

**Câu 1:** Tìm phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-1}$ .

A.  $x = 1$ .

B.  $x = -1$ .

C.  $y = 2$ .

D.  $y = \frac{1}{2}$ .

Lời giải

**Chọn A**

Tính  $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$ . Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng  $x = 1$ .

**Câu 2:** Tính số điểm cực trị của hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ .

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

**Chọn A**

TXĐ:  $D = \mathbb{R}$

Tính  $y' = 3x^2 - 6x + 3$

Giải PT  $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$  (nghiệm kép). Hàm số không có cực trị.

**Câu 3:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình  $f(x) = 0$ .

$x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
$y'$		-	0	+	0	-
$y$	$+\infty$			3		$-\infty$

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

**Chọn D.**

Dựa vào bảng biến thiên ta có số nghiệm của phương trình  $f(x) = 0$  là 3.

**Câu 4:** Trong các hàm số được cho dưới đây, hàm số nào đồng biến trên tập xác định của nó?

A.  $y = \sqrt{x^2 - 1}$ .

B.  $y = x^3 - 3x + 1$ .

C.  $y = \frac{2x-1}{x+1}$ .

D.  $y = x^4 + 4x^2 - 1$

Lời giải

**Chọn C.**

Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

$y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$  nên hàm số đồng biến trên tập xác định.

**Câu 5:** Tính tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$$y = \frac{x-1}{x-\sqrt{2x-1}}$$

A. 0.

B. 1.

**C. 2.**

D. 3.

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x-\sqrt{2x-1} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Ta có  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x-\sqrt{2x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{1-\sqrt{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}} = 1$ . Vậy  $y=1$  là đường tiệm cận ngang của đồ thị

hàm số.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-\sqrt{2x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+\sqrt{2x-1})}{(x-\sqrt{2x-1})(x+\sqrt{2x-1})} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+\sqrt{2x-1})}{(x-1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{x-\sqrt{2x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+\sqrt{2x-1})}{(x-\sqrt{2x-1})(x+\sqrt{2x-1})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+\sqrt{2x-1})}{(x-1)^2} = -\infty$$

Vậy  $x=1$  là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Kết luận: hàm số có một đường tiệm cận đứng và một đường tiệm cận ngang.

**Câu 6:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$  tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung.

A.  $y = -x + 1$ .

**B.  $y = x + 1$ .**

C.  $y = -x - 1$ .

D.  $y = x - 1$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm  $A(0; 1)$ .

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow y'(0) = 1.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm  $A(0; 1)$  của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$  là

$$y = y'(0)(x-0) + 1 = x + 1.$$

**Câu 7:** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x + \frac{4}{x}$  trên đoạn  $[1; 4]$

**A. 4.**

B.  $2\sqrt{3}$ .

C. 5.

D.  $3\sqrt{2}$ .

Lời giải

**Chọn A.**

Đạo hàm:  $y' = 1 - \frac{4}{x^2} \rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \in [1; 4] \\ x = -2 \notin [1; 4] \end{cases}$

Ta có:  $\begin{cases} y(1) = 5 \\ y(4) = 5 \\ y(2) = 4 \end{cases} \rightarrow \min_{[1; 4]} y = 4.$

**Câu 8:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ ,  $SA$  vuông góc với mặt đáy còn  $SC$  tạo với đáy một góc  $60^\circ$ . Tính theo  $a$  thể tích khối chóp  $S.ABCD$ .

**A.**  $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$ .

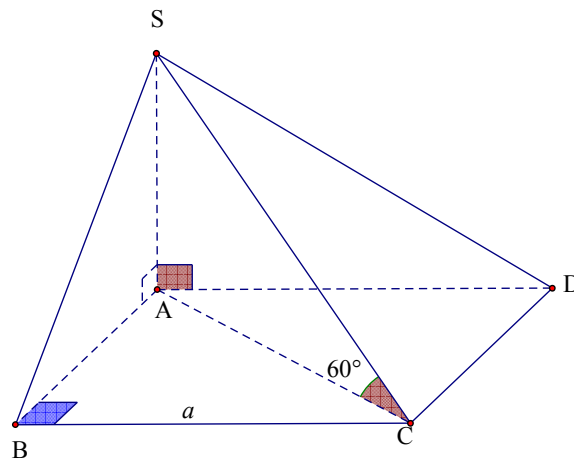
**B.**  $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ .

**C.**  $\frac{a^3}{4}$ .

**D.**  $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn A.**



Ta có:  $SA \perp (ABCD) \rightarrow$  hình chiếu của  $SC$  lên mp  $(ABCD)$  là  $AC$ . Khi đó:  $(\widehat{SC; (ABCD)}) = (\widehat{SC; AC}) = \widehat{SCA} = 60^\circ$ .

Xét tam giác  $SAC$  vuông tại  $A$  có:  $\tan 60^\circ = \frac{SA}{AC} \rightarrow SA = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{6}$ .

Vậy thể tích khối chóp  $S.ABCD$  là:  $V = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{6} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$ .

**Câu 9:** Lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có hình chóp  $A'.ABC$  là hình chóp tam giác đều mà độ dài cạnh đáy là  $a$ ,  $AA'$  tạo với đáy một góc  $60^\circ$ . Tính theo  $a$  thể tích khối lăng trụ đã cho.

