TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN

Mã đề: 105

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA KÌ 1-LỚP 12
MÔN TOÁN
Thời gian làm bài: 90 phút;
(50 câu trắc nghiệm)

Câu 1. Tìm khoảng đồng biến của hàm số $y=\sqrt{x^2-2x}$.

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

.

Điều kiện: $x^2-2x\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ x\le 0\end{array}\right.$. Suy ra tập xác định: $D=(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$

Ta có

$$y'=\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}.$$

Để hàm số đồng biến thì $y'\ge 0$ $\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-2x>0\\ x-1\ge 0\end{array}\right.$ $\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x<0\\ x>2\end{array}\right.\\ x\ge 1\end{array}\right.\Leftrightarrow x>2$.

Câu 2. Tính tích hai điểm cực trị của hàm số $y=x^3-5x^2-9x+1$.

A. -3. **B.** -9. **C.** -18. **D.** -6

Lời giải

+ TXD**:** $D=\mathbb{R}$.

+ $y'=3x^2-10x-9$

$y'=0\Leftrightarrow 3x^2-10x-9=0$ có $a.c<0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt

Suy ra hàm số có 2 điểm cự trị là x_1,x_2 là 2 nghiệm của phương trình trên

Theo Vi-ét ta có: $x_1.x_2=\frac{-9}{3}=-3$.

Câu 3. Tìm phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{2x-1}{2-x}$.

A. $y=1$. **B.** $y=-2$. **C.** $y=\frac{1}{2}$. **D.** $y=2$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{2-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}-1}=-2$, vậy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=-2$.

Câu 4. Đồ thị của hàm số nào sau đây nhận đường thẳng $x=2$ làm đường tiệm cận đứng?

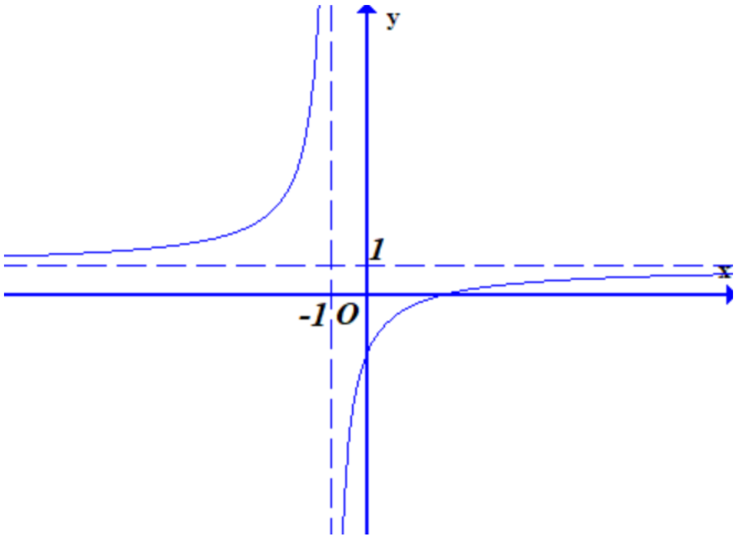
A. $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$. **B.** $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{x-2}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}$.

Lời giải

Ta thấy hàm số $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}=x+2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} y=4, \lim\limits_{x\to 2^-} y=4$ nên đồ thị không có tiệm cận đứng. Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{x-2}$ có tập xác định $D=(-\infty;1]$ nên $\lim\limits_{x\to 2^+} y, \lim\limits_{x\to 2^-} y$ không tồn tại, do đó đồ thị không có tiệm cận đứng. Hàm số $y=\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=x+1$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} y=3, \lim\limits_{x\to 2^-} y=3$ nên đồ thị không có tiệm cận đứng. Chỉ có hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}$, có $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}=+\infty$ nên đồ thị nhận đường thẳng $x=2$ làm tiện cận đứng.

Câu 5. Đồ thị ở hình bên là đồ thị của hàm số nào trong 4 hàm số dưới đây?

A. $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{2-x}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x-2}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x-2}{x-1}$.



Lời giải

.

Ta có: Phương trình tiệm cận đứng: $x=-1$ (loại **A, D).**

Phương trình tiệm cận ngang: $y=1$ (loại **B)**

Câu 6. Tính số điểm cực trị của hàm số $y=-x^4+2x^2+3$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

.

Ta có: $ab<0$ nên hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 7. Mệnh đề nào sau đây **sai** khi nói về hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$?

A. Hàm số nghịch biến trên tập xác định.

B. Hàm số không có điểm cực trị.

C. Đồ thị hàm số nhận điểm $I(1;1)$ làm tâm đối xứng.

D. Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Lời giải

.

Ta có: Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}<0,\forall x\in D$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 8. Tính tổng hoành độ các giao điểm của hai đồ thị $y=x^3+2x$ và $y=3x^2$.

A. 3. **B.** 2. **C.** -3. **D.** -2.

Lời giải

.

Phương trình hoành độ giao điểm :

$$x^3+2x=3x^2 \Leftrightarrow x^3-3x^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right. .$$

Vậy tổng hoành độ các giao điểm là 3.

Câu 9. Tính tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[1;3]$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{5}{4}$. **D.** $\dfrac{7}{4}$.

Lời giải

$y'=\dfrac{2}{(x+1)^2}>0,\forall x\in[1;3]$.

Ta có: $f(1)=0$, $f(3)=\dfrac{1}{2}$

Vậy $\max\limits_{[1;3]} y+\min\limits_{[1;3]} y=\dfrac{1}{2}$.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	|	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm tập hợp giá trị tham số m để phương trình $|f(x)|=m$ có đúng 4 nghiệm.

A. $(-1;2)$. **B.** $[0;1)$. **C.** $(1;2)\cup\{0\}$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Ta có: Số nghiệm của phương trình $|f(x)| = m$ là số giao điểm của $(C'): y = |f(x)|$ và $d: y = m$.

