

LŨY THỪA-MŨ-LOGARIT

§1. LŨY THỪA-MŨ-LOGARIT

1.1 Khái Niệm Lũy Thừa

Định nghĩa

Lũy thừa với số mũ nguyên dương

Với a là số thực tùy ý, lũy thừa bậc n của a là tích của n thừa số a .

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ thừa số}}. \quad (n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{R}).$$

Lũy thừa với số mũ không

Với $a \neq 0$, thì $a^0 = 1$

Lũy thừa với số mũ nguyên âm

Với $a \neq 0$ thì $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Ta gọi a là cơ số, n là mũ số. **Chú ý:** 0^0 và 0^{-n} không có nghĩa.

Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Cho số thực $a > 0$ và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$, trong đó $m, n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$. Khi đó

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Lũy thừa với số mũ vô tỉ

Giả sử a là một số dương và α là một số vô tỉ và (r_n) là một dãy số hữu tỉ sao cho $\lim r_n = \alpha$. Khi đó $\lim a^{r_n} = a^\alpha$.

Một số tính chất của lũy thừa

Tính chất về đẳng thức:

Cho $a \neq 0; b \neq 0; m, n \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} \text{a) } a^m \cdot a^n &= a^{m+n}; & \text{b) } \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n}; & \text{c) } (a^m)^n &= a^{m \times n}; \\ \text{d) } (a \cdot b)^m &= a^m \cdot b^m; & \text{e) } \left(\frac{a}{b}\right)^m &= \frac{a^m}{b^m}. \end{aligned}$$

Tính chất về bất đẳng thức:

So sánh cùng cơ số:


Cho $m, n \in \mathbb{R}$. Khi đó

- ▶ Với $a > 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$;
- ▶ Với $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$.

So sánh cùng số mũ:

- ▶ Với số mũ dương $n > 0$: $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$.
- ▶ Với số mũ âm $n < 0$: $a > b > 0 \Rightarrow a^n < b^n$.

Một số tính chất của căn bậc n


 Cho số thực b và số nguyên dương $n \leq 2$. Số a được gọi là căn bậc n của số b nếu $a^n = b$.

Với n lẻ:

$b \in \mathbb{R}$ thì có duy nhất một căn bậc n của b , tức là mọi số thực đều có duy nhất một căn bậc lẻ, kí hiệu là $\sqrt[n]{b}$

Với n chẵn:

- ▶ $b < 0$: không tồn tại căn bậc n của b .
- ▶ $b = 0$: có một căn bậc n của b là số 0.
- ▶ $b > 0$: có hai giá trị căn bậc n của b trái dấu, kí hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{b}$, và giá trị âm là $-\sqrt[n]{b}$.

 Với $a, b \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$\begin{aligned} \checkmark \quad \sqrt[n]{a^{2n}} &= |a|, \forall a; & \checkmark \quad \sqrt[n+1]{a^{2n+1}} &= a, \forall a. \\ \checkmark \quad \sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|}, \forall ab \geq 0; & \checkmark \quad \sqrt[n+1]{ab} &= \sqrt[n+1]{a} \cdot \sqrt[n+1]{b}, \forall a, b. \\ \checkmark \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}, \forall ab \geq 0, b \neq 0; & \checkmark \quad \sqrt[n+1]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n+1]{a}}{\sqrt[n+1]{b}}, \forall a, \forall b \neq 0. \\ \checkmark \quad \sqrt[n]{a^m} &= (\sqrt[n]{a})^m, \forall a > 0, n \text{ nguyên dương, } m \text{ nguyên.} \end{aligned}$$

☑ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}, \forall a \geq 0, n, m$ nguyên dương.

☑ Nếu $\frac{p}{n} = \frac{q}{m}$ thì $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}, \forall a > 0, m, n$ nguyên dương p, q nguyên.

Đặc biệt: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^m}$.

1.2 Logarit

✎ Định nghĩa

☞ Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là logarit cơ số a của b và được kí hiệu là $\log_a b$.

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b.$$

Không có logarit của số âm và số 0.

☑ Khi $a = 10$ là cơ số thập phân ta ký hiệu: $\log x$ ($\log x$ được hiểu là $\log_{10} x$).

☑ Khi $a = e \approx 2,7182818\dots$ là cơ số tự nhiên ta ký hiệu: $\ln x$

✎ Tóm tắt công thức

☑ $\log_a 1 = 0, (0 < a \neq 1)$.

☑ $\log_a a = 1, (0 < a \neq 1)$.

☑ $\log_{a^\alpha} a = \frac{1}{\alpha}$.

☑ $\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b, (a, b > 0, a \neq 1)$.

☑ $\log_{a^\beta} b^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \log_a b$.

☑ $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$.

☑ $\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$.

☑ $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

☑ Công thức đổi cơ số:

Cho 3 số dương a, b, c với $a \neq 1, c \neq 1$, ta có

▶ $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

▶ Đặc biệt $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$ và $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$ với $\alpha \neq 0$.

1.3 VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(7a) - \ln(3a)$ bằng

(A) $\frac{\ln(7a)}{\ln(3a)}$.

(B) $\frac{\ln 7}{\ln 3}$.

(C) $\ln \frac{7}{3}$.

(D) $\ln(4a)$.

Lời Giải

☑ Ta có $\ln(7a) - \ln(3a) = \ln\left(\frac{7a}{3a}\right) = \ln\frac{7}{3}$.

☑ Vậy ta chọn đáp án **(C)**

Ví dụ 2. Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}(16a^2+b^2+1) + \log_{8ab+1}(4a+5b+1) = 2$.