**A.**  $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$ .

**B.**  $\frac{a^2\sqrt{2}}{12}$ .

**C.**  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .

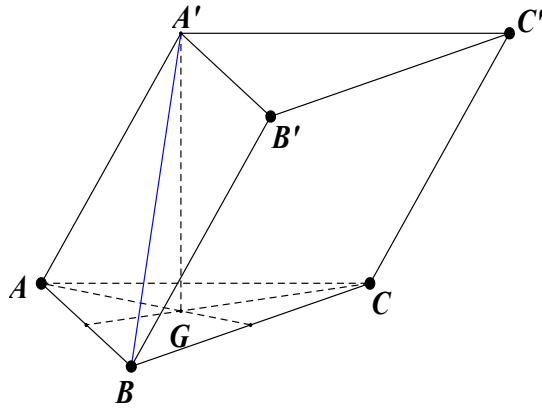
**D.**  $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có  $\tan 60^\circ = \frac{A'G}{AG} \Rightarrow A'G = \tan 60^\circ \cdot AG = \sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = a$

Suy ra  $V_{ABC.A'B'C'} = A'G \cdot S_{ABC} = a \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$



**Câu 10:** Cho hình chóp có đáy là hình bình hành. Gọi  $M$  là trung điểm của  $SB$ . Tính tỉ số thể tích

$$\frac{V_{S.ABCD}}{V_{M.BCD}}$$

A.  $\frac{1}{2}$ .

B. 1.

C. 2.

D. 4.

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi  $SH$  là đường cao của khối chóp  $SABCD$

Ta có  $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD}$

Lại có  $M$  là trung điểm của  $SB$  nên  $V_{M.BCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} SH \cdot S_{BCD}$

Mà  $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$

Suy ra  $\frac{V_{S.ABCD}}{V_{M.BCD}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} SH \cdot S_{BCD}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} SH \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD}} = 4$

**Câu 11:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác đều cạnh  $a$ ,  $SA$  vuông góc với đáy và  $SB$  tạo với đáy góc  $45^\circ$ . Tính khoảng cách từ  $A$  đến mặt phẳng  $(SBC)$

A.  $\frac{a\sqrt{21}}{7}$

B.  $\frac{a\sqrt{21}}{3}$

C.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

D.  $\frac{a\sqrt{7}}{3}$

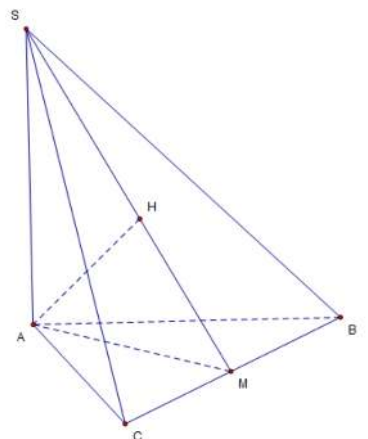
**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:  $(\widehat{SB, (ABC)}) = \widehat{SBA} = 45^\circ$ ,  $SA = AB \tan 45^\circ = a$

Dựng  $AM \perp BC$  tại  $M$ , dựng  $AH \perp SM$  tại  $H$

Ta có:  $AH \perp (SBC) \Rightarrow d[A; (SBC)] = AH$



$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

$$\text{Vậy } d[A; (SBC)] = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

**Câu 12:** Hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số  $y = \frac{-x+1}{x+1}$  tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích  $S$ . Tính  $S$ .

**A.**  $S = 1$ .

**B.**  $S = \frac{1}{2}$ .

**C.**  $S = 2$ .

**D.**  $S = 4$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Tiệm cận đứng:  $(d_1): x = 1$

Tiệm cận ngang:  $(d_2): y = -1$

Gọi  $A$  là giao điểm của  $d_1$  và  $Ox$ ,  $B$  là giao điểm của  $d_2$  và  $Oy$ ,  $I$  là giao điểm của  $d_1$  và  $d_2$ . Khi đó  $O A I B$  là hình chữ nhật có độ dài 2 cạnh là 1 và 1  $\Rightarrow S = 1$ .

**Câu 13:** Tìm tất cả giá trị tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + mx - m$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

**A.**  $m \geq 3$ .

**B.**  $m > 1$ .

**C.**  $m \geq 9$ .

**D.**  $m > -3$ .

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có  $y' = x^2 - 6x + m$

Hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + mx - m$  đồng biến trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = 9 - m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 9.$$

**Câu 14:** Đồ thị hai hàm số  $y = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1}$  và  $y = x - 1$  cắt nhau tại hai điểm  $A, B$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AB$ .

**A.**  $AB = \sqrt{2}$ .

**B.**  $AB = 1$ .

**C.**  $AB = \sqrt{2}$ .

**D.**  $AB = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**Lời giải**

**Chọn C.**

Phương trình hoành độ giao điểm  $\frac{2x^2 - x + 1}{x - 1} = x - 1$  (điều kiện  $x \neq 1$ )

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x + 1 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow A(0; -1) \\ x = -1 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow B(-1; -2) \end{cases}$$

Ta có  $AB = \sqrt{(-1-0)^2 + (-2-(-1))^2} = \sqrt{2}$ .

**Câu 15:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = x^3 - 3x + 1$ , biết hệ số góc của tiếp tuyến là 9

A.  $y = 9x + 15$ ;  $y = 9x - 17$ .

B.  $y = 9x - 15$ ;  $y = 9x - 17$ .

C.  $y = 9x + 15$ ;  $y = 9x + 17$ .

D.  $y = 9x - 15$ ;  $y = 9x + 17$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có:  $y' = 3x^2 - 3$

Mà hệ số góc của tiếp tuyến bằng 9 nên  $3x_0^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 3 \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -1 \end{cases}$ .

Với  $x_0 = 2, y_0 = 3, y'(2) = 9$

$\Rightarrow$  Phương trình tiếp tuyến là  $y = 9(x - 2) + 3 = 9x - 15$ .

Với  $x_0 = -2, y_0 = -1, y'(-2) = 9$

$\Rightarrow$  Phương trình tiếp tuyến là  $y = 9(x + 2) - 1 = 9x + 17$ .

**Câu 16:** Tìm tập hợp giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = mx^4 - (m-1)x^2 - 1$  có ba điểm cực trị

A.  $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ .

B.  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

C.  $(0; 1)$ .

D.  $(-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Hàm số có ba cực trị  $\Leftrightarrow ab < 0 \Leftrightarrow -m(m-1) < 0 \Leftrightarrow -m^2 + m < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 1 \end{cases}$ .

**Câu 17:** Hình chóp có đáy là tam giác vuông cân  $ABC$  độ dài cạnh huyền là  $2a$ . Cạnh  $SA$  có độ dài  $a\sqrt{2}$  và tạo với mặt đáy một góc  $45^\circ$ . Tính thể tích  $V$  của khối chóp đã cho.