Phương trình $|f(x)| = m$ có đúng 4 nghiệm $\Leftrightarrow$ (C') và d cắt nhau tại 4 điểm phân biệt

Từ bảng biến thiên của $f(x)$, ta có chiều biến thiên của $|f(\mathrm{x})|$ như sau (kẻ thêm đường thẳng $y = 0$, rồi lật từ dưới lên):

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'			0		$\vert$		0		
$\vert f(x)\vert$	$-\infty$	0	1	0	2	0	1	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên ta có, (C') và d cắt nhau tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ 1 < m < 2 \end{array}\right.$.

Câu 11. Hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(1;+\infty)$ **D.** $(-1;1)$.

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 - 4x, y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		-2		-1		-2		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số nghịch biến trên $(0;1)$.

Câu 12. Trong các hàm số sau hàm số nào đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$?

A. $y = x^2 - 3x + 1$. **B.** $y = x^4 - 2x^2 - 1$. **C.** $y = \dfrac{x-3}{x-1}$. **D.** $y = x^3 + x + 1$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 13. Tìm điểm M thuộc đồ thị $y = x^4 - 2x^2 - 1$ mà tiếp tuyến của đồ thị có hệ số góc là 24.

A. $M(2;7)$.   **B.** $M(-2;7)$.   **C.** $M(\sqrt{2};-1)$.   **D.** $M(-\sqrt{2};-1)$.

Lời giải

.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$

Do M thuộc đồ thị nên $M\left(x_0; x_0^4 - 2x_0^2 - 1\right)$

Theo giả thuyết, tiếp tuyến tại điểm M có hệ số góc là 24

nên $y'(x_0) = 24 \Leftrightarrow 4x_0^3 - 4x_0 = 24 \Leftrightarrow 4x_0^3 - 4x_0 - 24 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2$

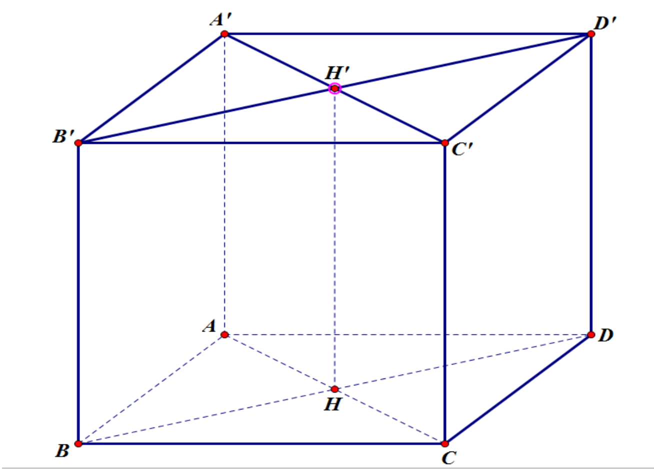
Vậy $M(2;7)$.

Câu 14. Tính thể tích khối lăng trụ tứ giác đều có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên bằng a.

A. a^3.   **B.** $2a^3$.   **C.** $4a^3$.   **D.** $8a^3$.

Lời giải

.



Theo đề bài: AA' là đường cao của khối chóp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng a và đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$ nên $S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$

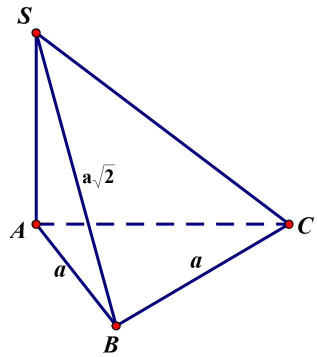
Vậy thể tích khối lăng trụ tứ giác đều: $V = a.4a^2 = 4a^3$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hai mặt phẳng $(SAB),(SAC)$ cùng vuông góc với đáy và $SB = a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.   **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.   **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.   **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

.



Ta có: $\left.\begin{matrix}(SAB),(SAC)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(SAC)=SA\end{matrix}\right\}\Rightarrow SA\perp(ABCD)$.

Diện tích tam giác ABC đều cạnh a là $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Xét tam giác SAB vuông tại A: $SA=\sqrt{SB^2-AB^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2-a^2}=a$.

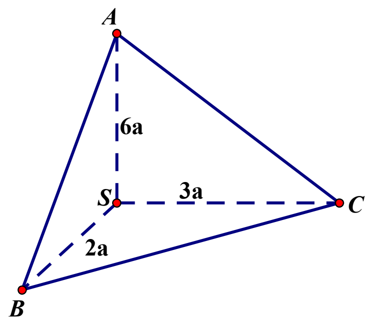
Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)a=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 16. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA=6a$; $SB=2a$; $SC=3a$.

A. $2a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** $6a^3$. **D.** a^3.

Lời giải

.



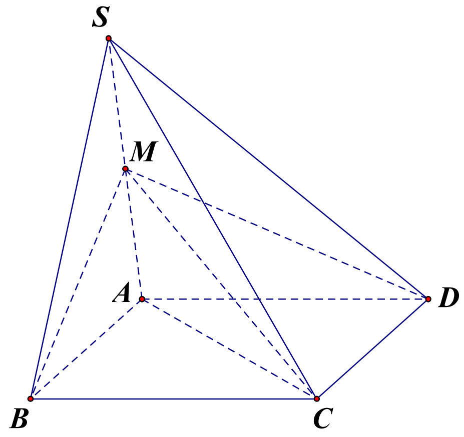
Theo đề bài: $\left.\begin{matrix}SA\perp SB\\SA\perp SC\end{matrix}\right\}\Rightarrow SA\perp(SBC)\Rightarrow SA$ là đường cao của khối chóp $S.ABC$ và đáy SBC là tam giác vuông.

Ta có: $V=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}.3a.2a\right)6a=6a^3$.

Câu 17. Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SA. Với mỗi tứ diện $XYZT$, ta kí hiệu V_{XYZT} là thể tích khối tứ diện đó. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $V_{MABC}=V_{MBCD}$. **B.** $V_{SABC}=V_{MCDA}$. **C.** $V_{SACD}=2V_{MBCD}$. **D.** $V_{MABD}=V_{MBCD}$.