Giá trị của $a + 2b$ bằng

(A) 9.

(B) 6.

(C) $\frac{27}{4}$.

(D) $\frac{20}{3}$.

THPT QUỐC GIA - 2018 - 103

Lời Giải

Do $a, b > 0$ nên $\begin{cases} 16a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{16a^2b^2} \\ 4a + 5b + 1 > 1 \end{cases} \Rightarrow \log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) \geq \log_{4a+5b+1}(8ab + 1)$.

Do đó $\log_{4a+5b+1}(16a^2 + b^2 + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) \geq \log_{4a+5b+1}(8ab + 1) + \log_{8ab+1}(4a + 5b + 1) \geq 2$ (áp dụng BDT Cô-si).

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 16a^2 = b^2 ; a > 0, b > 0 \\ 8ab + 1 = 4a + 5b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = b > 0 \\ 2b^2 + 1 = 6b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = 3. \end{cases}$

Vậy $a + 2b = \frac{27}{4}$.

1.4 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho a là số thực dương tùy ý khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\log_2 a = \log_a 2$. **(B)** $\log_2 a = \frac{1}{\log_2 a}$. **(C)** $\log_2 a = \frac{1}{\log_a 2}$. **(D)** $\log_2 a = -\log_a 2$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 104)

Câu 2. Cho a là số thực dương khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng với mọi số thực dương x, y ?

(A) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

(B) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x + \log_a y$.

(C) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a(x - y)$.

(D) $\log_a \frac{x}{y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 102)

Câu 3. Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(5a) - \ln(3a)$ bằng

(A) $\frac{\ln(5a)}{\ln(3a)}$.

(B) $\ln(2a)$.

(C) $\ln\frac{5}{3}$.

(D) $\frac{\ln 5}{\ln 3}$.

(THPT QUỐC GIA 2018 - 101)

Câu 4. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3(3a)$ bằng

- (A) $3 \log_3 a$. (B) $3 + \log_3 a$. (C) $1 + \log_3 a$. (D) $1 - \log_3 a$.

(THPT QUỐC GIA 2018 - 102)

Câu 5. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3\left(\frac{3}{a}\right)$ bằng

- (A) $1 - \log_3 a$. (B) $3 - \log_3 a$. (C) $\frac{1}{\log_3 a}$. (D) $1 + \log_3 a$.

(THPT QUỐC GIA 2018 - 104)

Câu 6. Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{3a+2b+1}(9a^2 + b^2 + 1) + \log_{6ab+1}(3a + 2b + 1) = 2$. Giá trị của $a + 2b$ bằng

- (A) 6. (B) 9. (C) $\frac{7}{2}$. (D) $\frac{5}{2}$.

(THPT QUỐC GIA 2018 - 101)

Câu 7. Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn

$$\log_{10a+3b+1}(25a^2 + b^2 + 1) + \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) = 2.$$

Giá trị của $a + 2b$ bằng

- (A) $\frac{5}{2}$. (B) 6. (C) 22. (D) $\frac{11}{2}$.

(THPT QUỐC GIA 2018 - 102)

Câu 8. Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{2a+2b+1}(4a^2 + b^2 + 1) + \log_{4ab+1}(2a + 2b + 1) = 2$.

Giá trị của $a + 2b$ bằng

- (A) $\frac{15}{4}$. (B) 5. (C) 4. (D) $\frac{3}{2}$.

(THPT QUỐC GIA 2018 - 104)

Câu 9. Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$.

- (A) $P = x^{\frac{1}{8}}$. (B) $P = x^2$. (C) $P = \sqrt{x}$. (D) $P = x^{\frac{2}{9}}$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 102)

Câu 10. Rút gọn biểu thức $Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b}$ với $b > 0$.

- (A) $Q = b^2$. (B) $Q = b^{\frac{5}{9}}$. (C) $Q = b^{-\frac{4}{3}}$. (D) $Q = b^{\frac{4}{3}}$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 103)

Câu 11. Cho a là số thực dương khác 1. Tính $I = \log_{\sqrt{a}} a$.

- (A) $I = \frac{1}{2}$. (B) $I = 0$. (C) $I = -2$. (D) $I = 2$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 101)

Câu 12. Cho a là số thực dương khác 2. Tính $I = \log_{\frac{a}{2}} \left(\frac{a^2}{4} \right)$.

- (A) $I = \frac{1}{2}$. (B) $I = 2$. (C) $I = -\frac{1}{2}$. (D) $I = -2$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 103)

Câu 13. Với a, b là các số thực dương tùy ý và a khác 1, đặt $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $P = 9 \log_a b$. (B) $P = 27 \log_a b$. (C) $P = 15 \log_a b$. (D) $P = 6 \log_a b$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 101)

Câu 14. Với mọi a, b, x là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 x = 5 \log_2 a + 3 \log_2 b$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $x = 3a + 5b$. (B) $x = 5a + 3b$. (C) $x = a^5 + b^3$. (D) $x = a^5 b^3$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 104)

Câu 15. Cho $\log_a b = 2$ và $\log_a c = 3$. Tính $P = \log_a (b^2 c^3)$.

- (A) $P = 31$. (B) $P = 13$. (C) $P = 30$. (D) $P = 108$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 102)

Câu 16. Cho $\log_a x = 3$, $\log_b x = 4$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{ab} x$.

- (A) $P = \frac{7}{12}$. (B) $P = \frac{1}{12}$. (C) $P = 12$. (D) $P = \frac{12}{7}$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 101)

Câu 17. Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn $x^2 + 9y^2 = 6xy$. Tính $M = \frac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2 \log_{12} (x + 3y)}$.

