B. HÌNH HỌC

CHƯƠNG 1 – KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH CỦA CHÚNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. KHÁI NIỆM KHỐI ĐA DIỆN

1. KHỐI ĐA DIỆN. KHỐI CHÓP, KHỐI LĂNG TRỤ

Định nghĩa

> ***Hình đa diện*** (gọi tắt là ***đa diện***) *là hình gồm một số hữu hạn đa giác phẳng thoả mãn hai điều kiện*:
>
> a. *Hai đa giác bất kì hoặc không có điểm chung, hoặc có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung.*
>
> b. *Mỗi cạnh của đa giác là cạnh chung của đúng hai đa giác.*

Định nghĩa

> *Hình đa diện và phần bên trong của nó gọi là khối đa diện.*

2. PHÂN CHIA VÀ LẮP GHÉP CÁC KHỐI ĐA DIỆN

Kết quả

> *Mỗi khối đa diện bất kì luôn có thể phân chia được thành các khối tứ diện* (bằng nhiều cách khác nhau).

II. THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN

1. THỂ TÍCH CỦA KHỐI HỘP CHỮ NHẬT

Định lí 1: *Thể tích của một khối hộp chữ nhật bằng tích số của ba kích thước.*

Như vậy:

- Với khối hộp chữ nhật có ba kích thước là a, b, c thì $V = abc$.
- Khối lập phương có cạnh bằng a thì $V = a^3$.

2. THỂ TÍCH CỦA KHỐI CHÓP

Định lí 2: *Thể tích của khối chóp bằng* $\frac{1}{3}$ *tích của diện tích đáy và chiều cao.*

Như vậy, với khối chóp có diện tích đáy bằng $\mathscr{B}$ và chiều cao bằng h ta có:

$$V = \frac{1}{3}\mathscr{B}.h.$$

3. THỂ TÍCH CỦA KHỐI LĂNG TRỤ

Định lí 2: *Thể tích của khối lăng trụ bằng tích của diện tích đáy và chiều cao.*

Như vậy, với khối lăng trụ có diện tích đáy bằng $\mathscr{B}$ và chiều cao bằng h ta có:

$$V = \mathscr{B}.h.$$

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

<u>Dạng toán 1:</u> Tính thể tích

Phương pháp

Để tính thể tích của một khối chóp, khối lăng trụ (gọi chung là (H)) ta thường thực hiện theo các bước:

<u>Bước 1:</u> Xác định các yếu tố của giả thiết (như khoảng cách, góc giữa đường thẳng với mặt phẳng, góc giữa hai mặt phẳng ...) theo các phương pháp đã biết.

<u>Bước 2:</u> Thiết lập công thức tính thể tích V cho (H).

<u>Bước 3:</u> Dựa vào công thức, ta phân tích V thành các biểu thức chứa những đoạn thẳng phải tính.

<u>Bước 4:</u> Tính độ dài những đoạn thẳng ấy bằng cách sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác, tính chất đồng dạng ...

<u>Bước 5:</u> Suy ra giá trị của V.

☞ ***Chú ý***: 1. Với khối đa diện khác chúng ta sử dụng kiến thức về việc phân chia và lắp ghép các khối đa diện.

2. Do đặc thù của công thức tính thể tích một khối hộp chữ nhật chúng ta giảm thiểu năm bước trong dạng toán 1 ở phần mở đầu thành các bước:

<u>Bước 1:</u> Thiết lập công thức tính thể tích V cho (**H**). (1)

<u>Bước 2:</u> Dựa vào giả thiết tính những giá trị trong V. (2)

<u>Bước 3:</u> Thay (2) vào (1), ta được giá trị của V.

<u>Thí dụ 1.</u> *Tính thể tích của khối hộp chữ nhật có ba kích thước làm thành cấp số nhân với công bội là* 2 *và tổng của chúng bằng* 42.

✍ *Giải*

Gọi a, b, c là ba kích thước của hình hộp chữ nhật, ta có:

$$V = abc. \quad (3)$$

Từ giả thiết a, b, c theo thứ tự đó chúng lập thành một cấp số nhân với công bội bằng 2 và tổng của chúng bằng 42, ta có:

$$\begin{cases} a+b+c=42 \\ b=2a \\ c=4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2a+4a=42 \\ b=2a \\ c=4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=12 \\ c=24 \end{cases}. \quad (4)$$

Thay (4) vào (3) ta được V = 6.12.24 = 1728 (đvtt).

