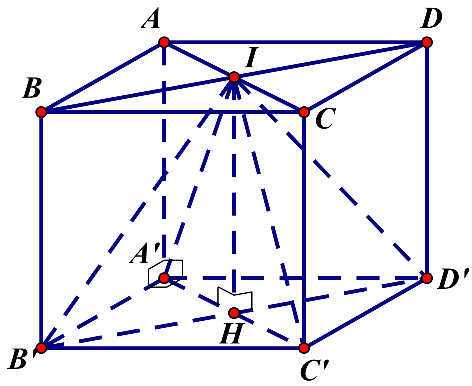
Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$y'\le 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \cos x-b\le 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow b\ge \cos x,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow b\ge 1$.

Câu 27. Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là tâm của mặt $ABCD$. Tính tỉ số thể tích của khối chóp $I.A'B'C'D'$ và khối hộp?

A. $\frac{1}{6}$. **B.** 3. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** 2.

Lời giải



Gọi $H=A'C'\cap B'D'\Rightarrow IH\perp(A'B'C'D')$

Thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là: $V=S_{A'B'C'D'}.IH$

Thể tích của khối chóp $I.A'B'C'D'$ là: $V_{I.A'B'C'D'}=\frac{1}{3}S_{A'B'C'D'}.IH$

$\Rightarrow \frac{V_{I.A'B'C'D'}}{V}=\frac{1}{3}$.

Câu 28. Tìm m để hàm số $y=\frac{2+mx}{2x+m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định?

A. $m<-2$ hoặc $m>2$. **B.** $m\le -2$ hoặc $m\ge 2$.

C. $-2<m<2$. **D.** $-2\le m\le 2$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x\ne -\frac{m}{2}$.

Ta có $y' = \dfrac{m^2 - 4}{(2x+m)^2}$

Hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định khi:

$$y' < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2.$$

Câu 29. Tìm m để đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2 + x + m}{x+1}$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Oy?

A. $m < 0$. **B.** $m > 1$. **C.** $m > 0$. **D.** $m < 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Đạo hàm: $y' = \dfrac{x^2 + 2x - m + 1}{(x+1)^2}$. Đặt $g(x) = x^2 + 2x - m + 1$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục tung khi và chi khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 trái dấu và khác -1.

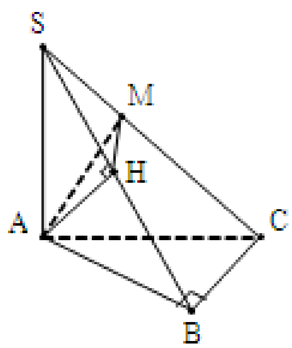
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{g(x)} > 0 \\ g(-1) \neq 0 \\ P < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -m \neq 0 \\ -m + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq 0 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

Vậy $m > 1$.

Câu 30. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với đáy, $SA = 3a, AB = 4a, BC = a$. Gọi M là trung điểm của SC, kẻ AH vuông góc với SB. Tính thể tích khối chóp $S.AHM$.

A. $\dfrac{3a^3}{25}$. **B.** $\dfrac{a^3}{25}$. **C.** $\dfrac{9a^3}{25}$. **D.** $\dfrac{8a^3}{25}$.

Lời giải



Từ giả thiết, ta có $\dfrac{SM}{SC} = \dfrac{1}{2}$.

ΔSAB vuông tại A $\Rightarrow SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 5a$

Khi đó: $\frac{SH}{SB}=\frac{SH.SB}{SB^2}=\frac{SA^2}{SB^2}=\frac{(3a)^2}{(5a)^2}=\frac{9}{25}$.