A.  $V = a^3$ .

B.  $V = \sqrt{2}a^3$ .

C.  $V = \frac{a^3}{3}$ .

D.  $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn C.**

Gọi H là chân đường cao của hình chóp.

Khi đó, góc giữa  $SA$  và mặt đáy là góc  $\widehat{SAH}$ .

$\Rightarrow \widehat{SAH} = 45^\circ$ .

Ta có:  $\sin 45^\circ = \frac{SH}{SA} \Rightarrow SH = SA \cdot \sin 45^\circ = a$ .

Vì tam giác  $ABC$  vuông cân và có độ dài cạnh huyền bằng  $2a$  nên cạnh góc vuông là  $a\sqrt{2}$ .

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = a^2$ .

Vậy,  $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot SH = \frac{a^3}{3}$ .

**Câu 18:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác đều cạnh  $a$ ,  $SA$  vuông góc với mặt đáy và  $(SBC)$  tạo với đáy góc  $30^\circ$ . Tính diện tích  $S$  của tam giác  $SBC$

A.  $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .

B.  $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .

C.  $S = \frac{3a^2}{4}$ .

D.  $S = \frac{a^2}{2}$ .

Lời giải

Chọn D.

Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC \Rightarrow AI \perp BC$ .

Ta có:  $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI)$ .

$\Rightarrow BC \perp SI$ .

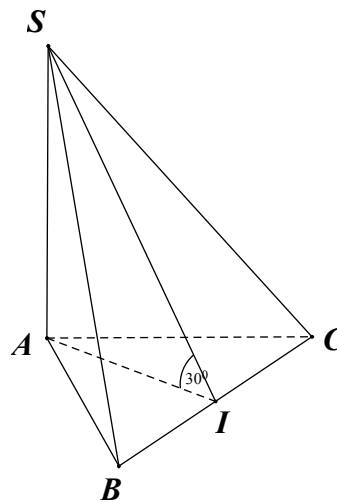
Vậy góc giữa  $(SBC)$  và mặt đáy là  $\widehat{SIA}$

$\Rightarrow \widehat{SIA} = 30^\circ$ .

Vì  $\Delta ABC$  đều cạnh  $a$  nên  $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Ta có:  $\cos 30^\circ = \frac{AI}{SI} \Rightarrow SI = \frac{AI}{\cos 30^\circ} = a$ .

Vậy,  $S = \frac{1}{2} \cdot SI \cdot BC = \frac{a^2}{2}$ .



**Câu 19:** Cho hình chóp tứ giác  $S.ABCD$ . Mặt phẳng đi qua trung điểm các cạnh bên chia khối chóp thành hai khối có thể tích là  $V_1, V_2$  ( $V_1 > V_2$ ). Tính tỉ số  $\frac{V_1}{V_2}$ .

A.  $\frac{V_1}{V_2} = 7$ .

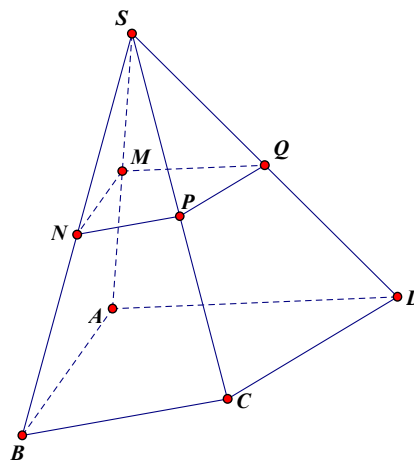
B.  $\frac{V_1}{V_2} = 15$ .

C.  $\frac{V_1}{V_2} = 3$ .

D.  $\frac{V_1}{V_2} = 5$ .

Lời giải

Chọn A



Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm  $SA, SB, SC, SD$

$(MNPQ) \parallel (ABCD)$  và  $S_{MNPQ} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$ ,  $d(S, (MNPQ)) = \frac{1}{2} d(S, (ABCD))$

$$V_{S.MNPQ} = \frac{1}{3} d(S, (MNPQ)) \cdot S_{MNPQ} = \frac{1}{8} V_{S.ABCD}$$

Vậy  $\frac{V_1}{V_2} = 7$ .

**Câu 20:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có độ dài các cạnh  $SA = a$ ;  $SB = 2a$ ;  $SC = a$  và các cạnh  $SA, SB, SC$  đôi một vuông góc. Tính diện tích tam giác  $ABC$ .

**A.**  $d = a^2$ .

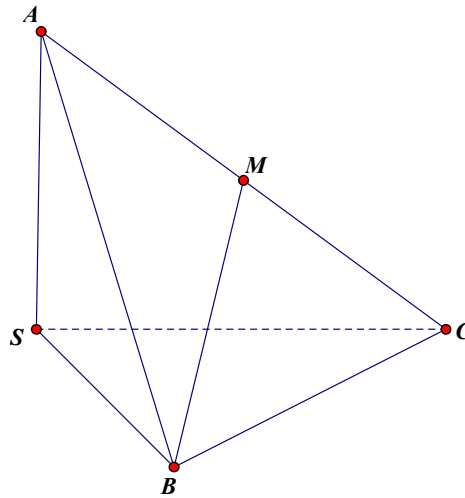
**B.**  $d = 3a^2$ .

**C.**  $d = 2a^2$ .

**D.**  $d = \frac{3a^2}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



Các tam giác  $\Delta SAB, \Delta SBC, \Delta SCA$  vuông tại  $S$

$$AB = \sqrt{SA^2 + SB^2} = a\sqrt{5}; \quad BC = \sqrt{SB^2 + SC^2} = a\sqrt{5}; \quad AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = a\sqrt{2}$$

Tam giác  $ABC$  cân tại  $B$

Gọi  $M$  là trung điểm của  $AC \Rightarrow BM \perp AC$

$$BM = \sqrt{BC^2 - CM^2} = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} a.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BM \cdot AC = \frac{3a^2}{2}.$$

**Câu 21:** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên tập  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , liên tục trên các khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$+\infty$			
$y'$		+	+	0	-		
$y$			$+\infty$		$-1$		$-\infty$



A. Đồ thị hàm số có duy nhất đường tiệm cận đứng là  $x = 0$ .

B. Đồ thị hàm số có duy nhất đường tiệm cận đứng là  $x = -1$ .

C. Đường thẳng  $x = 0$  và  $x = -1$  là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Lời giải

Chọn B

Vì  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = -\infty$  nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là  $x = -1$ .