☞ ***Nhận xét***: a. Như vậy, để tính thể tích của khối hộp chữ nhật và khối lập phương trên chúng ta đã thực hiện đúng theo ba bước được nêu trong phần phương pháp.

b. Do đặc thù của công thức tính thể tích một khối chóp chúng ta cụ thể năm bước trong dạng toán 1 ở phần mở đầu thành các bước:

Bước 1: Xác định các yếu tố của giả thiết (như khoảng cách, góc giữa đường thẳng với mặt phẳng, góc giữa hai mặt phẳng ...) theo các phương pháp đã biết.

Bước 2: Thiết lập công thức tính cho thể tích V thông qua biểu thức chứa những đoạn thẳng phải tính. (1)

Bước 3: Tính độ dài những đoạn thẳng ấy bằng cách sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác, tính chất đồng dạng ... (2)

Bước 4: Thay (2) vào (1), ta được giá trị của V.

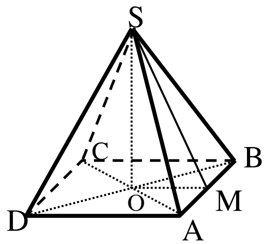
Thí dụ 2. *Tính thể tích hình chóp tứ giác đều* S.ABCD *có*:

a. *Diện tích đáy bằng* 4 *và diện tích của một mặt bên bằng* $\sqrt{2}$.

b. $AC = \sqrt{2}$ *và* $ASB = 60^0$.

Giải

a. Gọi O là tâm của đáy ABCD, ta có:



$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABCD}.SO = \frac{4}{3}SO. \qquad (1)$$

Gọi M là trung điểm AB, ta lần lượt có:

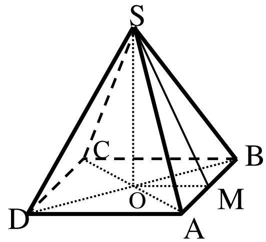
$S_{\Delta ABCD} = AB^2 = 4 \Leftrightarrow AB = 2.$

$$S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}SM.AB \Leftrightarrow SM = \frac{2S_{\Delta SAB}}{AB} = \sqrt{2}$$

$$SO^2 = SM^2 - OM^2 = SM^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 2 - 1 = 1. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được $V = \frac{4}{3}$ (đvdt).

b. Gọi O là tâm của đáy ABCD, ta có:



$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABCD}.SO = \frac{1}{3}AB^2.SO. \qquad (3)$$

Gọi M là trung điểm AB, ta lần lượt:

- Trong ΔABC vuông cân tại B, ta có $AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. (4)
- Trong ΔSMA vuông tại M, ta có:

$$SM = AM.\cot ASM = \frac{AB}{2}.\cot 30^0 = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

- Trong ΔSOM vuông tại O, ta có:

$$SO^2 = SM^2 - OM^2 = \frac{6}{4} - \frac{2}{4} = 1 \Rightarrow SO = 1. \qquad (5)$$

Thay (4), (5) vào (3) ta được $V = \frac{2}{3}$ (đvtt).

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tính thể tích của các khối chóp tứ giác đều trên chúng ta đã thực hiện đúng theo bốn bước được nêu trong phần phương pháp, với lưu ý dạng hình chóp này luôn nhận SO làm đường cao.

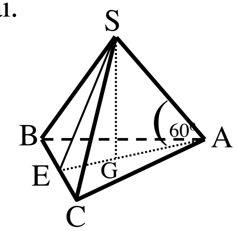
Thí dụ 3. a. *Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng* $\sqrt{3}$ *và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc* 60^0. *Tính thể tích của hình chóp.*

b. *Cho hình chóp tam giác có các cạnh đáy bằng* 6, 8, 10. *Một cạnh bên có độ dài bằng* 4 *và tạo với đáy một góc* 60^0. *Tính thể tích khối chóp.*

✍ *Giải*

a. Xét khối chóp tam giác đều S.ABC thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Gọi G là trọng tâm ΔABC, suy ra $SG \perp (ABC)$ nên:



$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SG = \frac{1}{3}.\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}.SG. \qquad (1)$$

Trong ΔSGA vuông tại G, ta có:

$$SAG = g(SA, (ABC)) = 60^0;$$

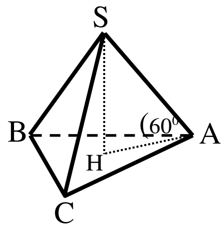
$$SG = AG.\tan SAG = \frac{2}{3}AE.\tan SAG = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2}.\tan 60^0 = \sqrt{3}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$V = \frac{1}{3}.\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4}.\sqrt{3} = \frac{3}{4} \text{ (đvdt).}$$

b. Xét khối chóp tam giác S.ABC thỏa mãn điều kiện đầu bài với AB = 6, AC = 8, BC = 10, SA = 4 và tạo với đáy một góc 60^0.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S xuống (ABC), ta có:



$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH. \qquad (3)$$

Ta lần lượt:

- Trong ΔABC, ta có:

  $$AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 = 10^2 = BC^2$$

  $$\Leftrightarrow \Delta ABC \text{ vuông tại A} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}.6.8 = 24. \qquad (4)$$

- Trong ΔSHA vuông tại H, ta có $SAH = g(SA, (ABC)) = 60^0$ nên:

  $$SH = SA.\sin SAH = 4.\sin 60^0 = 2\sqrt{3}. \qquad (5)$$

Thay (4), (5) vào (3) ta được $V = \frac{1}{3}.24.2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ (đvtt).

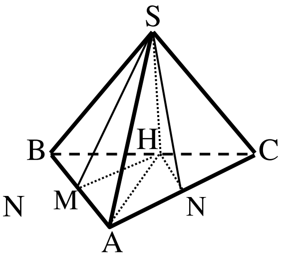
☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tính thể tích của các khối chóp trên chúng ta đã thực hiện đúng theo bốn bước được nêu trong phần phương pháp, tuy nhiên:

- Ở câu a) chúng ta dễ dàng xác định được đường cao (mọi hình chóp đa giác đều có đường cao là đoạn thẳng nối đỉnh với tâm của đáy) và công thức tính diện tích đáy.

- Ở câu b) bằng việc gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) chúng ta đã thực hiện được hai mục đích là "*Xác định được góc giữa* SA *với* (ABC) *và đường cao* SH *của hình chóp*". Ngoài ra, nếu các em học sinh không biết đánh giá để nhận được ΔABC vuông tại A thì cũng có thể tính được diện tích ΔABC bằng công thức Hêrông.

Thí dụ 4. *Cho hình chóp* S.ABC *có đáy* ABC *là một tam giác vuông cân* AB = AC = a. *Mặt bên* (SBC) *vuông góc với mặt đáy* (ABC), *hai mặt bên còn lại đều tạo với đáy một góc* 45^0.

a. *Chứng minh rằng hình chiếu vuông góc của* S *xuống đáy* (ABC) *là trung điểm cạnh* BC.
b. *Tính thể tích hình chóp* S.ABC.



✍ *Giải*

a. Hạ SH vuông góc với BC thì cùng với các điều kiện:

$$\begin{cases}(ABC)\cap(SBC)=BC\\(ABC)\perp(SBC)\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABC).$$

Hạ HM, HN theo thứ tự vuông góc với AB và AC (M, N theo thứ tự sẽ là trung điểm của AB, AC), ta có:

$$SM\perp AB\Rightarrow SMH=45^0,\qquad SN\perp AC\Rightarrow SNH=45^0.$$

Từ đó, ta được:

$$\Delta SHM=\Delta SHN\Rightarrow HM=HN\Rightarrow \Delta BHM=\Delta CHN\Rightarrow HB=HC.$$

Vậy, hình chiếu vuông góc của S xuống (ABC) là trung điểm cạnh BC.

b. Trong ΔSHM vuông tại H, ta có:

$$SMH=45^0\Rightarrow SH=MH=\frac{1}{2}AC=\frac{a}{2}.$$

Từ đó, suy ra:

$$V=\frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a^2}{2}=\frac{a^3}{12}\ \text{(đvtt)}.$$

☞ ***Nhận xét***: a. Trong lời giải trên chúng ta đã sử dụng kết quả:

"*Nếu hai mặt phẳng* (P) *và* (Q) *vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng* a *nào thuộc mặt phẳng* (P), *vuông góc với giao tuyến của* (P) *và* (Q) *sẽ vuông góc với mặt phẳng* (Q)"

để xác định đường cao của hình chóp. Các em học sinh cần nhớ thêm kết quả:

"*Hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba*"

b. Do đặc thù của công thức tính thể tích một khối lăng trụ chúng ta cụ thể năm bước trong dạng toán 1 ở phần mở đầu thành các bước:

Bước 1: Xác định các yếu tố của giả thiết (như khoảng cách, góc giữa đường thẳng với mặt phẳng, góc giữa hai mặt phẳng ...) theo các phương pháp đã biết.

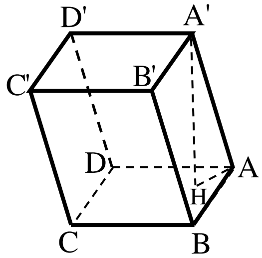
Bước 2: Thiết lập công thức tính cho thể tích V thông qua biểu thức chứa những đoạn thẳng phải tính. (1)

Bước 3: Tính những đoạn thẳng ấy bằng cách sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác, tính chất đồng dạng... (2)

Bước 4: Thay (2) vào (1), ta được giá trị của V.