Lời giải

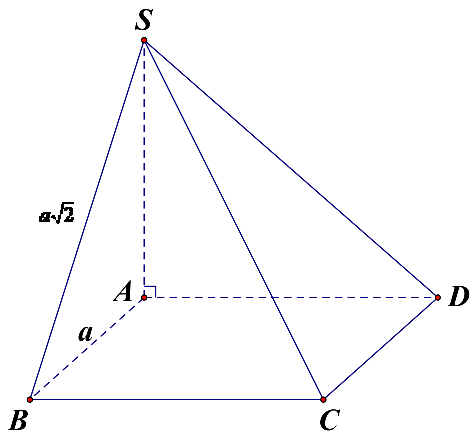


$V_{SABC} = V_{MCDA}$ là mệnh đề sai vì mệnh đề đúng là $V_{SABC} = 2V_{MCDA}$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh SA vuông góc với đáy, $SB = a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** $\frac{2a^3}{3}$. **C.** a^3. **D.** $2a^3$.

Lời giải



Diện tích đáy $S_{ABCD} = a^2$

Xét tam giác SAB vuông tại A:

$SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 - a^2} = a$

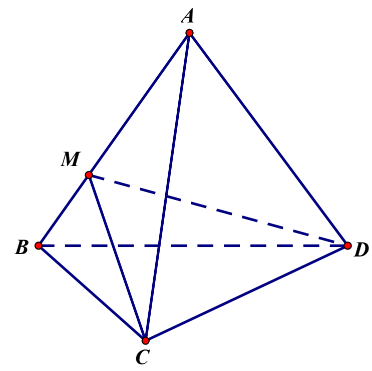
Thể tích khối chóp $S.ABCD$:

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.a.a^2 = \frac{a^3}{3}$.

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thuộc cạnh AB. Biết mặt phẳng (CDM) chia khối tứ diện thành hai khối có cùng thể tích. Tính tỉ số $\frac{AM}{AB}$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải



Mặt phẳng (CDM) chia khối chóp thành hai khối $AMCD$; $MBCD$.

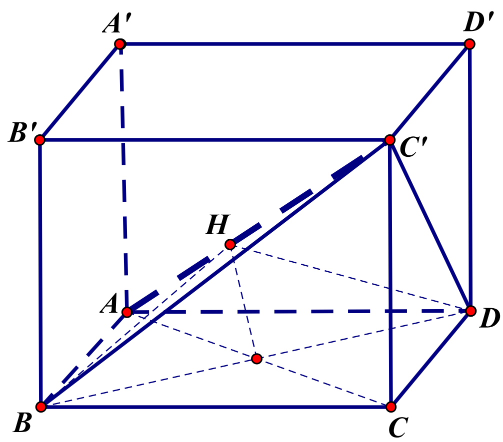
Và theo giả thuyết $V_{ABCD} = 2V_{AMCD} \Rightarrow V_{AMCD} = \frac{1}{2}V_{ABCD}$

$\Rightarrow \frac{V_{AMCD}}{V_{ABCD}} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$.

Câu 20. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC') và (ADC') là:

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $75°$.

Lời giải



$\begin{cases} BD \perp C'C \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (ACC') \Rightarrow BD \perp AC'$

$(ACC'): OH \perp AC' \Rightarrow AC' \perp (BHD)$

$\Rightarrow \begin{cases} BH \perp AC'; BH \subset (ABC') \\ DH \perp AC'; DH \subset (ADC') \end{cases}$

$\Rightarrow ((ABC');(ADC')) = \widehat{(BH;DH)}$

Xét $\Delta AHO \sim \Delta ACC'$:

$\frac{AO}{AC'} = \frac{HO}{CC'} \Rightarrow HO = \frac{AO.CC'}{AC'}$

$\tan \widehat{BHO} = \frac{BO}{HO} = \frac{BO.AC'}{AO.CC'} = \frac{\sqrt{CC'^2 + AC^2}}{CC'} = \frac{\sqrt{CC'^2 + 2CC'^2}}{CC'} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow ((ABC');(ADC')) = 60°$.

Câu 21. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{(m+1)x+2}{x+m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

A. $-2 < m < 1$. **B.** $-2 \le m \le 1$. **C.** $m < -2$. **D.** $m > 1$.

Lời giải

Ta có $y' = \frac{m^2 + m - 2}{(x+m)^2}$

Yêu cầu bài toán tương đương với $y' < 0, \forall x \ne -m \Leftrightarrow m^2 + m - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 1$.

Câu 22. Tìm tập hợp giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + m - 7)x + m$ đạt cực đại tại $x = 1$.

A. ϕ. **B.** $\{-2\}$. **C.** $\{3\}$. **D.** $\{-2;3\}$.

Lời giải

Ta có

$y' = 3x^2 - 2(m+1)x + m^2 + m - 7$

$y'' = 6x - 2(m+1)$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 6 = 0 \\ 4 - m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \{-2;3\} \\ m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$

Câu 23. Gọi S là tập hợp giá trị tham số m để đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 - m - 2$ có điểm cực đại thuộc trục hoành. Tính tổng tất cả phần tử S.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -1.

Lời giải

$y' = -4x^3 + 4mx = 4x(-x^2 + m)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array} \right.$

Ta có $a = -1 < 0$

Để đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 - m - 2$ có điểm cực đại thuộc trục hoành thì

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} ab < 0 \\ y(\pm\sqrt{m}) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} ab \geq 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m = -1\ (l) \\ m = 2\ (n) \end{array} \right. \end{cases} \\ \begin{cases} m \leq 0 \\ m = -2\,(n) \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow S = \{2;-2\}$$

Vậy tổng tất cả phần tử S là 0.

Câu 24. Tìm tập hợp giá trị tham số m để đồ thị của hàm số $y = f(x) = \dfrac{x + m - 4}{x - m^2}$ nhận đường thẳng $x = 4$ làm tiệm cận đứng.