Câu 22: Tính tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$  trên đoạn  $[-4; 0]$ .

A. 24.

B. 21.

C. 22.

D. 29.

Lời giải

Chọn D

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \notin [-4; 0] \\ x = -3 \end{cases}$$

$$f(-4) = 21; \quad f(0) = 1; \quad f(-3) = 28.$$

$$\max_{[-4; 0]} f(x) = f(-3) = 28; \quad \min_{[-4; 0]} f(x) = f(0) = 1$$

Vậy tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 29.

Câu 23: Tìm tập hợp giá trị tham số  $m$  để hàm số  $y = x^3 + 3x^2 - mx - 1$  có hai điểm cực trị cùng dấu?

A.  $(-\infty; -3)$ .

B.  $(-3; 0)$ .

C.  $(0; 3)$ .

D.  $(3; +\infty)$ .

Lời giải

Chọn B.

Có  $y' = 3x^2 + 6x - m$ .

Để hàm số có hai điểm cực trị cùng dấu thì  $y' = 0$  có hai nghiệm phân biệt tại  $x_1, x_2$  và  $x_1 \cdot x_2 > 0$ .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 + 3m > 0 \\ -\frac{m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 0.$$

Câu 24: Cho tứ diện  $ABCD$  có  $AB, AC, AD$  đôi một vuông góc và  $AB = a; AC = 2a; AD = 3a$ . Gọi  $M, N, P, Q, R, S$  là trung điểm cạnh  $AB, AC, AD, BC, BD, CD$ . Tính thể tích khối đa diện tạo bởi hình tam giác  $MNP, QRS, MNQ, PRS, PNS, MQR, MPR, NQS$ .

A.  $\frac{a^3}{4}$ .

B.  $\frac{a^3}{3}$ .

C.  $\frac{a^3}{2}$ .

D.  $\frac{2a^3}{3}$ .

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Có } V_{A.BCD} = V_{B.ACD} = \frac{1}{3} BA.S_{ACD} = \frac{1}{3} AB \cdot \frac{1}{2} AC \cdot AD = \frac{1}{6} AB \cdot AC \cdot AD = a^3 = V.$$

$$\text{Có } V_{MNPQRS} = V_{A.BCD} - V_{A.MNP} - V_{B.MPQ} - V_{C.NQS} - V_{D.PRS}.$$

$$\text{Để thấy } \frac{V_{A.MNP}}{V_{A.BCD}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AP}{AD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{A.MNP} = \frac{1}{8} V_{A.BCD}.$$

$$\text{Tương tự, } V_{B.MPQ} = \frac{1}{8} V_{B.CAD}; V_{C.NQS} = \frac{1}{8} V_{C.ABD}; V_{D.PRS} = \frac{1}{8} V_{D.ABC}.$$

$$\text{Do đó, } V_{MNPQRS} = V - \frac{1}{8} V - \frac{1}{8} V - \frac{1}{8} V - \frac{1}{8} V = \frac{4}{8} V = \frac{V}{2} = \frac{a^3}{2}.$$

**Câu 25:** Cho hình chóp  $S.ABC$  có đáy là tam giác đều cạnh  $a$ , Các mặt bên của hình chóp cùng tạo với mặt đáy một góc  $45^\circ$  và hình chiếu của  $S$  trên mặt phẳng đáy nằm ngoài tam giác  $ABC$ . Tính thể tích khối chóp  $S.ABC$ .

A.  $V = \frac{a^3}{8}$ .

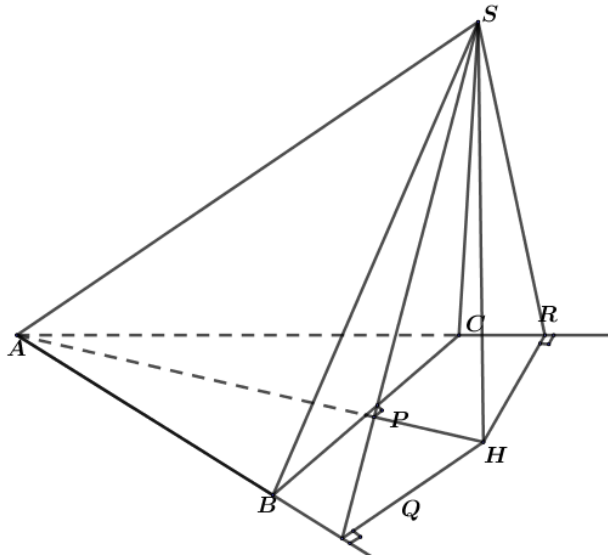
**B.**  $V = \frac{a^3}{4}$ .

C.  $V = \frac{a^3}{6}$ .

D.  $V = \frac{a^3}{24}$ .

Lời giải

**Chọn A**



Gọi  $H$  là hình chiếu của  $S$  trên mặt phẳng  $(ABC)$ .

Gọi hình chiếu của  $H$  lên các cạnh  $AB, BC, CA$  lần lượt là  $P, Q, R$ .

Để dàng có được góc giữa các mặt bên với đáy chính là các góc  $\widehat{SPH} = \widehat{SQH} = \widehat{SRH} = 45^\circ$ .

Vậy ta có ba tam giác vuông cân bằng nhau  $SHP, SHQ, SHR$ , suy ra  $HP = HQ = HR$ .