Thí dụ 5. *Đáy của một hình lăng trụ là một hình thoi cạnh bằng* a *và góc nhọn bằng* α, *cạnh bên có dài bằng* b *và tạo với đáy một góc* β. *Tính thể tích của lăng trụ.*

✍ *Giải*



Gọi h là độ dài đường cao của hộp, ta có:

$V = B.h.$ (1)

Ta lần lượt:

- Diện tích đáy của nó hình hộp được cho bởi:

$$B = 2S_{\Delta ABD} = 2.\frac{1}{2}AB.AD.\sin BAD = a^2.\sin\alpha. \quad (2)$$

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' xuống (ABCD), ta có:

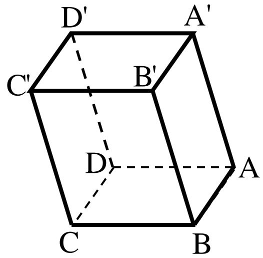
$$A'AH = \beta \Rightarrow h = A'H = A'A.\sin A'AH = b.\sin\beta. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được $V = a^2b.\sin\alpha.\sin\beta$ (đvtt).

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tính được thể tích khối lăng trụ trên chúng ta cần xác định được góc giữa cạnh bên và đáy (góc giữa đường thẳng và mặt phẳng). Với diện tích hình thoi chúng ta đã sử dụng định lí hàm số sin.

Thí dụ 6. *Cho khối lăng trụ tam giác* ABC.A'B'C', *mặt bên* ABB'A' *có diện tích bằng* S. *Khoảng cách giữa cạnh* CC' *và mặt* (ABB'A') *bằng* d. *Tính thể khối tích lăng trụ.*

✍ *Giải*



Ta dựng khối hộp ABCD.A'B'C'D', khi đó:

$$V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{2}S_{ABB_1A_1}.h. \quad (1)$$

trong đó:

$S_{ABB_1A_1} = S.$ (2)

$h = d((CDD_1C_1).(ABB_1A_1)) = d(CC_1.(ABB_1A_1)) = d.$ (3)

Thay (2), (3) vào (1), ta được $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2}Sd$.

Dạng toán 2: Dùng cách tính thể tích để giải toán

Phương pháp

Ta thực hiện theo các bước:

__Bước 1:__ Dùng hai cách để tính thể tích của khối đa diện (H), cụ thể:

$$V_{(H)} = f \text{ và } V_{(H)} = g.$$

__Bước 2:__ Từ đó, suy ra f = g.

Thí dụ 1. *Cho tứ diện* ABCD *có điểm* O *nằm trong tứ diện và cách đều các mặt của tứ diện một khoảng là* r. *Gọi* h_A, h_B, h_C, h_D *lần lượt là khoảng cách từ các điểm* A, B, C, D *đến các mặt đối diện. Chứng minh rằng*:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}.$$

✍ *Giải*

Ta lần lượt có:

$$\frac{V_{O.BCD}}{V_{A.BCD}} = \frac{d(O, (BCD)).S_{\Delta BCD}}{d(A, (BCD)).S_{\Delta BCD}} = \frac{r}{h_A},$$

tương tự, ta có $\frac{V_{O.CDA}}{V_{B.CDA}} = \frac{r}{h_B}$, $\frac{V_{O.DAB}}{V_{C.DAB}} = \frac{r}{h_C}$, $\frac{V_{O.ABC}}{V_{D.ABC}} = \frac{r}{h_D}$.

Từ đó, suy ra:

$$\frac{V_{O.BCD} + V_{O.CDA} + V_{O.DAB} + V_{O.ABC}}{V_{ABCD}} = = \frac{r}{h_A} + \frac{r}{h_B} + \frac{r}{h_C} + \frac{r}{h_D}$$

$$\Leftrightarrow 1 = r\left(\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} + \frac{1}{h_D}, \text{ đpcm.}$$

__Dạng toán 3:__ Tỉ số thể tích

Phương pháp

Để tính tỉ số thể tích hai phần của một khối đa diện (H) được phân chia bởi một mặt phẳng (α) ta lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Dựng thiết diện tạo bởi (α) và (H).

Bước 2: Dùng phương pháp tính thể tích đã biết để tính các thể tích V_1 và V_2 của 2 hình (H_1) và (H_2) của (H) do (α) cắt ra.