- (A) $M = \frac{1}{4}$. (B) $M = 1$. (C) $M = \frac{1}{2}$. (D) $M = \frac{1}{3}$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 102)

Câu 18. Cho $\log_3 a = 2$ và $\log_2 b = \frac{1}{2}$. Tính $I = 2 \log_3 [\log_3 (3a)] + \log_{\frac{1}{4}} b^2$.

- (A) $I = \frac{5}{4}$. (B) $I = 4$. (C) $I = 0$. (D) $I = \frac{3}{2}$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 103)

Câu 19. Với mọi số thực dương a và b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 8ab$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $\log(a + b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$. (B) $\log(a + b) = 1 + \log a + \log b$.
(C) $\log(a + b) = \frac{1}{2}(1 + \log a + \log b)$. (D) $\log(a + b) = \frac{1}{2} + \log a + \log b$.

Câu 20. Với các số thực dương x, y tùy ý, đặt $\log_3 x = \alpha, \log_3 y = \beta$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = 9 \left(\frac{\alpha}{2} - \beta \right)$.

Ⓑ $\log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = \frac{\alpha}{2} + \beta$.

Ⓒ $\log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = 9 \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right)$.

Ⓓ $\log_{27} \left(\frac{\sqrt{x}}{y} \right)^3 = \frac{\alpha}{2} - \beta$.


ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. C	2. A	3. C	4. C	5. A	6. C	7. D	8. A	9. C	10. D
11. D	12. B	13. D	14. D	15. B	16. D	17. B	18. D	19. C	20. D

§2. HÀM SỐ LŨY THỪA, HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

2.1 Hàm Số Lũy Thừa

Định nghĩa

 Xét hàm số $y = x^\alpha$, với α là số thực cho trước. Hàm số $y = x^\alpha$, với $\alpha \in \mathbb{R}$, được gọi là hàm số lũy thừa.

Tập xác định

- ▶ Với α nguyên dương, $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- ▶ Với α nguyên âm hoặc bằng 0, $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- ▶ Với α không nguyên, $\mathcal{D} = (0; +\infty)$.

Tập giá trị $\mathcal{G} = (0; +\infty)$.

Đạo hàm $(u^\alpha)' = \alpha u' \cdot u^{\alpha-1}$.

Tính đơn điệu

$y = x^\alpha, \alpha > 0.$	$y = x^\alpha, \alpha < 0.$																								
<ul style="list-style-type: none"> <input checked="" type="checkbox"/> Đạo hàm: $y' = \alpha x^{\alpha-1} > 0, \forall x > 0.$ <input checked="" type="checkbox"/> Giới hạn đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty.$ <input checked="" type="checkbox"/> Không có tiệm cận <input checked="" type="checkbox"/> Bảng biến thiên. <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 10px;"> <tr> <td style="text-align: center; width: 5%;">x</td> <td style="width: 15%;">0</td> <td style="width: 75%;"></td> <td style="text-align: right; width: 5%;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">y'</td> <td colspan="3" style="text-align: center;">+</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">y</td> <td style="text-align: center;">$-\infty$</td> <td style="text-align: center;">↗</td> <td style="text-align: right;">$+\infty$</td> </tr> </table>	x	0		$+\infty$	y'	+			y	$-\infty$	↗	$+\infty$	<ul style="list-style-type: none"> <input checked="" type="checkbox"/> Đạo hàm: $y' = \alpha x^{\alpha-1} < 0, \forall x > 0.$ <input checked="" type="checkbox"/> Giới hạn đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0.$ <input checked="" type="checkbox"/> Ox là tiệm cận ngang, Oy là tiệm cận đứng của đồ thị. <input checked="" type="checkbox"/> Bảng biến thiên. <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 10px;"> <tr> <td style="text-align: center; width: 5%;">x</td> <td style="width: 15%;">0</td> <td style="width: 75%;"></td> <td style="text-align: right; width: 5%;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">y'</td> <td colspan="3" style="text-align: center;">-</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">y</td> <td style="text-align: center;">$+\infty$</td> <td style="text-align: center;">↘</td> <td style="text-align: right;">$-\infty$</td> </tr> </table>	x	0		$+\infty$	y'	-			y	$+\infty$	↘	$-\infty$
x	0		$+\infty$																						
y'	+																								
y	$-\infty$	↗	$+\infty$																						
x	0		$+\infty$																						
y'	-																								
y	$+\infty$	↘	$-\infty$																						

2.2 Hàm Số Logarit

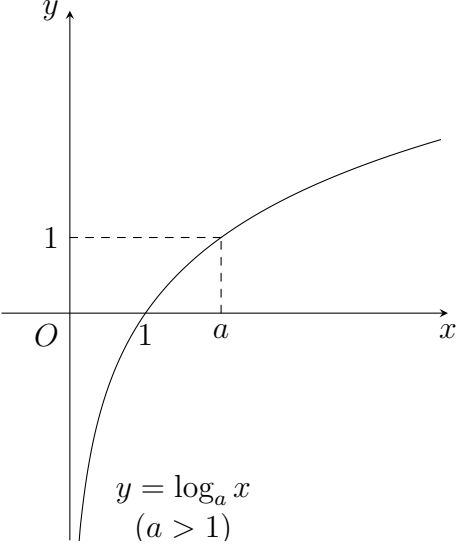
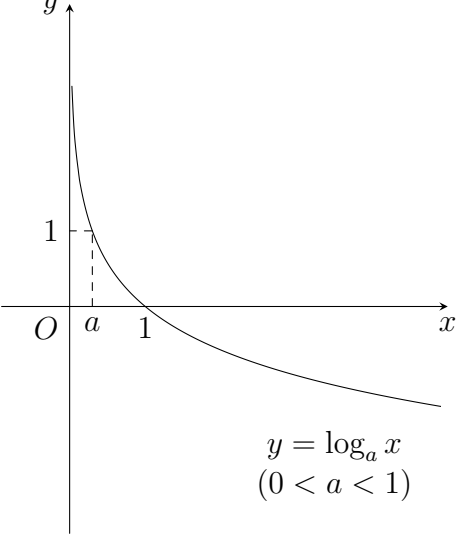
✎ Định nghĩa

📁 Cho số thực dương a khác 1. Hàm số $y = \log_a x$ được gọi là hàm số logarit cơ số a .