$\Rightarrow H$  là tâm đường tròn bàng tiếp  $\Delta ABC$ . Do  $\Delta ABC$  đều, không mất tính tổng quát, ta coi  $H$  là tâm đường tròn bàng tiếp góc  $A$ .

$$\text{Gọi } r_a \text{ là bán kính đường tròn bàng tiếp góc } A \text{ thì } r_a = \frac{S}{p-a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow SH = r_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{8}.$$

**Câu 26:** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x) = 2\sin^3 x + \cos 2x$  trên tập

$$D = \left[ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right]$$

**A.**  $\max_{x \in D} f(x) = 1, \min_{x \in D} f(x) = \frac{19}{27}.$

**B.**  $\max_{x \in D} f(x) = \frac{3}{4}, \min_{x \in D} f(x) = -3.$

**C.**  $\max_{x \in D} f(x) = \frac{3}{4}, \min_{x \in D} f(x) = \frac{19}{27}.$

**D.**  $\max_{x \in D} f(x) = 1, \min_{x \in D} f(x) = -3.$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:  $y = f(x) = 2\sin^3 x - 2\sin^2 x + 1$

Đặt  $t = \sin x, t \in \left[ \frac{1}{2}; 1 \right]$

$$\Rightarrow y = 2t^3 - 2t^2 + 1$$

$$\Rightarrow y' = 6t^2 - 4t$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \text{ (l)} \\ t = \frac{2}{3} \text{ (n)} \end{cases}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}; f(1) = 1; f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{19}{27}$$

Vậy  $\max_{x \in D} f(x) = 1, \min_{x \in D} f(x) = \frac{19}{27}.$

**Câu 27:** Cho hình chóp tứ giác  $S.ABCD$  có  $M, N, P, Q$  là trung điểm các cạnh đáy. Tính tỉ lệ thể tích

$$\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}}.$$

**A.**  $\frac{1}{2}.$

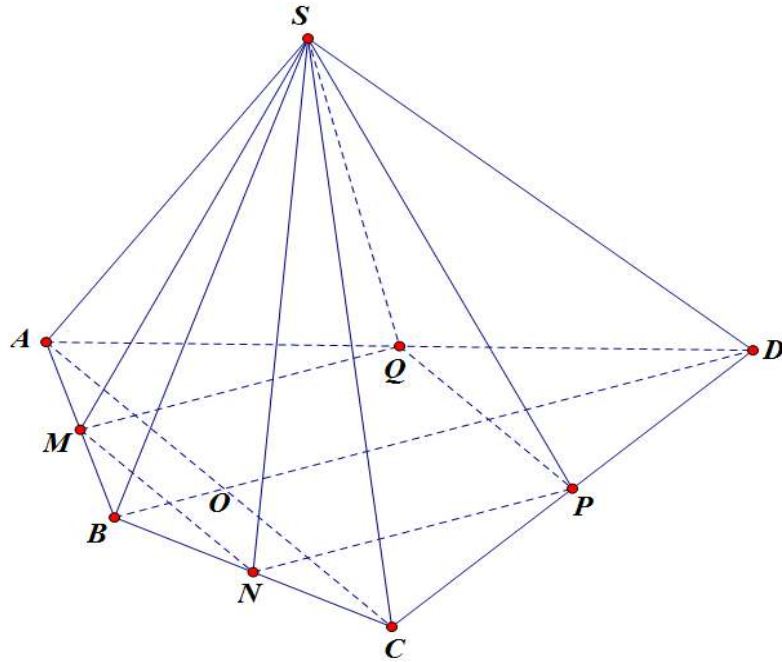
**B.**  $\frac{1}{3}.$

**C.**  $\frac{1}{4}.$

**D.**  $\frac{1}{6}.$

**Lời giải**

**Chọn A.**



Ta có: 
$$\frac{S_{\Delta AMQ}}{S_{\Delta ABD}} = \frac{\frac{1}{2} AM \cdot AQ \cdot \sin A}{\frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin A} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\Delta AMQ} = \frac{1}{4} S_{\Delta ABD}$$

Tương tự: 
$$S_{\Delta BMN} = \frac{1}{4} S_{\Delta ABC}, S_{\Delta CNP} = \frac{1}{4} S_{\Delta BCD}, S_{\Delta PDQ} = \frac{1}{4} S_{\Delta CDA}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{MNPQ} &= S_{ABCD} - (S_{\Delta AMQ} + S_{\Delta BMN} + S_{\Delta CNP} + S_{\Delta PDQ}) = S_{ABCD} - \frac{1}{4} (S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD} + S_{\Delta ABC} + S_{\Delta CDA}) \\ &= S_{ABCD} - \frac{1}{4} (S_{ABCD} + S_{ABCD}) = \frac{1}{2} S_{ABCD} \end{aligned}$$

Vậy 
$$\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{1}{3} d(S; (ABCD)) \cdot S_{MNPQ}}{\frac{1}{3} d(S; (ABCD)) \cdot S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{3} d(S; (ABCD)) \cdot \frac{1}{2} S_{ABCD}}{\frac{1}{3} d(S; (ABCD)) \cdot S_{ABCD}} = \frac{1}{2}$$

**Câu 28:** Tính thể tích  $V$  khối lăng trụ tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng  $a$ .

A.  $V = a^3$ .      B.  $V = \frac{a^3}{2}$ .      C.  $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$ .      D.  $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$ .

**Lời giải**

**Chọn A.**

Khối lăng trụ tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng  $a$  nên đó là khối lập phương  
 Vậy thể tích  $V$  khối lăng trụ tứ giác đều là  $V = a^3$ .

**Câu 29:** Cho biết giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4mx + 2m^2} + |x|$  là  $\min_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A.  $|m| \in \left[ \frac{1}{10}; \frac{3}{10} \right]$ .      B.  $|m| \in \left[ \frac{3}{10}; \frac{5}{10} \right]$ .      C.  $|m| \in \left[ \frac{5}{10}; \frac{7}{10} \right]$ .      D.  $|m| \in \left[ \frac{7}{10}; \frac{9}{10} \right]$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có  $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4mx + 2m^2} + |x| = \sqrt{(2x - m)^2 + m^2} + |x|$

Đặt  $2x - m = m \tan \alpha$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