Bước 3: Tính $k = \frac{V_1}{V_2}$.

Cách 2: Sử dụng kết quả:

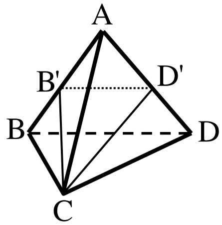
"*Trên ba tia không đồng phẳng* Sx, Sy, Sz *lấy lần lượt các cặp điểm* A *và* A_1, B *và* B_1, C *và* C_1 *khi đó ta luôn có:*

$$\frac{V_{SABC}}{V_{SA_1B_1C_1}} = \frac{SA}{SA_1}.\frac{SB}{SB_1}.\frac{SC}{SC_1}" \qquad (*)$$

☞ ***Chú ý***: Dựa vào kết quả (*) chúng ta nhận thêm được một cách tính thể tích.

Thí dụ 1. *Cho tứ diện* ABCD *có thể tích bằng* V. *Gọi* B' *và* D' *lần lượt là trung điểm của* AB *và* AD. *Mặt phẳng* (CB'D') *chia khối tứ diện thành hai phần. Tính thể tích mỗi phần đó.*

✍ *Giải*



Ta lần lượt có:

$$\frac{V_{A.B'CD'}}{V_{A.BCD}} = \frac{AB'}{AB}.\frac{AC}{AC}.\frac{AD'}{AD} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{AB'CD'} = \frac{V}{4}.$$

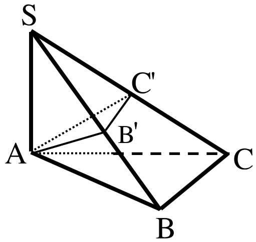
$$V_{CB'D'DB} = V_{ABCD} - V_{AB'CD'} = V - \frac{V}{4} = \frac{3V}{4}.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tính thể tích của các khối đa diện trên chúng ta đã sử dụng tỉ số thể tích. Các thí dụ tiếp theo vẫn minh họa phương pháp này nhưng với độ phức tạp cao hơn.

Thí dụ 2. *Cho hình chóp* S.ABC *có đường cao* SA = a, *đáy là tam giác vuông cân* AB = BC = a. *Gọi* B' *là trung điểm của* SB, C' *là chân đường cao hạ từ* A *của* ΔSAC.

a. *Tính thể tích khối chóp* S.ABC.
b. *Chứng minh rằng* SC *vuông góc với mặt phẳng* (AB'C').
c. *Tính thể tích khối chóp* S.AB'C'.

✍ *Giải*



a. Ta có:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.a.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{6}.$$

b. Ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB'. \qquad (1)$$

Ngoài ra, vì ΔSAB cân tại A nên SB ⊥ AB'. (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$$AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp SC \overset{AC' \perp SC}{\Rightarrow} SC \perp (AB'C'), \text{ đpcm.}$$

c. Sử dụng tỉ số thể tích và hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = 1.\frac{1}{2}.\frac{SC'.SC}{SC^2} = \frac{1}{2}.\frac{SA^2}{SA^2 + AC^2}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{SA^2}{SA^2 + AB^2 + BC^2} = \frac{1}{2}.\frac{a^2}{a^2 + a^2 + a^2} = \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow V_{S.AB'C'} = \frac{1}{6}V_{S.ABC} = \frac{1}{6}.\frac{a^3}{6} = \frac{a^3}{36} \text{ (đvtt).}$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tính thể tích của các khối hộp chóp S.AB'C' chúng ta sử dụng tỉ số thể tích, và trong đó cần một thủ thuật nhỏ để tính tỉ số SC':SC. Trong tr□ờng hợp các em học sinh không biết tới cách giải này thì cần sử dụng ph□ơng pháp truyền thống, cụ thể:

- Sử dụng kết quả câu b) suy ra SC' là đường cao của hình chóp S.AB'C'. Và sử dụng tính chất về quan hệ vuông góc chứng tỏ ΔAB'C' buông tại B'.
  Từ đó, suy ra:
  $$V_{S.AB'C'} = \frac{1}{3}SC'.S_{\Delta AB'C'} = \frac{1}{6}.SC'.AB'.B'C'. \qquad (3)$$
- Tính các độ dài SC', AB', B'C' dựa trên hệ thức lượng trong tam giác vuông và tam giác đồng dạng. (4)
- Thay (4) vào (3) ta nhận được thể tích hình chóp S.AB'C'.

Thí dụ 3. *Cho tứ diện* ABCD *có thể tích* V. *Hãy tính thể tích của hình tứ diện có đỉnh là trọng tâm các mặt của tứ diện đã cho*.