- Tập xác định $\mathcal{D} = (0; +\infty)$.
- Tập giá trị $\mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

☑ Đạo hàm $\log_a |u|' = \frac{u'}{u \ln a}$.

☑ Tính đơn điệu

$y = \log_a x, a > 1$	$y = \log_a x, 0 < a < 1$																														
<p>☑ Đạo hàm: $y' = \frac{1}{x \ln a} > 0, \forall x > 0$.</p> <p>☑ Giới hạn đặc biệt</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$.</p> <p>Tiếp cận: Trục Oy là tiệm cận đứng.</p> <p>☑ Bảng biến thiên</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>a</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>y'</td> <td></td> <td>+</td> <td>+</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>$-\infty$</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> </table> <p>☑ Đồ Thị</p>  <p style="text-align: center;">$y = \log_a x$ ($a > 1$)</p>	x	0	1	a	$+\infty$	y'		+	+	+	y	$-\infty$	0	1	$+\infty$	<p>☑ Đạo hàm: $y' = \frac{1}{x \ln a} < 0, \forall x > 0$.</p> <p>☑ Giới hạn đặc biệt</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$. Tiệm cận: Trục Oy là tiệm cận đứng.</p> <p>☑ Bảng biến thiên</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>a</td> <td>1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>y'</td> <td></td> <td>-</td> <td>-</td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>$+\infty$</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>$-\infty$</td> </tr> </table> <p>☑ Đồ Thị</p>  <p style="text-align: center;">$y = \log_a x$ ($0 < a < 1$)</p>	x	0	a	1	$+\infty$	y'		-	-	-	y	$+\infty$	1	0	$-\infty$
x	0	1	a	$+\infty$																											
y'		+	+	+																											
y	$-\infty$	0	1	$+\infty$																											
x	0	a	1	$+\infty$																											
y'		-	-	-																											
y	$+\infty$	1	0	$-\infty$																											

- $a > 1$ hàm số luôn đồng biến
- $0 < a < 1$ hàm số luôn nghịch biến

2.3 Hàm Số Mũ

Định nghĩa

Cho số thực dương a khác 1. Hàm số $y = a^x$ được gọi là **hàm số mũ** cơ số a .

- ☑ Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- ☑ Tập giá trị $\mathcal{G} = (0; +\infty)$.
- ☑ Đạo hàm $(e^u)' = u' \cdot e^u$.
- ☑ Tính đơn điệu

$y = \log_a x, a > 1$	$y = \log_a x, 0 < a < 1$																														
<p>☑ Đạo hàm: $y' = a^x \ln a > 0, \forall x$.</p> <p>☑ Giới hạn đặc biệt</p> <p>$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$.</p> <p>Tiệm cận: Trục Ox là tiệm cận ngang.</p> <p>☑ Bảng biến thiên</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 2px;">x</td> <td style="padding: 2px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 2px;">0</td> <td style="padding: 2px;">1</td> <td style="padding: 2px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">y'</td> <td style="padding: 2px;">$+$</td> <td style="padding: 2px;">$+$</td> <td style="padding: 2px;">$+$</td> <td style="padding: 2px;">$+$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">y</td> <td colspan="4" style="text-align: center;"> </td> </tr> </table> <p>☑ Đồ Thị</p>	x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	y'	$+$	$+$	$+$	$+$	y					<p>☑ Đạo hàm: $y' = \frac{1}{x \ln a} < 0, \forall x > 0$.</p> <p>☑ Giới hạn đặc biệt</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$. Tiệm cận: Trục Oy là tiệm cận đứng.</p> <p>☑ Bảng biến thiên</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 2px;">x</td> <td style="padding: 2px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 2px;">0</td> <td style="padding: 2px;">1</td> <td style="padding: 2px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">y'</td> <td style="padding: 2px;">$-$</td> <td style="padding: 2px;">$-$</td> <td style="padding: 2px;">$-$</td> <td style="padding: 2px;">$-$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">y</td> <td colspan="4" style="text-align: center;"> </td> </tr> </table> <p>☑ Đồ Thị</p>	x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	y'	$-$	$-$	$-$	$-$	y				
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$																											
y'	$+$	$+$	$+$	$+$																											
y																															
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$																											
y'	$-$	$-$	$-$	$-$																											
y																															

- Với $a > 1$ hàm số luôn đồng biến
- Với $0 < a < 1$ hàm số luôn nghịch biến

2.4 VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Tìm tập xác định \mathcal{D} của hàm số $y = (x - 1)^{\frac{1}{3}}$.

- (A) $\mathcal{D} = (-\infty; 1)$. (B) $\mathcal{D} = (1; +\infty)$. (C) $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. (D) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 102)

Câu 2. Tìm tập xác định \mathcal{D} của hàm số $y = (x^2 - x - 2)^{-3}$.