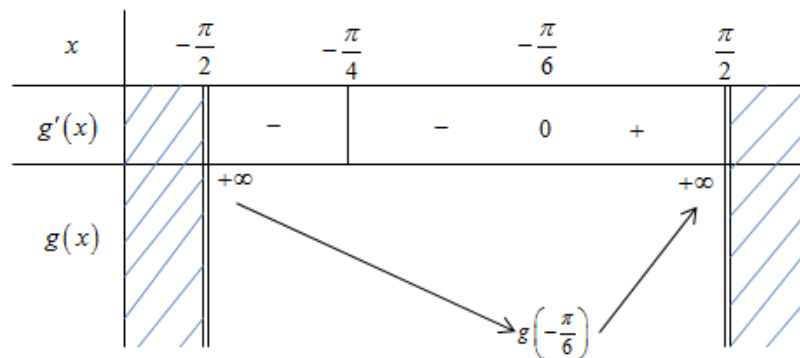
Ta có  $f(x) = |m| \cdot \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{2} \cdot |m| \cdot |1 + \tan \alpha| = |m| \cdot \left( \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{|1 + \tan \alpha|}{2} \right)$

Xét hàm số  $g(x) = \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{|1 + \tan \alpha|}{2}$  trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

Ta có  $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{1 + \tan \alpha}{2} = \frac{2 - \sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{1}{2} & \text{khi } -\frac{\pi}{2} < \alpha < -\frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1 + \tan \alpha}{2} = \frac{2 + \sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{1}{2} & \text{khi } -\frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow g'(x) = \begin{cases} \frac{2 \sin \alpha - 1}{2 \cos^2 \alpha} & \text{khi } -\frac{\pi}{2} < \alpha < -\frac{\pi}{4} \Rightarrow g'(x) < 0, \forall \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right) \\ \frac{2 \sin \alpha + 1}{2 \cos^2 \alpha} & \text{khi } -\frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$

BBT



Suy ra  $\min g(x) = g\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \left|1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right| = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$

$\Rightarrow \min_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} |m| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |m| = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{2} \Rightarrow |m| \in \left[\frac{5}{10}; \frac{7}{10}\right]$ .

**Câu 30:** Tìm tất cả giá trị của tham số  $m$  để hai đồ thị hàm số  $y = \frac{2x+1}{x-1}$ ;  $y = x+m$  cắt nhau tại hai điểm  $A, B$  mà độ dài đoạn thẳng  $AB$  nhỏ nhất.

**A.**  $m = 3$ .

**B.**  $m = 2$ .

**C.**  $m = 1$ .

**D.**  $m = 0$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có  $\frac{2x+1}{x-1} = x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (m-3)x - m - 1 = 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + (m-3)x - m - 1 = 0(1)$

Xét  $\Delta = m^2 - 6m + 9 + 4m + 4 = m^2 - 2m + 13 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ .

Suy ra phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$ . Theo Viet ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 - m \\ x_1 \cdot x_2 = -m - 1 \end{cases}$

Gọi  $A(x_1, x_1 + m), B(x_2, x_2 + m)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow AB &= \sqrt{2(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{2[(x_2 + x_1)^2 - 4x_2x_1]} \\ &= \sqrt{2[(3 - m)^2 - 4(-m - 1)]} = \sqrt{2[(m - 1)^2 + 12]} \geq 2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Do đó độ dài đoạn thẳng  $AB$  nhỏ nhất khi  $m = 1$ .

**Câu 31:** Tính số điểm cực trị của hàm số  $y = x|x^2 - 3x + 1|$ .

A. 1.

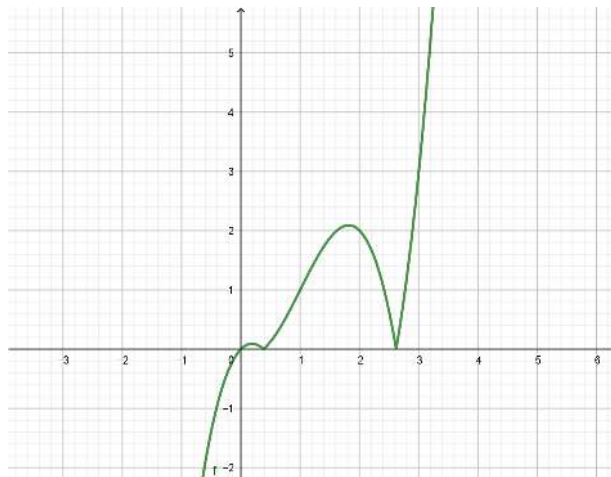
B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn D.



**Câu 32:** Cho hàm số  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  có đồ thị nhận hai điểm  $A(-5; -3), B(-1; 7)$  làm điểm cực trị. Tính giá trị của biểu thức  $P = a + b + c + d$ .

A.  $P = -3$ .

B.  $P = 4$ .

C.  $P = 7$ .

D.  $P = 2$ .

Lời giải

Chọn A.

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$  có 2 nghiệm

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{3a} = -5 - 1 \Rightarrow b = 9a(1); \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a} = -1 \cdot (-5) \Rightarrow c = 15a(2)$$

Mà 2 điểm cực trị là  $(-5; -3)$  và  $(-1; 7)$  thuộc đồ thị nên ta có:  $-125a + 25b - 5c + d = -3$  (3)

$-a + b - c + d = 7$  (4). Giải hệ 4 phương trình (1), (2), (3), (4) ta

$$\text{có: } a = -\frac{5}{16}, b = -\frac{45}{16}, c = -\frac{75}{16}, d = \frac{77}{16} \Rightarrow a + b + c + d = -3$$

**Câu 33:** Gọi  $x_0$  là điểm cực tiểu của hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (-m^2 + m - 1)x + m$ . Tìm giá trị  $m$  để  $x_0$  đạt giá trị nhỏ nhất.

A.  $m = \frac{1 + \sqrt{7}}{4}$

B.  $m = \frac{1 - \sqrt{7}}{4}$

C.  $m = \frac{5}{4}$

D.  $m = \frac{-1 + \sqrt{7}}{4}$

### Lời giải

**Chọn B**

Ta có  $y = x^2 - 2mx + (-m^2 + m - 1)$ .

+) Hàm số có cực trị khi và chỉ khi  $2m^2 - m + 1 > 0$ , đúng với mọi giá trị  $m$ .