✍ *Giải*

Với tứ diện ABCD, gọi G_1, G_2, G_3, G_4, G theo thứ tự là trọng tâm của ΔABC, ΔABD, ΔACD, ΔBCD và tứ diện ABCD.

Khi đó, với phép vị tự tâm G tỉ số $k = -\frac{1}{3}$, ta có:

$$V_G^{-\frac{1}{3}}(ABCD) = (G_4G_3G_2G_1).$$

Từ đó, suy ra:

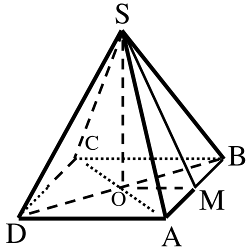
$$\frac{V_{G_1G_2G_3G_4}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow V_{G_1G_2G_3G_4} = \frac{V}{27}.$$

☞ ***Nhận xét***: Nh□ vậy, để tính thể tích của tứ diện $G_1G_2G_3G_4$ chúng ta sử dụng tỉ số thể tích, và trong đó các tỉ số đ□ợc tính bằng việc sử dụng tính chất của phép vị tự.

C. CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC

Ví dụ 1: (Đề thi đại học khối B – 2004): *Cho hình chóp tứ giác đều* SABCD *có cạnh đáy bằng* a, *góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng* φ ($0^0 < φ < 90^0$).

a. *Tính tang của góc giữa hai mặt phẳng* (SAB) *và* (ABCD) *theo* φ.
b. *Tính thể tích khối chóp* SABCD *theo* a *và* φ.



✍ *Giải*

Gọi O là tâm hình vuông ABCD và M là trung điểm AB, ta có ngay:

$$SO \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{SAO} = φ.$$

a. Ta có:

$$SM \perp AB \Rightarrow ((SAB), (ABCD)) = \widehat{SMO}.$$

Trong ΔSAO, ta có $SO = AO.\tan\widehat{SAO} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\tan\varphi$.

Trong ΔSMO, ta có $\tan\widehat{SMO} = \dfrac{SO}{MO} = \sqrt{2}\tan\varphi$.

b. Ta có:

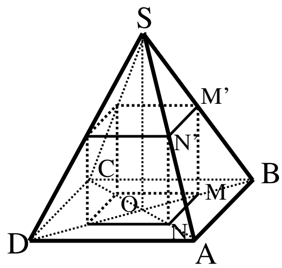
$$V = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.\tan\varphi.$$

Ví dụ 2: *Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng* a *và chiều cao bằng* h. *Tính thể tính hình lập ph□ơng có một mặt thuộc mặt đáy của hình chóp còn mặt đối diện có các đỉnh nằm trên cạnh của hình chóp.*

✍ *Giải*

Với hình chóp S.ABCD (hình bên), ta có AB = a, SO = h.

Gọi x là độ dài cạnh của khối lập ph□ơng nội tiếp hình chóp, ta có:



$$\frac{M'N'}{AB} = \frac{SM'}{SB} = \frac{SB - BM'}{SB} = 1 - \frac{BM'}{SB} = 1 - \frac{MM'}{SO}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{a} = 1 - \frac{x}{h} \Leftrightarrow (a + h)x = ah \Leftrightarrow x = \frac{ah}{a+h}.$$

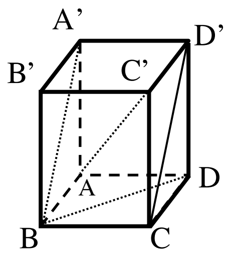
Khi đó, thể tích của khối lập ph□ơng đó là:

$$V = x^3 = \left(\frac{ah}{a+h}\right)^3 \text{ (đvtt).}$$

Ví dụ 3: *Tính thể tích khối hộp chữ nhật* ABCD. A'B'C'D' *có* AB = a, AB *hợp với mặt phẳng* (A'D'CB) *một góc* α *và* $BAC' = \beta$.

✍ *Giải*

Ta có:



$V = AB.BC.AA'$. (1)

Ta lần l□ợt tính các độ dài AA', BC nh□ sau:

- Vì AB hợp với mặt phẳng (A'D'CB) một góc α nên $ABA' = \alpha$, từ đó:

  $AA' = AB.\tan\alpha = a.\tan\alpha$. (2)

- Trong ΔABC_1, ta có:

  $BC' = AB.\tan BAC' = a.\tan\beta$.