A. $\{-2;2\}$. **B.** $\{-2\}$. **C.** $\{2\}$. **D.** $\varnothing$.

Lời giải

Để đồ thị của hàm số $y = f(x) = \dfrac{x + m - 4}{x - m^2}$ nhận đường thẳng $x = 4$ làm tiệm cận đứng thì $4 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$

. Với $m = 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{x+2}{x-4} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{x+2}{x-4} = -\infty \end{array} \right. \Rightarrow x = 4$ là tiệm cận đứng

. Với $m = -2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{x-6}{x-4} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{x-6}{x-4} = +\infty \end{array} \right. \Rightarrow x = 4$ là tiệm cận đứng

Vậy $m = \pm 2$ thoả đề bài.

Câu 25. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=2\sqrt{x^2+1}+x+1$ trên đoạn $[-2;1]$.

A. $2\sqrt{5}-1$. **B.** $2\sqrt{2}+2$. **C.** $\sqrt{3}+1$. **D.** $\sqrt{6}-1$.

Lời giải

$f'(x)=2\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+1=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}+1$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}+1=0\Leftrightarrow 2x=-\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow \begin{cases}x<0\\3x^2=1\end{cases}\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=2\sqrt{\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}+\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)+1=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+1$; $f(-2)=2\sqrt{(-2)^2+1}+(-2)+1=2\sqrt{5}-1$;

$f(1)=2\sqrt{(1)^2+1}+(1)+1=2\sqrt{2}+2$. Vậy $f_{\min}=f(-2)=2\sqrt{5}-1$.

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-m+2\right)x+m$ có hai điểm cực trị.

A. $m>2$. **B.** $m\ge 2$. **C.** $m<2$. **D.** $m\le 2$.

Lời giải

Hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-m+2\right)x+m$ có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_{y'}>0$.

Ta có $y'=x^2-2mx+\left(m^2-m+2\right)\Rightarrow \Delta'_{y'}>0\Leftrightarrow m^2-\left(m^2-m+2\right)>0\Leftrightarrow m-2>0\Leftrightarrow m>2$

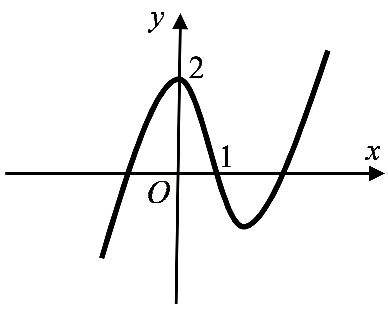
Câu 27. Tìm tập hợp giá trị của tham số m để phương trình $x^4-2x^2-m-1=0$ có đúng 4 nghiệm ?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(-2;-1]$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(-2;1)$.

Lời giải

Đặt $t=x^2\ge 0$. Khi đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $t^2-2t-m-1=0$ có 2 nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow \begin{cases}a\ne 0\\\Delta'>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}1+m+1>0\\-m-1>0\end{cases}\Leftrightarrow -2<m<-1$.

Câu 28. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình bên. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai** ?



A. $d = 2.$ **B.** $a > 0.$ **C.** $b > 0.$ **D.** $c = 0.$

Lời giải

Đồ thị hàm số có chữ $N \Rightarrow a > 0$: B đúng.

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Vì hàm số đạt cực đại tại $x = 0 \Rightarrow y'(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$: D đúng.

Ta lại có $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} > 0$ và có $a > 0$ nên $b < 0$: C sai.

Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có tung độ $y = 2 > 0$ nên $y(0) = d = 2 > 0$.: A đúng.

Câu 29. Tính tổng giá trị cực trị của hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

A. 6. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

.

Ta có: $y' = \dfrac{(2x-1)(x-1) - (x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = 3 \end{array}\right.$.

Câu 30. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2 - 4}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

.

Ta có $\lim\limits_{x \to \infty} y = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2 - 4}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2}} = \begin{cases} 1 & khi\ x \to +\infty \\ -1 & khi\ x \to -\infty \end{cases} \Rightarrow y = \pm 1$ là hai tiệm cận ngang của đồ thị.

Ta có $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \Rightarrow x = \pm 2$ là hai tiệm cận đứng của đồ thị.

Vậy đồ thị có 4 tiệm cận.

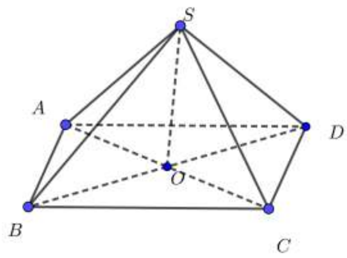
Câu 31. Tính thể tích khối bát diện đều có độ dài cạnh là a.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

.

Thể tích khối bát diện đều có độ dài cạnh là a gấp hai lần khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a.



$S_{ABCD} = a^2$

$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$V_{SABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a^2 = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$

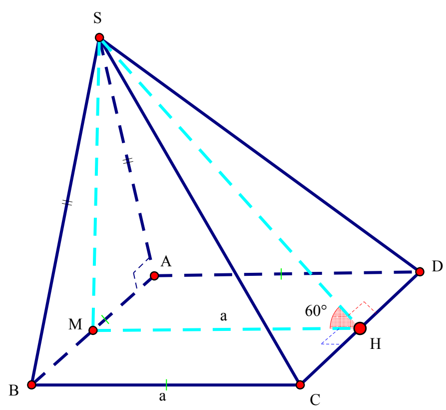
Suy ra thể tích bát diện đều là: $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết mặt phẳng (SCD) tạo với đáy góc 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$?

A. $a^3\sqrt{3}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$ **D.** $\frac{a^3}{3}$

Lời giải

.



Ta có

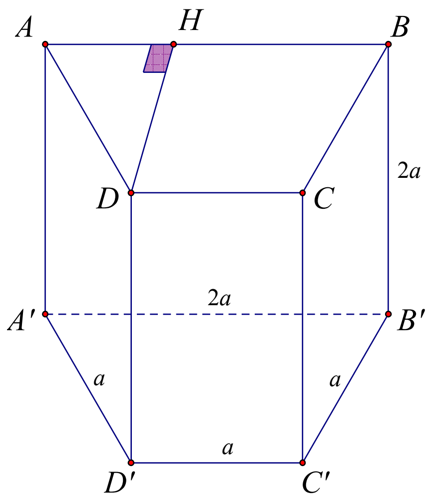
$SM = a.\tan 60^0 = a\sqrt{3}.$

$S_{ABCD} = a^2 \Rightarrow V = \frac{1}{3}a\sqrt{3}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$

Câu 33. Hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thang cân $AB = 2a$, $AD = BC = CD = a$. Cạnh bên có độ dài $2a$. Tính thể tích khối lăng trụ đó.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải



.