+) Vì hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (-m^2 + m - 1)x + m$  có hệ số  $a = \frac{1}{3} > 0$  nên điểm cực tiểu của hàm số là  $x_0 = m + \sqrt{2m^2 - m + 1}$ .

+) Ta có  $x_0' = 1 + \frac{4m-1}{2\sqrt{2m^2 - m + 1}} = \frac{2\sqrt{2m^2 - m + 1} + 4m - 1}{2\sqrt{2m^2 - m + 1}}$ .

+)  $x_0' = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2m^2 - m + 1} + 4m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1 - \sqrt{7}}{4}$ .

+) Bảng biến thiên

$m$	$-\infty$	$\frac{1 - \sqrt{7}}{2}$	$+\infty$
$x_0'$	-	0	+
$x_0$	$+\infty$	$x_0\left(\frac{1 - \sqrt{7}}{2}\right)$	$+\infty$

Vậy  $m = \frac{1 - \sqrt{7}}{2}$  thì  $x_0$  đạt giá trị nhỏ nhất.

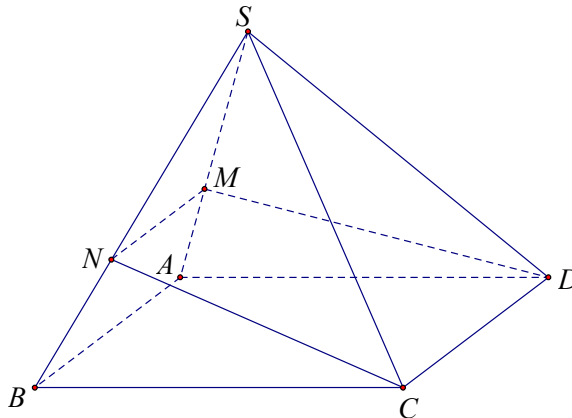
**Câu 34:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có cạnh đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Trên cạnh  $SA, SB$  lần lượt lấy hai điểm  $M, N$  sao cho  $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = x$ , ( $0 < x < 1$ ). Tìm  $x$  sao cho mặt phẳng  $(CMN)$  chia khối chóp  $S.ABCD$  thành hai khối có cùng thể tích.

**A.**  $x = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ .

**B.**  $x = \frac{1}{2}$ .

**C.**  $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**D.**  $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ .



### Lời giải

**Chọn D**

+) Vì  $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB}$  nên  $MN \parallel AB$ . Suy ra  $(CMN)$  cắt hình chóp theo thiết diện là hình thang  $CNMD$ .

+)  $(CMN)$  chia khối chóp  $S.ABCD$  thành hai khối có cùng thể tích khi và chỉ khi

$$\frac{V_{S.MNCD}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{+) Ta có } \frac{V_{S.MNCD}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.MNC} + V_{S.MCD}}{2V_{S.ABC}} = \frac{1}{2} \left[ \frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.MCD}}{V_{S.ABC}} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{V_{S.MNC}}{V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.MCD}}{V_{S.ACD}} \right] = \frac{1}{2}(x^2 + x).$$

$$\text{Từ đó ta có } \frac{1}{2}(x^2 + x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}; (0 < x < 1).$$

**Câu 35:** Xét lăng trụ đứng  $ABCD.A'B'C'D'$  thay đổi có đáy là hình chữ nhật và  $AC' = 2a$  không đổi. Khi tổng diện tích bốn mặt xung quanh của lăng trụ đạt giá trị lớn nhất, hãy tính thể tích  $V$  của khối lăng trụ đang xét.

**A.**  $V = a^3\sqrt{2}$ .

**B.**  $V = a^3\sqrt{3}$ .

**C.**  $V = 2a^3$ .

**D.**  $V = a^3$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Lăng trụ đứng  $ABCD.A'B'C'D'$   $S_{xq} \max \Leftrightarrow AB' = B'C'; AB = BB'$  mà

$$AB'^2 + B'C'^2 = AC'^2 = (2a)^2 \Rightarrow AB' = B'C' = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = BB' = a. \text{ Vậy } V_{ABCD.A'B'C'D'} = a^3\sqrt{2}$$

**Câu 36:** Đồ thị hàm số  $y = \frac{ax+b}{x^2+2x+2}$  có điểm cực trị là  $A(-3; -1)$ . Tính giá trị của biểu thức  $a-b$ .

**A.**  $a-b=1$ .

**B.**  $a-b=9$ .

**C.**  $a-b=-3$ .

**D.**  $a-b=-1$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$y = \frac{ax+b}{x^2+2x+2} \Rightarrow y' = \frac{a(x^2+2x+2) - (2x+2)(ax+b)}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{-ax^2 - 2bx + 2a - 2b}{(x^2+2x+2)^2}$$

Điểm  $A(-3; -1)$  là điểm cực trị

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a(-3)^2 - 2b(-3) + 2a - 2b = 0 \\ \frac{a(-3)+b}{(-3)^2+2(-3)+2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7a+4b=0 \\ -3a+b=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=7 \end{cases} \Rightarrow a-b=4-7=-3.$$

**Câu 37:** Tìm tất cả giá trị của tham số  $m$  sao cho hàm số  $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 - 3m - 5)x + m = 0$  nghịch biến trên khoảng  $D = (1; 2)$ :

**A.**  $\frac{5-\sqrt{41}}{2} \leq m \leq \frac{7-\sqrt{37}}{2}$

**B.**  $\frac{5-\sqrt{41}}{2} \leq m \leq \frac{7+\sqrt{37}}{2}$

**C.**  $\frac{7-\sqrt{37}}{2} \leq m \leq \frac{5+\sqrt{41}}{2}$

**D.**  $\frac{5+\sqrt{41}}{2} \leq m \leq \frac{7+\sqrt{37}}{2}$

**Lời giải**

**Chọn C**



TXĐ:  $D = \mathbb{R}$

$$y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 - 3m - 5)x + m = 0$$

$$\Rightarrow y' = 3x^2 - 2(m+1)x + (m^2 - 3m - 5)$$

$$\text{Vì } a > 0 \Rightarrow Ycbt: \begin{cases} y'(1) \leq 0 \\ y'(2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 1 - 2(m+1) \cdot 1 + m^2 - 3m - 5 \leq 0 \\ 3 \cdot 4 - 2(m+1) \cdot 2 + m^2 - 3m - 5 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 5m - 4 \leq 0 \\ m^2 - 7m + 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5 - \sqrt{41}}{2} \leq m \leq \frac{5 + \sqrt{41}}{2} \\ \frac{7 - \sqrt{37}}{3} \leq m \leq \frac{7 + \sqrt{37}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{7 - \sqrt{37}}{3} \leq m \leq \frac{5 + \sqrt{41}}{2}$$