- (A) $D = \mathbb{R}$. (B) $D = (0; +\infty)$.
(C) $D = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$. (D) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 104)

Câu 3. Tìm tập xác định \mathcal{D} của hàm số $y = \log_5 \frac{x - 3}{x + 2}$.

- (A) $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. (B) $\mathcal{D} = (-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$.
(C) $\mathcal{D} = (-2; 3)$. (D) $\mathcal{D} = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 101)

Câu 4. Tìm tập xác định \mathcal{D} của hàm số $y = \log_3(x^2 - 4x + 3)$.

- (A) $\mathcal{D} = (2 - \sqrt{2}; 1) \cup (3; 2 + \sqrt{2})$. (B) $\mathcal{D} = (1; 3)$.
(C) $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. (D) $\mathcal{D} = (-\infty; 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}; +\infty)$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 104)

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định là \mathbb{R} .

- (A) $m \geq 0$. (B) $m < 0$. (C) $m \leq 2$. (D) $m > 2$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 103)

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2x + m + 1)$ có tập xác định là \mathbb{R} .

- (A) $m = 0$. (B) $0 < m < 3$.
(C) $m < -1$ hoặc $m > 0$. (D) $m > 0$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 104)

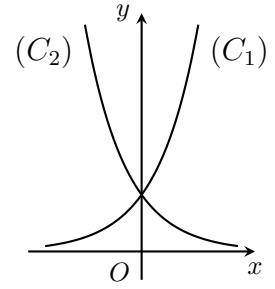
Câu 7. Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_2(2x + 1)$.

- (A) $y' = \frac{1}{(2x + 1) \ln 2}$. (B) $y' = \frac{2}{(2x + 1) \ln 2}$.
(C) $y' = \frac{2}{2x + 1}$. (D) $y' = \frac{1}{2x + 1}$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 102)

Câu 8.

Cho hai hàm số $y = a^x$, $y = b^x$ với a, b là hai số thực dương khác 1, lần lượt có đồ thị là (C_1) và (C_2) như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- (A) $0 < a < b < 1$. (B) $0 < b < 1 < a$.
(C) $0 < a < 1 < b$. (D) $0 < b < a < 1$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 103)

Câu 9. Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a \ln^2 x + b \ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5 \log^2 x + b \log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 x_2 > x_3 x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất S_{\min} của $S = 2a + 3b$.

- (A) $S_{\min} = 30$. (B) $S_{\min} = 25$. (C) $S_{\min} = 33$. (D) $S_{\min} = 17$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 104)

Câu 10. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{1 - xy}{x + 2y} = 3xy + x + 2y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất P_{\min} của $P = x + y$.

- (A) $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11} - 19}{9}$. (B) $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11} + 19}{9}$.
(C) $P_{\min} = \frac{18\sqrt{11} - 29}{21}$. (D) $P_{\min} = \frac{2\sqrt{11} - 3}{3}$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 101)

Câu 11. Xét các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2 \frac{1 - ab}{a + b} = 2ab + a + b - 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất P_{\min} của $P = a + 2b$.

- (A) $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10} - 3}{2}$. (B) $P_{\min} = \frac{3\sqrt{10} - 7}{2}$.
(C) $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10} - 1}{2}$. (D) $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10} - 5}{2}$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 102)

Câu 12. Xét hàm số $f(t) = \frac{9^t}{9^t + m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $f(x) + f(y) = 1$ với mọi số thực x, y thỏa mãn $e^{x+y} \leq e(x+y)$. Tìm số phần tử của S .

- (A) 0. (B) 1. (C) Vô số. (D) 2.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 103)

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1.	B	2.	D	3.	D	4.	C	5.	B	6.	D
7.	B	8.	B	9.	A	10.	D	11.	A	12.	D

§3. PHƯƠNG TRÌNH MŨ - PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

3.1 KIẾN THỨC CƠ BẢN

📖 Phương trình mũ và lôgarit cơ bản.

☑ Phương trình mũ cơ bản có dạng: $a^x = m$ (1).

▶ Nếu $m > 0$ thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = \log_a m$.

▶ Nếu $m \leq 0$ thì phương trình(1) vô nghiệm.

☑ Phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x = m$ (2). Với mỗi $m \in \mathbb{R}$, phương trình (2) luôn có nghiệm $x = a^m$.

📖 Phương pháp đưa về cùng cơ số.

Với $a > 0$ và $a \neq 1$ ta có:

☑ $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

☑ $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

📖 Phương pháp lôgarit hoá.

☑ $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$

☑ $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \log_a b$

☑ $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$.

📖 Phương pháp đặt ẩn phụ.

Bằng phương pháp chọn ẩn thích hợp, ta đưa bài toán phương trình mũ, phương trình lôgarit về phương trình đơn giản hơn.

Từ đó dễ dàng giải được bài toán ban đầu.

📖 Thông thường ta dùng tính chất đơn điệu của hàm số để đánh giá hai vế.

Xét phương trình: $f(x) = g(x)$ (1).

☑ Nếu $f(x)$ là hàm đồng biến hoặc nghịch biến, $g(x)$ là hàm hằng, nếu tồn tại x_0 thoả mãn $f(x_0) = g(x_0)$ thì x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

☑ Nếu $f(x)$ là hàm đồng biến, $g(x)$ là hàm nghịch biến (hoặc $f(x)$ nghịch biến, $g(x)$ đồng biến), nếu tồn tại x_0 thỏa mãn $f(x_0) = g(x_0)$ thì x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

☑ Nếu $y = f(t)$ là hàm số đơn điệu và $f(u(x)) = f(v(x))$ thì ta có: $u(x) = v(x)$.