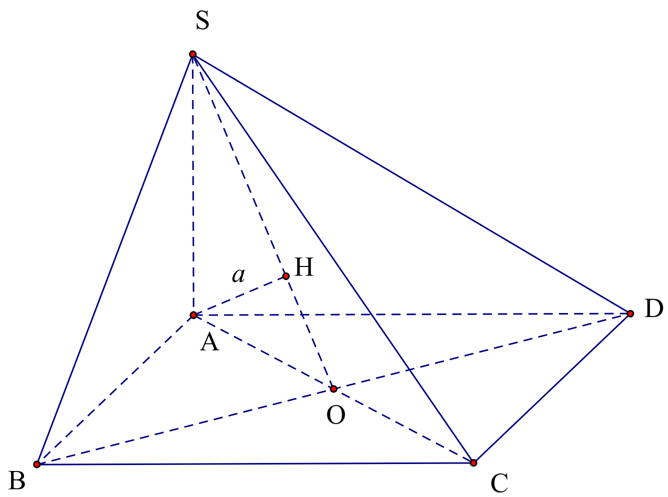
Gọi H là hình chiếu của D lên $AB \longrightarrow AH = \frac{a}{2} \longrightarrow DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$S_{ABCD} = \frac{(AB+DC).DH}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$. Thể tích khối chóp $V = AA'.S_{ABCD} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{2}$.

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $(SA < AB)$. Hai mặt phẳng (SAB), (SAD) cùng vuông góc với đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) là $d = a$. Tính độ dài đoạn SC.

A. $SC = 2a$. **B.** $SC = a\sqrt{5}$. **C.** $SC = a\sqrt{6}$. **D.** $SC = a\sqrt{10}$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$. Kẻ $AH \perp SO$ mà $AH \perp BD \longrightarrow d\left[A;(SBD)\right] = AH = a$.

Đặt $SA = x$, $AB = y$. Điều kiện: $x < y$. Theo đề bài ta có hệ phương trình : $\begin{cases} \frac{1}{3}x.y^2 = \frac{4a^3\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{x^2} + \frac{2}{y^2} = \frac{1}{a^2} \end{cases}$

$$\longrightarrow x^3 - 2a\sqrt{2}x^2 + 2a^3\sqrt{2} = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a\sqrt{2} \longrightarrow y = 2a \\ x = \dfrac{\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)a}{2} \longrightarrow y = \sqrt{-2+2\sqrt{5}} \end{array} \right.$$

Đối chiếu điều kiện: $x = a\sqrt{2}, y = 2a \longrightarrow SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{10}$.

Câu 35. Một khối chóp có đáy là tam giác với độ dài ba cạnh là $5a$, $6a$, $7a$. Các cạnh bên có độ dài bằng $9a$ và cùng tạo với đáy một góc 45^0. Tính thể tích của khối chóp đang xét.

A. $36\sqrt{3}a^3$. **B.** $18\sqrt{3}a^3$. **C.** $54\sqrt{3}a^3$. **D.** $72\sqrt{3}a^3$.

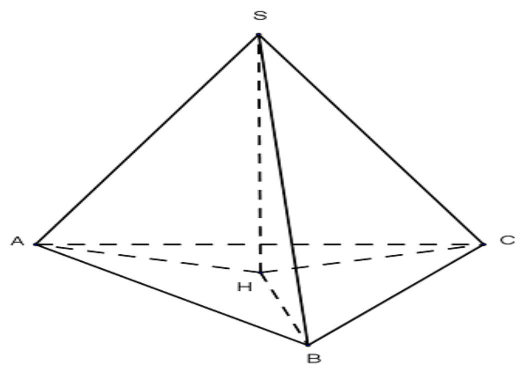
Lời giải

.

Gọi đáy của khối chóp là tam giác ABC với ba cạnh có độ dài là $AB = 5a$, $AC = 6a$, $BC = 7a$.

Gọi H là hình chiếu của đỉnh S xuống mặt phẳng đáy (ABC).

Theo giả thiết, ta có $\widehat{SAH} = \widehat{SBH} = \widehat{SCH} = 45^0$.



Xét tam giác vuông SHB, ta có $SH = SA.\sin\widehat{SAH} = 9a.\sin 45^0 = \dfrac{9a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC. Khi đó, ta có $p = \dfrac{5a+6a+7a}{2} = 9a$.

Diện tích tam giác ABC được tính bởi

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \sqrt{9a.4a.3a.2a} = 6\sqrt{6}a^2$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{9a\sqrt{2}}{2}.6\sqrt{6}a^2 = 18\sqrt{3}a^3$.

Câu 36. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx - 3\sin x + \sqrt{7}\cos x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-4 \le m \le 4$. **B.** $m \le 4$. **C.** $m \ge 4$. **D.** $m \le -4$.

Lời giải

.

Ta có $y' = m - 3\cos x - \sqrt{7}\sin x$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \le 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \le 3\cos x + \sqrt{7}\sin x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \le \min\limits_{\mathbb{R}}\left(3\cos x + \sqrt{7}\sin x\right)$.

Ta có $\left|3\cos x+\sqrt{7}\sin x\right|\le\sqrt{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(3^2+7\right)}\le 4\Leftrightarrow -4\le 3\cos x+\sqrt{7}\sin x\le 4$.

Vậy $m\le -4$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 37. Xét hai số x,y thỏa mãn $x^2+y^2+4x+\sqrt{1+(x+2)^4}=\sqrt{y^4-8y^2+17}$. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $P=x^2+y^2$. Tính $M(1+m)$

A. $M(1+m)=8$. **B.** $M(1+m)=12$. **C.** $M(1+m)=16$. **D.** $M(1+m)=4$.

Lời giải.