  Khi đó, trong ΔBCC_1, ta có:

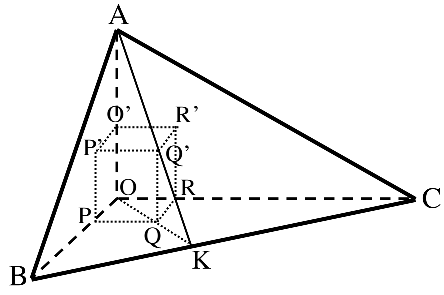
  $BC^2 = C'B^2 - C'C^2 = C'B^2 - A'A^2 = a^2(\tan^2\beta - \tan^2\alpha)$

  $\Leftrightarrow BC = a\sqrt{\tan^2\beta - \tan^2\alpha}$. (3)

Thay (2), (3) vào (1), ta đ□ợc:

$$V = a.\,a\sqrt{\tan^2\beta - \tan^2\alpha}.a.\tan\alpha = a^3.\tan\alpha\sqrt{\tan^2\beta - \tan^2\alpha} \text{ (đvtt).}$$

Ví dụ 4: *Các cạnh bên của hình chóp* O.ABC *đôi một vuông góc với nhau và* OA = a, OB = b, OC = c. *Tính thể tích của khối lập phương nằm trong hình chóp này mà một đỉnh trùng với* O *và ba cạnh cùng xuất phát từ* O *của nó thuộc* OA, OB, OC, *còn đỉnh đối diện với* O *thuộc mặt phẳng* (ABC).



✍ *Giải*

Giả sử hình lập phương OPQR.O'P'Q'R' có cạnh bằng x thỏa mãn điều kiện đầu bài và Q' thuộc mặt phẳng (ABC).

Ta có:

$$V_{O.ABC} = V_{Q'.OAB} + V_{Q'.OBC} + V_{Q'.OAC} \Leftrightarrow \frac{1}{6}abc = \frac{1}{6}xab + \frac{1}{6}xbc + \frac{1}{6}xac$$

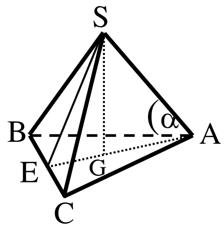
$$\Leftrightarrow abc = x(ab + bc + ac) \Leftrightarrow x = \frac{abc}{ab + bc + ac} \Rightarrow V_{lp} = x^3 = \left(\frac{abc}{ab + bc + ac}\right)^3 \text{ (đvtt).}$$

Ví dụ 5: *Thể tích của hình chóp đều* S.ABC *có* SA = a *và tạo với mặt phẳng đáy một góc* α.

✍ *Giải*

a. Gọi G là trọng tâm ΔABC, suy ra SG ⊥ (ABC) nên:

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SG = \frac{1}{3}.\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}.SG. \qquad (1)$$



Ta lần lượt:

- Trong ΔSGA, ta có $\widehat{SAG} = \alpha$ nên:

  $SG = SA.\sin\widehat{SAG} = a.\sin\alpha.$ (2)

  $AG = SA.\cos\widehat{SAG} = a.\cos\alpha.$

- Trong ΔABC đều, ta có:

$$AG = \frac{2}{3}AE \Leftrightarrow a.\cos\alpha = \frac{2}{3}.\frac{AB\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow AB = a\sqrt{3}.\cos\alpha. \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) ta được:

$$V = \frac{1}{3}.\frac{3a^2\sqrt{3}\cos^2\alpha}{4}.a.\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}a^3.\cos^2\alpha.\sin\alpha \text{ (đvtt).}$$

Ví dụ 6: *Tính thể tích của hình chóp tứ giác đều* S.ABCD, biết:

a. AB = a, *góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng* α.

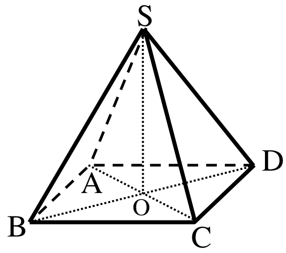
b. AB = a, *góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy bằng* α.

c. *Chiều cao bằng* h *và góc ở đáy của mặt bên bằng* α.