3.2 VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Phương trình $2^{2x+1} = 32$ có nghiệm là

- (A) $x = \frac{5}{2}$. (B) $x = 2$. (C) $x = \frac{3}{2}$. (D) $x = 3$.

THPT QUỐC GIA - 2018 - 101

Lời Giải:

$$\text{Ta có } 2^{2x+1} = 32 \Leftrightarrow 2x + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 2.$$

Ví dụ 2. Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - 1) = 3$ là

- (A) $\{-3; 3\}$. (B) $\{-3\}$. (C) $\{3\}$. (D) $\{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$.

THPT QUỐC GIA - 2018 - 102

Lời Giải

$$\text{Ta có } \log_2(x^2 - 1) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $\{-3; 3\}$.

Ví dụ 3. Gọi S là tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

- (A) 3. (B) 5. (C) 2. (D) 1.

THPT QUỐC GIA - 2018 - 103

Lời Giải

$$\text{Ta có } 4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow 4^x - 2m \cdot 2^x + 2m^2 - 5 = 0. \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = 2^x, t > 0. \text{ Phương trình (1) thành: } t^2 - 2m \cdot t + 2m^2 - 5 = 0. \quad (2)$$

Yêu cầu bài toán \Leftrightarrow (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m^2 + 5 > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m^2 - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{5} < m < \sqrt{5} \\ m > 0 \\ m < -\sqrt{\frac{5}{2}} \vee m > \sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{2} < m < \sqrt{5}.$$

Do m là số nguyên nên $m = 2$.

Vậy S chỉ có một phần tử duy nhất.

Ví dụ 4. Cho phương trình $7^x + m = \log_7(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-25; 25)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

- (A) 9. (B) 25. (C) 24. (D) 26.

THPT QUỐC GIA - 2018 - 103

Lời Giải

Điều kiện: $x > m$.

Đặt $t = \log_7(x - m)$ ta có
$$\begin{cases} 7^x + m = t \\ 7^t + m = x \end{cases} \Rightarrow 7^x + x = 7^t + t. \quad (1)$$

Do hàm số $f(u) = 7^u + u$ đồng biến trên \mathbb{R} nên ta có (1) $\Leftrightarrow t = x$. Tức là

$$7^x + m = x \Leftrightarrow m = x - 7^x.$$

Xét hàm số $g(x) = x - 7^x \Rightarrow g'(x) = 1 - 7^x \ln 7 = 0 \Leftrightarrow x = -\log_7(\ln 7) = x_0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\log_7(\ln 7)$	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
$g(x)$	$-\infty$	$g(x_0)$	$-\infty$

Từ đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \leq g(-\log_7(\ln 7)) \approx -0,856$.

(các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện vì $x - m = 7^x > 0$)

Do m nguyên thuộc khoảng $(-25; 25)$ nên $m \in \{-24; -16; \dots; -1\}$.

3.3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho phương trình $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$. Khi đặt $t = 2^x$, ta được phương trình nào dưới đây?

- (A) $2t^2 - 3 = 0$. (B) $t^2 + t - 3 = 0$. (C) $4t - 3 = 0$. (D) $t^2 + 2t - 3 = 0$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 101)

Câu 2. Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(1 - x) = 2$.

- (A) $x = -4$. (B) $x = -3$. (C) $x = 3$. (D) $x = 5$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 102)

Câu 3. Tìm nghiệm của phương trình $\log_{25}(x + 1) = \frac{1}{2}$.

- (A) $x = -6$. (B) $x = 6$. (C) $x = 4$. (D) $x = \frac{23}{2}$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 103)

Câu 4. Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(x - 5) = 4$.

- (A) $x = 21$. (B) $x = 3$. (C) $x = 11$. (D) $x = 13$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 104)

Câu 5. Tập nghiệm S của phương trình $\log_3(2x + 1) - \log_3(x - 1) = 1$.

- (A) $S = \{4\}$. (B) $S = \{3\}$. (C) $S = \{-2\}$. (D) $S = \{1\}$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 103)

Câu 6. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x - 1) + \log_1(x + 1) = 1$.

- (A) $S = \{2 + \sqrt{5}\}$. (B) $S = \{2 - \sqrt{5}; 2 + \sqrt{5}\}$.
 (C) $S = \{3\}$. (D) $S = \left\{ \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right\}$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 102)

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $3^x = m$ có nghiệm thực.

- (A) $m \geq 1$. (B) $m \geq 0$. (C) $m > 0$. (D) $m \neq 0$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 104)

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x - 2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

- (A) $m \in (-\infty; 1)$. (B) $m \in (0; +\infty)$. (C) $m \in (0; 1]$. (D) $m \in (0; 1)$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 102)

Câu 9. Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - m \log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 81$.

- (A) $m = -4$. (B) $m = 4$. (C) $m = 81$. (D) $m = 44$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 101)

Câu 10. Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 1$.

- (A) $m = 6$. (B) $m = -3$. (C) $m = 3$. (D) $m = 1$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 104)

Câu 11. Phương trình $5^{2x+1} = 125$ có nghiệm là

- (A) $x = \frac{3}{2}$. (B) $x = \frac{5}{2}$. (C) $x = 1$. (D) $x = 3$.

(THPT QUỐC GIA - 2018 - 104)

Câu 12. Tập nghiệm của phương trình $\log_3(x^2 - 7) = 2$ là

- (A) $\{-\sqrt{15}; \sqrt{15}\}$. (B) $\{-4; 4\}$. (C) $\{4\}$. (D) $\{-4\}$.