$x^2+y^2+4x+\sqrt{1+(x+2)^4}=\sqrt{y^4-8y^2+17}$

$\Leftrightarrow (x+2)^2+\left(y^2-4\right)+\sqrt{1+(x+2)^4}=\sqrt{1+\left(4-y^2\right)^2}$

$\Leftrightarrow (x+2)^2+\sqrt{1+(x+2)^4}=4-y^2+\sqrt{1+\left(4-y^2\right)^2}$ $(*)$

Đặt $\begin{cases} u=(x+2)^2 \\ v=4-y^2 \end{cases}$ $(u\ge 0)$. Khi đó $(*)$ trở thành:

$u+\sqrt{1+u^2}=v+\sqrt{1+v^2}$ $(**)$.

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{1+t^2}$. Ta có:

$f'(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}=\dfrac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}}>\dfrac{|t|+t}{\sqrt{1+t^2}}\ge 0$ (Vì $\sqrt{1+t^2}>\sqrt{t^2}=|t|$)

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến.

Do đó, từ $(**)$ ta có: $u=v\Rightarrow (x+2)^2=4-y^2\Leftrightarrow y^2=4-(x+2)^2=-x^2-4x$

Vì $y^2\ge 0$, nên : $-x^2-4x\ge 0\Leftrightarrow -4\le x\le 0$.

Khi đó : $P=x^2+y^2=x^2+\left(-x^2-4x\right)=-4x\Rightarrow 0\le P\le 16$

Do đó $M=16; m=0$.

Vậy $M(1+m)=$ $M(1+m)=16$.

Câu 38. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ cắt hai trục tọa độ lần lượt tại A và B. Tính độ dài đoạn AB.

A. $AB=2\sqrt{2}$. **B.** $AB=\sqrt{2}$. **C.** $AB=2\sqrt{5}$. **D.** $AB=\sqrt{5}$.

Lời giải

Giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ với hai trục tọa độ là: $A(0;-2), B(2;0)$.

Độ dài đoạn $AB=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

Câu 39. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+2$ cắt hai trục tọa độ tạo thành tam giác có diện tích S. Tính S.

A. $S=1$. **B.** $S=2$. **C.** $S=\dfrac{1}{3}$. **D.** $S=\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Tính $y'=3x^2-6x$.

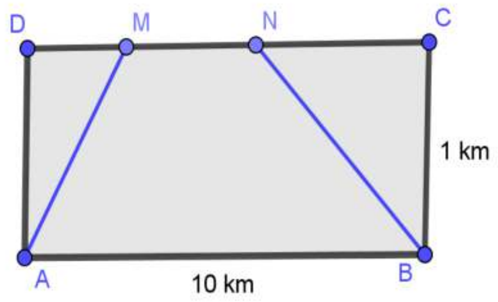
Lấy y chia cho y' ta được: $y=y'(x).\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}\right)+2-2x$.

Phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị: $y=-2x+2\ \ (d)$.

Giả sử $d\cap Ox=A(1;0)$, $d\cap Oy=B(0;2)$.

Vậy $S=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}.2.1=1$ (đvtt).

Câu 40. Bạn X định đi xe máy từ A đến B dài $10\,\text{km}$ (hình vẽ). Cách đoạn đường AB một khoảng 1 km có đoạn thẳng DC song song với AB mà xe máy có thể đi với vận tốc $41\,\text{km/h}$. Do phần đường bên trong hình chữ nhật $ABCD$ (kể cả đoạn đường AB) đang sửa chữa nên bạn X chỉ có thể đi xe với vận tốc 9 km/h. Để tiết kiệm thời gian, bạn X chọn cách đi từ A đến M, đi tiếp theo đoạn đường MN và từ N đi đến B (hai điểm M,N trên DC). Tính thời gian ngắn nhất mà X có thể đi từ A đến B.



A. $\frac{170}{369}$ giờ. **B.** $\frac{179}{369}$ giờ. **C.** $\frac{172}{369}$ giờ. **D.** $\frac{167}{369}$ giờ.

Lời giải

Đặt $DM=x(\text{km/h}),NC=y(\text{km/h}),(0<x,y<10)$

Suy ra $AM=\sqrt{x^2+1},\ NB=\sqrt{y^2+1},\ MN=10-x-y$.

Thời gian X đi từ A đến B. là: $t=\frac{AM}{9}+\frac{MN}{41}+\frac{NB}{9}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{9}+\frac{10-x-y}{41}+\frac{\sqrt{y^2+1}}{9}$

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}}{9}+\frac{10-x}{41}+\frac{\sqrt{y^2+1}}{9}-\frac{y}{41}=f(x)+f(y).$$

Xét hàm số $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{9}+\frac{10-x}{41}$ trên $(0;10)$.

Ta có: $f'(x)=\frac{x}{9\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{41}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{9}{40}$. Lập BBT ta có $f(x)\ge f\left(\frac{9}{40}\right)$.

Tương tự xét hàm số $f(y)=\frac{\sqrt{y^2+1}}{9}-\frac{y}{41}$ suy ra $f(y)\ge f\left(\frac{9}{40}\right)$.

Vậy $t\ge f(x)+f(y)=\frac{170}{369}$. Thời gian ngắn nhất mà X đi là $\frac{170}{369}$ giờ.

Cách 2.

Đặt $P=\frac{\sqrt{x^2+1}}{9}+\frac{10-x}{41}+\frac{\sqrt{y^2+1}}{9}-\frac{y}{41}$

Áp dụng BĐT B.C.S ta có:

$$\left(1+\left(\frac{9}{40}\right)^2\right)\left(1+x^2\right)\ge\left(1+\frac{9}{40}x\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{\left(1+\left(\frac{9}{40}\right)^2\right)\left(1+x^2\right)}\ge\left(1+\frac{9}{40}x\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{41^2}{40^2}\left(1+x^2\right)}\ge\left(1+\frac{9}{40}x\right)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{1+x^2}}{9}\ge\frac{1+\frac{9}{40}x}{9}.\frac{40}{41}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{1+x^2}}{9}\ge\frac{40}{369}+\frac{x}{41}.$$

Tương tự ta có: $\dfrac{\sqrt{1+y^2}}{9}\ge\dfrac{40}{369}+\dfrac{y}{41}$.