**Câu 38:** Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị của tham số  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x^2 - 2(m+1)x + m^2 - m$  trên đoạn  $[1; 3]$  là  $-3$ . Tính tổng tất cả phần tử của  $S$

**A.**  $\frac{20}{3}$

**B.**  $\frac{2}{3}$

**C.**  $\frac{29}{3}$

**D.**  $\frac{7}{3}$

**Lời giải**

**Chọn A**

$$f(x) = x^2 - 2(m+1)x + m^2 - m \Rightarrow f'(x) = 2x - 2(m+1) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = m+1$$

$$f(1) = m^2 - 3m - 1; f(3) = m^2 - 7m + 3; f(m+1) = -3m - 1$$

$$\text{TH1: } m+1 > 3 \Leftrightarrow m > 2$$

$$\Rightarrow f(3) = -3 \Leftrightarrow m^2 - 7m + 3 = -3 \Leftrightarrow m^2 - 7m + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1(l) \\ m = 6(n) \end{cases}$$

$$\text{TH2: } m+1 < 1 \Leftrightarrow m < 0$$

$$\Rightarrow f(1) = -3 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 1 = -3 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1(l) \\ m = 2(l) \end{cases}$$

$$\text{TH3: } 1 \leq m+1 \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$$

$$\Rightarrow f(m+1) = -3 \Leftrightarrow -3m - 1 = -3 \Leftrightarrow -3m = -1 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}(n)$$

$$\text{Vậy } S = 6 + \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$$

**Câu 39:** Hình chóp đều  $S.ABCD$  có bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $SAC$  là  $R$ . Tính giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp

**A.**  $\frac{64R^3}{27}$

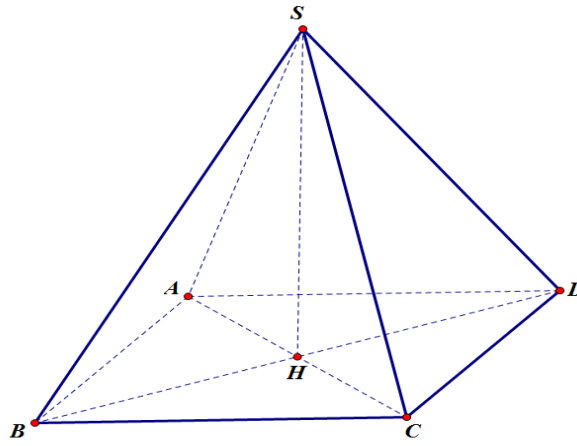
**B.**  $\frac{64R^3}{81}$

**C.**  $\frac{32R^3}{81}$

**D.**  $\frac{32R^3\sqrt{3}}{81}$

**Lời giải**

**Chọn B.**



Gọi  $H$  là tâm đáy, suy ra:  $SH \perp (ABCD)$

$$\text{Đặt } \widehat{HSC} = \alpha, \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{AC}{\sin 2\alpha} = 2R \\ \tan \alpha = \frac{OC}{SH} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AC = 2R \sin 2\alpha \\ SH = 2R \cos^2 \alpha \end{cases}$$

Vậy Thể tích khối chóp:

$$\begin{aligned} V_{S.ABCD} &= \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot \frac{1}{2} AC^2 = \frac{16R^3 \cos^4 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{3} \\ &= \frac{4R^3}{3} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{2} \cdot \sin^2 \alpha \leq \frac{64R^3}{3} \cdot \left( \frac{\frac{\cos^2 \alpha}{2} + \frac{\cos^2 \alpha}{2} + \sin^2 \alpha}{3} \right)^3 = \frac{64R^3}{81} \end{aligned}$$

Vậy  $\max V_{S.ABCD} = \frac{64R^3}{81}$ .

**Câu 40:** Xét ba số dương  $a, b, c$  thay đổi thỏa mãn  $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 13$ . Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức  $P = (a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$ .

**A.**  $\min P = 31$ .

**B.**  $\min P = 32$ .

**C.**  $\min P = 33$ .

**D.**  $\min P = 34$ .

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có:  $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 13 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 10$ .

Đặt:  $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a}$

Từ giả thuyết, ta được: 
$$\begin{cases} x, y, z > 0 \\ xyz = 1 \\ x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y, z > 0 \\ xyz = 1 \\ xy + yz + zx + x + y + z \geq 10 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } P &= (a^2 + b^2 + c^2) \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \\ &= (x + y + z - 1)^2 + (xy + yz + zx - 1)^2 + 1 \geq \frac{(x + y + z + xy + yz + zx - 2)^2}{2} + 1 \geq \frac{(10 - 2)^2}{2} + 1 = 33 \end{aligned}$$

Vậy  $\min P = 33$ .

$$\text{Đẳng thức xảy ra: } \begin{cases} x, y, z > 0 \\ xyz = 1 \\ xy + yz + zx + x + y + z = 10 \\ xy + yz + zx = x + y + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y, z > 0 \\ xyz = 1 \\ xy + yz + zx = 5 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$$

**Cách 2:** Bất đẳng thức đạt min khi hai trong ba biến bằng nhau

$$\text{Chọn } b = c. \text{ Từ giả thuyết, ta có: } (a + 2b) \left( \frac{1}{a} + \frac{2}{b} \right) \geq 13 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 4.$$

$$\text{Khi đó: } P = (a^2 + 2b^2) \left( \frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2} \right) = 2 \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 + 1 \geq 2 \cdot 4^2 + 1 \Rightarrow P \geq 33.$$

Vậy  $\min P = 33$ .

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi: } b = c = (2 + \sqrt{3})a.$$