(THPT QUỐC GIA - 2018 - 103)

Câu 13. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x - m \cdot 4^{x+1} + 5m^2 - 45 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

- (A) 13. (B) 3. (C) 6. (D) 4.

(THPT QUỐC GIA - 2018 - 101)

Câu 14. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $25^x - m \cdot 5^{x+1} + 7m^2 - 7 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

- (A) 7. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

(THPT QUỐC GIA - 2018 - 102)

Câu 15. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $9^x - m3^{x+1} + 3m^2 - 75 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

- (A) 8. (B) 4. (C) 19. (D) 5.

(THPT QUỐC GIA - 2018 - 104)

Câu 16. Cho phương trình $3^x + m = \log_3(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-15; 15)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

- (A) 16. (B) 9. (C) 14. (D) 15.

(THPT QUỐC GIA - 2018 - 102)

Câu 17. Cho phương trình $2^x + m = \log_2(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-18; 18)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

- (A) 9. (B) 19. (C) 17. (D) 18.

(THPT QUỐC GIA - 2018 - 104)

Câu 18. Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-20; 20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

- (A) 20. (B) 19. (C) 9. (D) 21.


(THPT QUỐC GIA - 2018 - 101)

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.
D	B	C	A	A	A	C	D	B	C	C	B	B	C	B	C	C	B


§4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ - BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

4.1 BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

 Bất phương trình dạng $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ ($a > 0, a \neq 1$)

☑ Nếu $a > 1$ thì $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.


☑ Nếu $0 < a < 1$ thì $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

 Bất phương trình dạng $a^x > b$ ($a > 0, a \neq 1$)

☑ Nếu $b \geq 0$ thì $a^x > b \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

☑ Nếu $a > 1$ thì $a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b$.

☑ Nếu $0 < a < 1$ thì $a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b$.


 Bất phương trình dạng $a^x < b$ ($a > 0, a \neq 1$)

☑ Nếu $b \geq 0$ thì $a^x < b \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

☑ Nếu $a > 1, b > 0$ thì $a^x < b \Leftrightarrow x < \log_a b$.

☑ Nếu $0 < a < 1$ thì $a^x < b \Leftrightarrow x > \log_a b$.

4.2 BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

 Bất phương trình logarit cơ bản:

Với $a > 0, a \neq 1$: $\log_a x > b; \log_a x \geq b; \log_a x < b; \log_a x \leq b$



$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ (a - 1)[f(x) - g(x)] < 0 \end{cases}$$



$$\log_a f(x) < b \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 0 < f(x) < a^b \\ 0 < a < 1 \\ f(x) > a^b \end{cases}$$

Ngoài ra ta cần kết hợp và áp dụng một số phương pháp giải bất phương trình tương tự như các phương pháp đã nêu trong phần giải phương trình logarit:

- Đưa về cùng cơ số
- Mũ hóa
- Đặt ẩn phụ
- Sử dụng tính đơn điệu của hàm số,...

4.3 VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x - 5 \log_2 x + 4 \geq 0$.

- (A) $S = (-\infty; 2) \cup [16; +\infty)$. (B) $S = [2; 16]$.
(C) $S = (0; 2] \cup [16; +\infty)$. (D) $S = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 101)

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2^2 x - 2 \log_2 x + 3m - 2 < 0$ có nghiệm thực.

- (A) $m < 1$. (B) $m < \frac{2}{3}$. (C) $m < 0$. (D) $m \leq 1$.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 103)

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

§5. CÁC BÀI TOÁN ỨNG DỤNG

5.1 Lãi Đơn

Định nghĩa

Lãi đơn là số tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi do số tiền gốc sinh ra, tức là tiền lãi của kì hạn trước không được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn kế tiếp, cho dù đến kì hạn người gửi không đến lấy tiền ra.

Công thức

Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi đơn r /kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là:

$$S_n = A + nAr = A(1 + nr) \quad (1.1)$$

! Trong tính toán các bài toán lãi suất và các bài toán liên quan, ta nhớ $r\%$ là $\frac{r}{100}$.

5.2 Lãi Kép

✎ Định nghĩa

Lãi kép là tiền lãi của kì hạn trước nếu người gửi không rút ra thì được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn sau.

✎ Công thức

Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép $r\%$ /kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là

$$S_n = A(1 + r)^n \quad (1.2)$$

Từ công thức (2) ta có thể tính được

$$n = \log_{1+r} \left(\frac{S_n}{A} \right) \quad (1.3)$$

$$r = \sqrt[n]{\frac{S_n}{A}} - 1 \quad (1.4)$$

$$A = \frac{S_n}{(1 + r)^n} \quad (1.5)$$

5.3 Gửi Tiền Hàng Tháng Vào Ngân Hàng

✎ Định nghĩa

Đầu mỗi tháng khách hàng gửi vào ngân hàng số tiền A đồng với lãi kép $r\%$ /tháng, thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n tháng ($n \in \mathbb{N}^*$) (nhận tiền cuối tháng, khi ngân hàng đã tính lãi) là S_n .