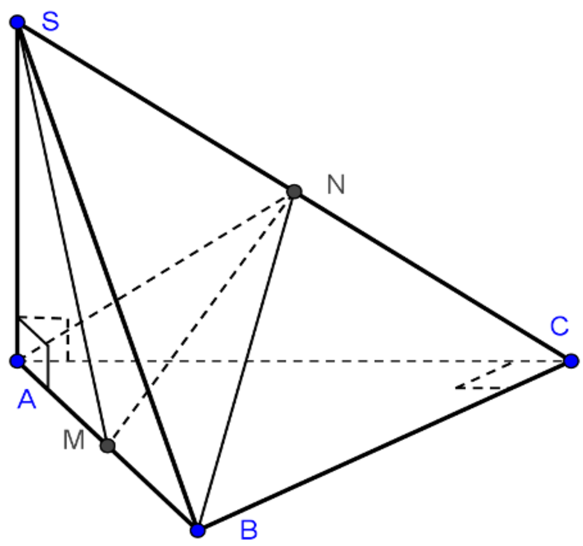
Thể tích khối chóp $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.\frac{1}{2}AB.BC=\frac{1}{6}.3a.4a.a=2a^3$.

Ta có $\frac{V_{S.AHM}}{V_{S.ABC}}=\frac{SH}{SB}.\frac{SM}{SC}=\frac{9}{25}.\frac{1}{2}=\frac{9}{50}\Rightarrow V_{S.AHM}=\frac{9}{50}V_{S.ABC}=\frac{9}{50}.2a^3=\frac{9a^3}{25}$.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C, biết $CA=CB=2a$, $SA=a$, SA vuông góc với đáy. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,SC. Tính thể tích khối chóp $S.AMN$

A. $\frac{a^3}{2}$. **B.** $\frac{a^3}{4}$. **C.** $\frac{2a^3}{3}$. **D.** $\frac{a^3}{6}$.

Lời giải



Gọi V_1,V_2,V_3 lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABC,S.ABN,S.AMN$. Khi đó ta có:

$V_1=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.2a.2a.a=\frac{2a^3}{3}$

$\frac{V_2}{V_1}=\frac{SN}{SC}=\frac{1}{2}\Rightarrow V_2=\frac{V_1}{2}=\frac{a^3}{3}$

$\frac{V_3}{V_2}=\frac{AM}{AB}=\frac{1}{2}\Rightarrow V_3=\frac{V_2}{2}=\frac{a^3}{6}$

Câu 32. Tìm m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x-1$ có hai điểm cực trị trong khoảng $(0;+\infty)$?

A. $(-\infty;2]$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-2;4)$. **D.** $[2;+\infty)$.

Lời giải

Ta có: $y'=x^2-2mx+m+2$

Hàm số có 2 điểm cực trị trong $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ P>0\\ S>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-m-2>0\\ 2m>0\\ m+2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<-1 \vee m>2\\ m>0\\ m>-2\end{cases} \Leftrightarrow m>2$

Câu 33. Cho hàm số $y=\sin 2x-2\sqrt{3}\cos^2 x+2\sqrt{3}$. Gọi M và n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đó. Tính $M+n$?

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $1+2\sqrt{3}$. **C.** $4+\sqrt{3}$. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $y=\sin 2x-2\sqrt{3}.\dfrac{1+\cos 2x}{2}+2\sqrt{3}$.

$\Leftrightarrow y=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x+\sqrt{3}$.

$\Leftrightarrow y=2\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)+\sqrt{3}$.

$\Leftrightarrow y=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}$.

Do $\Leftrightarrow -1\le \sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\le 1 \Leftrightarrow -2+\sqrt{3}\le 2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\le 2+\sqrt{3} \Leftrightarrow -2+\sqrt{3}\le y\le 2+\sqrt{3}$.