Từ đó suy ra $P\ge\dfrac{40}{369}+\dfrac{40}{369}+\dfrac{10}{41}\Leftrightarrow P\ge\dfrac{170}{369}$.

Câu 41. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-1}$ và đường thẳng $y=x+5$ cắt nhau tại hai điểm A, B. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $3\sqrt{11}$. **C.** $2\sqrt{22}$. **D.** $\sqrt{66}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là

$$\frac{3x+1}{x-1}=x+5\Rightarrow x^2+4x-5=3x+1\Leftrightarrow x^2+x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=2 & (y=7)\\ x=-3 & (y=2)\end{array}\right.$$

Vậy $A(2;\,7)$, $B(-3;\,2)\Rightarrow AB=\sqrt{(-3-2)^2+(2-7)^2}=5\sqrt{2}$.

Câu 42. Trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ có bao nhiêu điểm có khoảng cách đến trục hoành bằng 1?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Gọi $M\left(x_0;\,\dfrac{2x_0+1}{x_0-1}\right)$ $(x_0\ne1)$ là một điểm trên đồ thị hàm số.

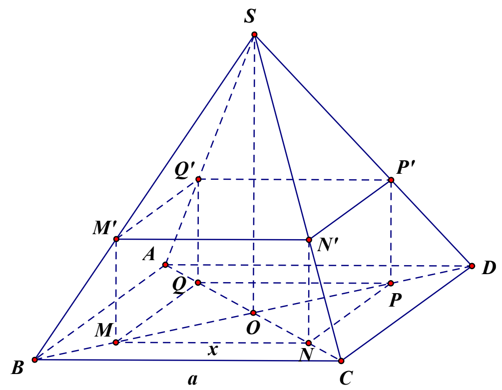
$$d(M,Ox)=\left|\frac{2x_0+1}{x_0-1}\right|=1\Leftrightarrow|2x_0+1|=|x_0-1|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x_0+1=x_0-1\\2x_0+1=1-x_0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-2\\x_0=0\end{array}\right..$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn.

Câu 43. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a. Một hình lập phương có một mặt thuộc đáy hình chóp và bốn đỉnh còn lại thuộc bốn cạnh bên của hình chóp. Gọi x là độ dài cạnh hình lập phương. Tìm x.

A. $x=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $x=\left(\sqrt{2}-1\right)a$. **C.** $x=\dfrac{a\left(\sqrt{2}+1\right)}{4}$. **D.** $x=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải



Ta có $SM' = M'M = x \Rightarrow BM' = a - x \Rightarrow BM = \sqrt{BM'^2 - MM'^2} = \sqrt{(a-x)^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - 2ax}$.

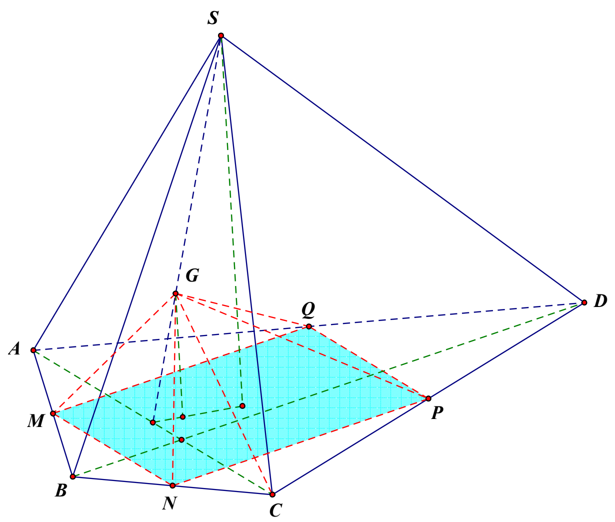
Mà $BD = MP + 2BM \Rightarrow a\sqrt{2} = x\sqrt{2} + 2\sqrt{a^2 - 2ax}$

$\Rightarrow 2(a-x)^2 = 4(a^2 - 2ax) \Rightarrow x^2 + 2ax - a^2 = 0 \Rightarrow x = a\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

Câu 44. Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích V. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA và G là trọng tâm tam giác SAC. Gọi V_1 là thể tích của khối chóp $G.MNPQ$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V}$.

A. $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{3}$. **B.** $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{2}$. **C.** $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{4}$. **D.** $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{6}$.

Lời giải



Ta có $S_1 = S_{\Delta AMQ} + S_{\Delta CNP} = \frac{1}{4}\left(S_{\Delta ABD} + S_{\Delta CBD}\right) = \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

Tương tự $S_2 = S_{\Delta BMN} + S_{\Delta DPQ} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

Suy ra $S_{MNPQ} = S_{ABCD} - \left(S_1 + S_2\right) = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Gọi h là độ dài đường cao của hình chóp $S.ABCD$ và h_1 là độ dài đường cao của hình chóp $G.MNPQ$, suy ra $h_1 = \frac{1}{3}h$.

Do đó $V_1 = \frac{1}{3}h_1.S_{MNPQ} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}h.\frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{6}V \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{1}{6}$.

Câu 45. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có diện tích các hình chữ nhật $ABCD, ABB'A', ADD'A'$ lần lượt là $2a^2; 4a^2; 8a^2$. Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

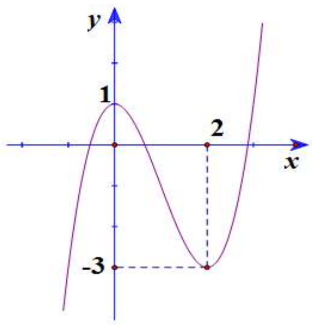
A. $2a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** $8a^3$. **D.** $16a^3$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} AB.AD = 2a^2 \\ AB.AA' = 4a^2 \\ AD.AA' = 8a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = a \\ AD = 2a \\ AA' = 4a \end{cases}$

Suy ra $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB.AD.AA' = a.2a.4a = 8a^3$

Câu 46. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tính số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 2$.