✎ Công thức

Cuối tháng thứ nhất, khi ngân hàng đã tính lãi thì số tiền có được là

$$S_1 = A(1+r) = \frac{A}{r} [(1+r)^1 - 1] (1+r)$$

Đầu tháng thứ hai, khi đã gửi thêm số tiền A đồng thì số tiền là

$$T_1 = A(1+r) + A = A[(1+r) + 1] = A \frac{[(1+r)^2 - 1]}{(1+r) - 1} = \frac{A}{r} [(1+r)^2 - 1]$$

Cuối tháng thứ hai, khi ngân hàng đã tính lãi thì số tiền có được là

$$S_2 = \frac{A}{r} [(1+r)^2 - 1] (1+r)$$

Từ đó ta có công thức tổng quát

$$S_n = \frac{A}{r} [(1+r)^n - 1] (1+r) \quad (1.6)$$

Chú ý: Từ công thức (6) ta có thể tính được

$$n = \log_{(1+r)} \left(\frac{S_n r}{A(1+r)} + 1 \right) \quad (1.7)$$

$$A = \frac{S_n r}{(1+r) [(1+r)^n - 1]} \quad (1.8)$$

5.4 Gửi tiền vào ngân hàng và rút tiền hàng tháng

Định nghĩa

Một người gửi ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất $r\%$ /tháng. Mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi, người đó rút ra số tiền là X đồng. Tính số tiền còn lại sau n tháng là bao nhiêu.

Công thức

Cuối tháng thứ nhất, khi ngân hàng đã tính lãi thì số tiền có được là $T_1 = A(1+r)$ và sau khi rút số tiền còn lại là

$$S_1 = A(1+r) - X = A(1+r) - X \frac{(1+r) - 1}{r}$$

Cuối tháng thứ hai, khi ngân hàng đã tính lãi thì số tiền có được là

$$T_2 = [A(1+r) - X](1+r) = A(1+r)^2 - X(1+r)$$

và sau khi rút số tiền còn lại là

$$S_2 = A(1+r)^2 - X(1+r) - X = A(1+r)^2 - X[(1+r) + 1] = A(1+r)^2 - X \frac{(1+r)^2 - 1}{r}$$

Từ đó ta có công thức tổng quát số tiền còn lại sau n tháng là

$$S_n = A(1+r)^n - X \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad (1.9)$$

Chú ý: Từ công thức (9) ta có thể tính được

$$X = [A(1+r)^n - S_n] \frac{r}{(1+r)^n - 1} \quad (1.10)$$

5.5 Bài toán vay vốn trả góp

Vay ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất $r\%$ /tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ cách nhau một tháng, mỗi lần hoàn nợ số tiền là X đồng và trả hết tiền nợ sau đúng n tháng.

Công thức

Cách tính số tiền còn lại sau n tháng giống hoàn toàn công thức tính tiền gửi ngân hàng và rút tiền hàng tháng nên ta có

$$S_n = A(1+r)^n - X \frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad (1.11)$$

Để sau đúng n tháng trả hết nợ thì $S_n = 0$ nên

$$A(1+r)^n - X \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0 \quad (1.12)$$

và

$$X = \frac{A(1+r)^n \cdot r}{(1+r)^n - 1} \quad (1.13)$$

5.6 Lãi kép liên tục

Định nghĩa

Gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép $r\%/năm$ thì số tiền nhận được cả vốn lẫn lãi sau n năm ($n \in \mathbb{N}^*$) là

$$S_n = A(1 + r)^n \quad (1.14)$$

Giả sử ta chia mỗi năm thành m kì hạn để tính lãi và lãi suất mỗi kì hạn là $\frac{r}{m}\%$ thì số tiền thu được sau n năm là

$$S_n = A \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m \cdot n}$$

Khi tăng số kì hạn của mỗi năm lên vô cực, tức là $m \rightarrow +\infty$ thì người ta chứng minh được $S_n \rightarrow Ae^{m \cdot r}$. Đặt

$$S = Ae^{m \cdot r} \quad (1.15)$$

Khi đó S được gọi là lãi kép liên tục hay còn gọi là công thức tăng trưởng mũ.

5.7 VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất $6,6\%/năm$. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

- (A) 11 năm. (B) 10 năm. (C) 13 năm. (D) 12 năm.

THPT QUỐC GIA - 2018 - 103

Lời Giải

Với số tiền gửi ban đầu là A , lãi suất cố định là $r/năm$, sau n năm gửi tiền, số tiền có được là:

$$T_n = A(1 + r)^n.$$

Theo giả thiết: $T_n = 2A$ nên $(1 + r)^n = 2$.

Thay số ta được: $(1 + 0,066)^n = 2 \Rightarrow n = \log_{1,066} 2 \Rightarrow n \approx 10,85$.

Vậy sau ít nhất 11 năm gửi tiền số tiền của người gửi đạt gấp đôi số tiền vốn ban đầu.

5.8 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng bao gồm gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

- (A) 13 năm. (B) 14 năm. (C) 12 năm. (D) 11 năm.

(THPT QUỐC GIA 2017 - 101)

Câu 2. Đầu năm 2016, ông A thành lập một công ty. Tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2016 là 1 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm đó tăng thêm 15% so với năm trước. Hỏi năm nào dưới đây là năm đầu tiên mà tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm lớn hơn 2 tỷ đồng?

- (A) Năm 2023. (B) Năm 2022. (C) Năm 2021. (D) Năm 2020.

(QG17,102,c41)

Câu 3. Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 6,1 %/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

- (A) 13 năm. (B) 10 năm. (C) 11 năm. (D) 12 năm.

(THPT QUỐC GIA - 2018 - 104)

Câu 4. Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất 7,5 %/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền đã gửi, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

- (A) 11 năm. (B) 9 năm. (C) 10 năm. (D) 12 năm.

(THPT QUỐC GIA - 2018 - 101)

Câu 5. Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 7,2%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

- Ⓐ 11 năm. Ⓑ 12 năm. Ⓒ 9 năm. Ⓓ 10 năm.

(THPT QUỐC GIA - 2018 - 102)

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

- | | | | | |
|------|------|------|------|------|
| 1. C | 2. C | 3. D | 4. C | 5. D |
|------|------|------|------|------|