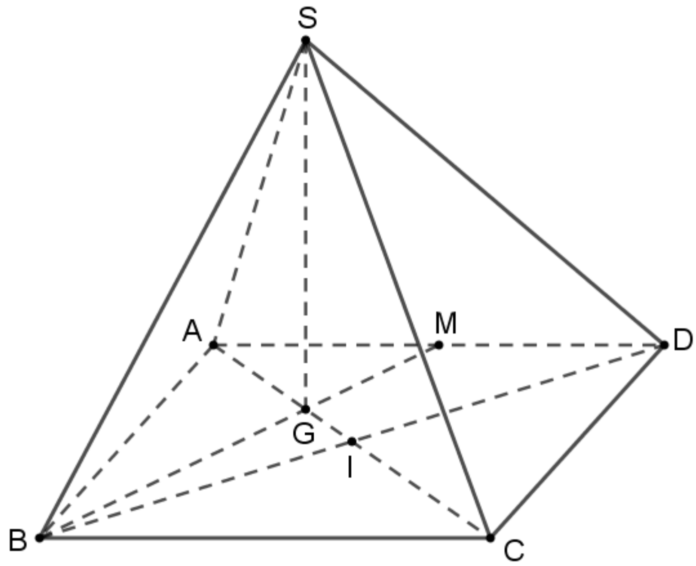
Khi đó $M=2+\sqrt{3}$, $n=-2+\sqrt{3}$.

Vậy $M+n=2\sqrt{3}$.

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a có góc BAD bằng $60°$ và $SA=SB=SD=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính $d\left(S;(ABCD)\right)$ và cạnh SC?

A. $\dfrac{a\sqrt{15}}{16};\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{2};\dfrac{a\sqrt{15}}{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{6};\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{12};\dfrac{a\sqrt{15}}{16}$.

Lời giải



Gọi G là trọng tâm tam giác ABD, gọi I là giao điểm của AC và BD.

Ta có tam giác ABD đều và $SA = SB = SD$ nên hình chiếu của đỉnh S xuống mặt phẳng $(ABCD)$ là trọng tâm G của tam giác ABD.

Ta có $AI = CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AG = \frac{2}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}, GI = \frac{1}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Trong tam giác SAG có $SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{15}}{6}$.

Do $SG \perp (ABCD)$ nên $d(S;(ABCD)) = SG = \frac{a\sqrt{15}}{6}$.

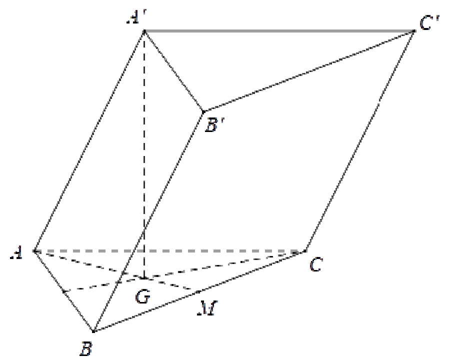
Lại có $GC = GI + IC = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

Trong tam giác SGC có $SC = \sqrt{SG^2 + GC^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{12} + \frac{4a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Câu 35: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, tam giác ABC đều cạnh a, $AA' = a$ và đỉnh A' cách đều A, B, C. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh $BC, A'B$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ và khoảng cách từ C đến (AMN).

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}; \frac{a\sqrt{22}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{22}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}; \frac{a\sqrt{7}}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{22}}{11}$.

Lời giải



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

Vì A' cách đều A,B,C nên $A'G\perp\left(ABC\right)$

Ta có $AG=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow A'G=\sqrt{AA'^2-AG^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, $S_{ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$V_{ABC.A'B'C'}=S_{ABC}.A'G=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{6}}{3}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$

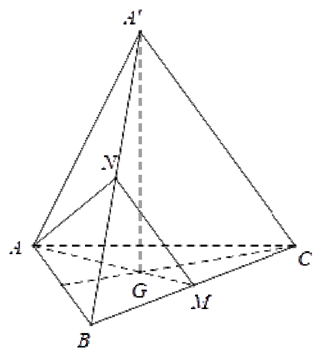
+ Tính khoảng cách từ C đến $\left(AMN\right)$.