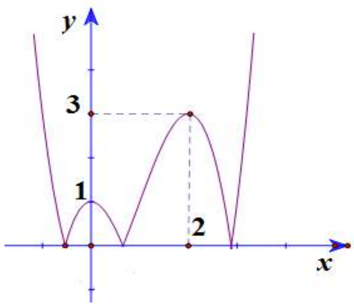


A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 2$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = 2$.

Ta có đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ là:



Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = 2$ cắt nhau tại 4 điểm. Do đó phương trình $|f(x)| = 2$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 47. Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + m$ có ba điểm cực trị cách đều trục hoành.

A. $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **B.** $\{1\}$. **C.** $\{0\}$. **D.** $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$y'=4x^3-4x$.

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$.

$y'=0$ có ba nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x đi qua các nghiệm nên hàm số luôn có ba điểm cực trị.

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0;m)$; $B(-1;m-1);C(1;m-1)$.

Để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị cách đều trục hoành

$|y_A|=|y_B|=|y_C| \Leftrightarrow |m|=|m-1| \Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$.

Câu 48. Xét các số thực $x\,y,z$ thỏa mãn $\begin{cases} x+y+z=4 \\ x^2+y^2+z^2=8 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=x^3+y^3+z^3$.

A. $\frac{176}{9}$. **B.** 16. **C.** 17. **D.** $\frac{167}{9}$.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $\begin{cases} y+z=4-x \\ y^2+z^2=8-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=4-x \\ (y+z)^2-2yz=8-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=4-x \\ yz=x^2-4x+4 \end{cases}$.

Lại có $(y+z)^2 \geq 4yz \Rightarrow (4-x)^2 \geq 4(x^2-4x+4) \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{8}{3}$.

$P=x^3+(y+z)^3-3yz(y+z)$ $=x^3+(4-x)^3-3(x^2-4x+4)(4-x)$ $=3x^3-12x^2+12x+16$.

Xét hàm số $P==3x^3-12x^2+12x+16,\ \ 0 \leq x \leq \frac{8}{3}$.

$P'=9x^2-24x+12$. $P'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{2}{3} \end{array}\right.$.

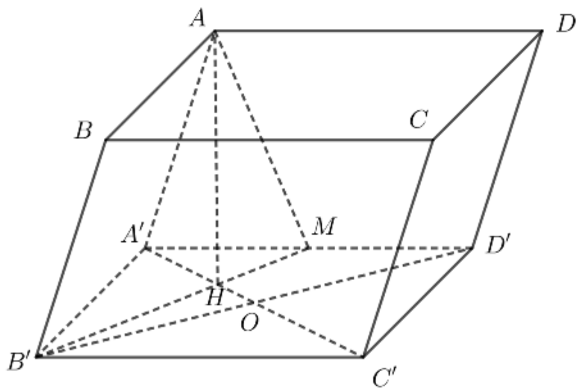
$P(0)=16, P\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{176}{9}, P(2)=16, P\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{176}{9}$.

Vậy $\max P=\frac{176}{9}$ khi $\begin{cases} x=\frac{8}{3} \\ y=\frac{2}{3} \\ z=\frac{2}{3} \end{cases}$ hoặc các hoán vị của bộ nghiệm đó.

Câu 49. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a và $\widehat{BAD}=60^o$, $\widehat{A'AB}=\widehat{A'AD}=120^o$. Tính thể tích khối hộp đã cho.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải



Ta có: $\widehat{BAD}=60^o \Rightarrow \widehat{B'A'D'}=60^o \Rightarrow \Delta B'A'D'$ đều $\Rightarrow A'O \perp B'D'$

Mà $\widehat{A'AB}=\widehat{A'AD}=120^o \Rightarrow AD'=AB' \Rightarrow \Delta AB'D'$ cân tại $A \Rightarrow AO \perp B'D'$

Nên $B'D' \perp (AA'O) \Rightarrow AH \perp B'D'$.

Ta lại có: $\Rightarrow \widehat{B'A'D'}=60^o \Rightarrow \Delta B'A'D'$ đều nên $B'M \perp A'D'$

Mà $\widehat{A'AD}=120^o \Rightarrow \widehat{AA'D'}=60^o \Rightarrow \Delta AA'D'$ đều $\Rightarrow AM \perp A'D'$

Nên $A'D' \perp (AMB') \Rightarrow AH \perp A'D'$

Do đó $AH \perp (A'B'C'D')$ nên AH là chiều cao của khối hộp.

Ta lại có $\widehat{BAD}=60^o \Rightarrow \widehat{B'A'D'}=60^o \Rightarrow \Delta B'A'D'$ đều nên $S_{A'B'C'D'}=2S_{A'B'D'}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

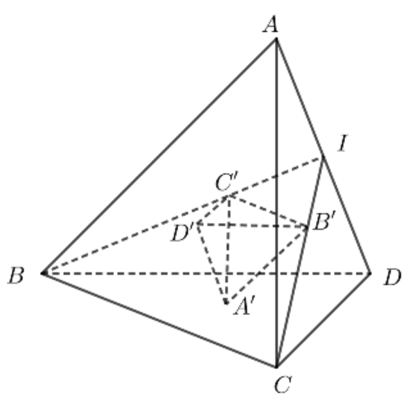
Và $A'H=\dfrac{2}{3}A'O=\dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AH=\sqrt{AA'^2-A'H^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}=S_{A'B'C'D'}.AH=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 50. Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm bốn mặt là A', B', C', D'. Gọi V, V' lần lượt là thể tích tứ diện $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Tính thể tích $\dfrac{V'}{V}$.

A. $\dfrac{1}{9}$. **B.** $\dfrac{2}{27}$. **C.** $\dfrac{4}{27}$. **D.** $\dfrac{1}{27}$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của AD; B', C' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và ACD.

Trong tam giác IBC có $B'C' = \frac{1}{3}BD$.

Tương tự các cạnh còn lại của tứ diện mới sinh ra bằng $\frac{1}{3}$ cạnh của tứ diện ban đầu.

Do đó: $\frac{V'}{V} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.