Ta có: $A'B=A'C=A'A=a$ và $MN=\dfrac{1}{2}A'C=\dfrac{a}{2},AN=AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên tam giác AMN cân tại A

Gọi H là trung điểm của MN thì $AH=\sqrt{AM^2-HM^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}MN\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{11}}{4}$

$S_{AMN}=\dfrac{1}{2}AH.MN=\dfrac{a^2\sqrt{11}}{16}$

Xét khối chóp $BAA'C$ có:



$\dfrac{V_{BANM}}{V_{BAA'C}}=\dfrac{BN}{BA'}.\dfrac{BM}{BC}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow V_{BAMN}=\dfrac{1}{4}V_{BAA'C}=\dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{1}{12}.\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{48}$

Mặt khác $V_{BAMN}=\frac{1}{3}S_{AMN}.d\left(B,\left(AMN\right)\right)\Rightarrow d\left(B,\left(AMN\right)\right)=\frac{3\frac{a^3\sqrt{2}}{48}}{\frac{a^2\sqrt{11}}{16}}=\frac{a\sqrt{22}}{11}$

Câu 36: Chu vi của một tam giác là 16 cm,biết độ dài một cạnh của tam giác là $a=6$ cm. Tính độ dài hai cạnh còn lại của tam giác sao cho tam giác đó có diện tích lớn nhất.

A. $5cm,5cm$. **B.** $3cm,7cm$. **C.** $2cm,8cm$. **D.** $4cm,6cm$.

Lời giải

Gọi một cạnh chưa biết của tam giác là x, $0<x<16$ thì cạnh còn lại là $16-6-x=10-x$.

Khi đó, theo công thức Hê-rông thì diện tích tam giác là

$S=\sqrt{8.2.(8-x)(8-10+x)}=4\sqrt{(8-x)(x-2)}=4\sqrt{-x^2+10x-16}$

$S'=\left(4\sqrt{-x^2+10x-16}\right)'=\frac{20-4x}{\sqrt{-x^2+10x-16}}$

$S'=0\Leftrightarrow x=5$

Lập bảng biến thiên ta được S đạt giá trị lớn nhất khi $x=5$ cm.

Câu 37: Cho $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$. Khẳng định nào đúng?

A. $\tan x+2\sin x>3x$. **B.** $\tan x+2\sin x<3x$.

C. $\tan x+2\sin x\ge 3x$. **D.** $\tan x+2\sin x\le 3x$.

Lời giải

Đặt $f\left(x\right)=\tan x+2\sin x-3x$, $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$

Suy ra: $f'\left(x\right)=\frac{1}{\cos^2 x}+2\cos x-3=\frac{2\cos^3 x-3\cos^2 x+1}{\cos^2 x}$

Đặt $t=\cos x$ $\Rightarrow t\in\left(0;1\right]$

$f'\left(x\right)=g\left(t\right)=\frac{2t^3-3t^2+1}{t^2}$ có bảng xét dấu

t	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$g\left(t\right)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$+$	

Suy ra $g\left(t\right)\ge 0$, $\forall t\in\left(0;1\right]\Rightarrow f'\left(x\right)\ge 0,\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

Mà $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) \Rightarrow \tan x + 2\sin x - 3x \geq 0$

Vậy $\tan x + 2\sin x \geq 3x$.

Câu 38: Tìm m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$?

A. $m = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $m = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $m = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $m = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2m$

Hàm số có hai điểm cực trị khi $m \neq 0$

Gọi $A(0;4m^3)$, $B(2m;0)$ là hai điểm cực trị

Suy ra: $\overrightarrow{AB} = (2m;-4m^3)$ và trung điểm của AB là $I(m;2m^3)$

A, B đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$ $\Leftrightarrow \begin{cases} AB \perp d \\ I \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 4m^3 = 0 \\ 2m^3 = m \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$.

Do $m \neq 0 \Rightarrow m = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 39: Cho $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = \dfrac{x^2 + 6xy}{1 + 2xy + 2y^2}$.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{6}{\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$.

Lời giải

- Nếu $y = 0 \Rightarrow P = x^2 = 1$.
- Nếu $y \neq 0$ ta có $P = \dfrac{x^2 + 6xy}{1 + 2xy + 2y^2} = \dfrac{x^2 + 6xy}{x^2 + y^2 + 2xy + 2y^2} = \dfrac{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 6\dfrac{x}{y}}{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + 2\dfrac{x}{y} + 3}$.

  Đặt $t = \dfrac{x}{y}$ ta có $P = \dfrac{t^2 + 6t}{t^2 + 2t + 3} = f(t)$.

  Ta có $f'(t) = \dfrac{-4t^2 + 6t + 18}{(t^2 + 2t + 3)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(t) = 1$.

  Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1

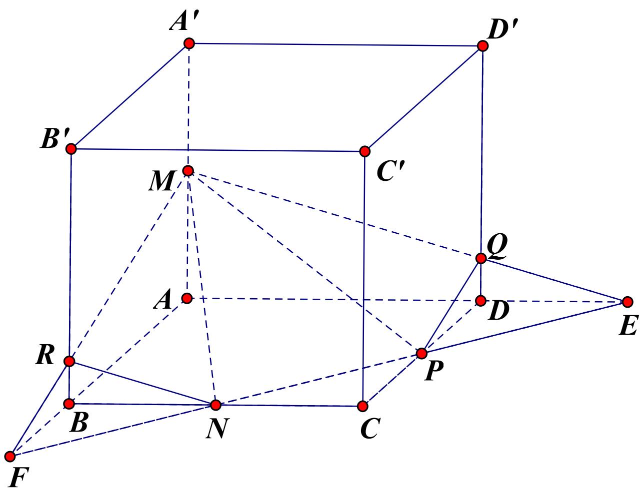
Từ bảng biến thiên ta suy ra $P_{max}=\frac{3}{2}$.

Kết hợp hai trường hợp suy ra $P_{max}=\frac{3}{2}$.

Câu 40: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AA', BC, CD. Cắt hình hộp bởi mặt phẳng (MNP). Tính tỉ số thể tích của hai phần tạo thành?

A. $\frac{119}{425}$. **B.** $\frac{119}{25}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{113}{24}$.

Lời giải



Trong mặt phẳng $(ABCD)$ có $NP\cap AD=E$, $NP\cap AB=F$.

Trong mặt phẳng $(ABB'A')$ có $MF\cap BB'=R$.

Trong mặt phẳng $(ADD'A')$ có $ME\cap DD'=Q$.

Mặt phẳng (MNP) chia hình lập phương thành hai phần một phần là khối đa diện $ABNPQMR$ và phần còn lại.

Gọi thể tích khối đa diện $ABNPQMR$ là V_1, thể tích phần còn lại là V_2; thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là V.

Ta có: $V_1=V_{M.AFE}-V_{R.BFN}-V_{Q.DPE}$.

Ta có $S_{BFN}=S_{DPE}=S_{CNP}=\frac{1}{8}S_{ABCD}$.

$S_{AEF}=S_{ABNPD}+S_{BFN}+S_{DPE}=S_{ABCD}+S_{BFN}=S_{ABCD}+\frac{1}{8}S_{ABCD}=\frac{9}{8}S_{ABCD}$.

$d(M,(AEF))=\frac{1}{2}d(A',(ABCD))$, $d(R,(BNF))=\frac{1}{6}d(A',(ABCD))$,

$d\left(Q,\left(BNF\right)\right)=\dfrac{1}{6}d\left(A',\left(ABCD\right)\right)$.

Suy ra $V_{M.AFE}=\dfrac{1}{3}.d\left(M,\left(AEF\right)\right).S_{AEF}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}.d\left(A',\left(ABCD\right)\right).\dfrac{9}{8}S_{ABCD}=\dfrac{3}{16}V$.

Tương tự ta có $V_{R.BFN}=V_{Q.DPE}=\dfrac{1}{144}V$.

Suy ra $V_1=\dfrac{3}{16}V-\dfrac{1}{144}V-\dfrac{1}{144}V=\dfrac{25}{144}.V$; $V_2=V-V_1=V-\dfrac{25}{144}V=\dfrac{119}{144}V$.

Vậy $\dfrac{V_2}{V_1}=\dfrac{119}{25}$.