✍ *Giải*

a. Gọi O là tâm của đáy ABCD, suy ra $SO \perp (ABCD)$ nên:

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABCD}.SO = \frac{1}{3}AB^2.SO. \qquad (1)$$



Ta lần l□ợt có:

$$g(SB, (ABCD)) = SBO = \alpha.$$

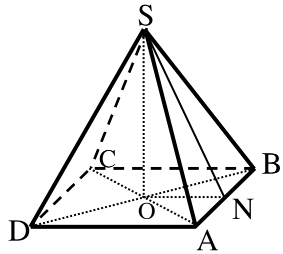
$$SO = BO.\tan SBO = \frac{BD}{2}.\tan\alpha = \frac{a\sqrt{2}.\tan\alpha}{2}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta đ□ợc:

$$V = \frac{1}{3}.a^2.\frac{a\sqrt{2}.\tan\alpha}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}.\tan\alpha}{6} \text{ (đvtt).}$$

b. Gọi O là tâm hình vuông ABCD, suy ra $SO \perp (ABCD)$ nên:

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABCD}.SO = \frac{1}{3}AB^2.SO. \qquad (3)$$



Ta lần l□ợt:

- Gọi N là trung điểm AB, ta có:

  $$g((SABC), (ABCD)) = SNO = \alpha.$$

- Trong ΔSON, ta có:

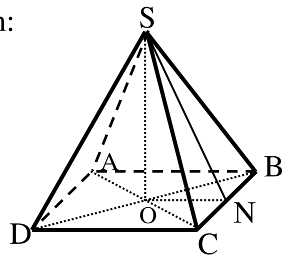
  $$SO = ON.\tan SNO = \frac{a.\tan\alpha}{2}. \qquad (4)$$

Thay (4) vào (3) ta đ□ợc:

$$V = \frac{1}{3}.a^2.\frac{a.\tan\alpha}{2} = \frac{a^3.\tan\alpha}{6} \text{ (đvdt).}$$

c. Gọi O là tâm hình vuông ABCD, suy ra $SO \perp (ABCD)$ nên:

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABCD}.SO = \frac{1}{3}AB^2.h. \qquad (5)$$



Gọi N là trung điểm của BC và a là độ dài cạnh đáy, ta có:

$$SN = BN.\tan SBN = \frac{a.\tan\alpha}{2}.$$

Trong ΔSON vuông tại O, ta có:

$$ON^2 = SN^2 - SO^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} = \frac{a^2.\tan^2\alpha}{4} - h^2 \Leftrightarrow a = \frac{2h}{\sqrt{\tan^2\alpha - 1}}. \qquad (6)$$

Thay (6) vào (5) ta đ□ợc:

$$V = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.h.a^2 = \frac{4h^3}{3(\tan^2\alpha - 1)} \text{ (đvtt).}$$

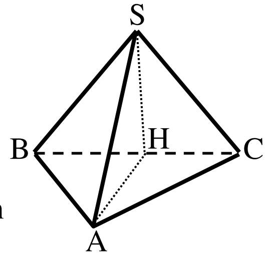
<u>**Ví dụ 7:**</u> *Cho hình chóp* S.ABC *có đáy* ABC *là tam giác cân* AB = AC = a. *Mặt* (SBC) *vuông góc với mặt* (ABC) *và* SA = SB = a.

a. *Chứng minh rằng tam giác* SBC *là tam giác vuông.*

b. *Cho* SC = x, *tính thể tích hình chóp* S.ABC.

✍ *Giải*

a. Hạ AH vuông góc với BC thì H là trung điểm của BC và:



$$\begin{cases}(ABC)\cap(SBC)=BC\\(ABC)\perp(SBC)\end{cases}\Rightarrow AH\perp(SBC).$$

Nhận xét rằng:

$$\Delta HAB=\Delta HAC=\Delta HAS\Rightarrow HB=HC=HS$$

suy ra ΔSBC vuông tại S do có trung thuyến thuộc cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền.

b. Dựa trên các tam giác vuông, ta có:

$$AH^2=AB^2-BH^2=AB^2-\left(\frac{BC}{2}\right)^2=AB^2-\frac{SB^2+SC^2}{4}=\frac{1}{4}(3a^2-x^2)$$

$$\Leftrightarrow AH=\frac{\sqrt{3a^2-x^2}}{2}.$$

Từ đó, suy ra:

$$V=\frac{1}{3}AH.S_{SBC}=\frac{1}{3}AH.\frac{1}{2}SB.SC=\frac{1}{6}.\frac{\sqrt{3a^2-x^2}}{2}.a.x=\frac{ax\sqrt{3a^2-x^2}}{12}.$$

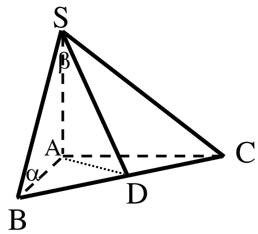
Ví dụ 8: *Cho hình chóp* S.ABC *có hai mặt bên* (SAB) *và* (SAC) *vuông góc với đáy. Đáy* ABC *là một tam giác cân đỉnh* A, *trung tuyến* AD *bằng* a. *Cạnh* SB *tạo với đáy góc* α *và tạo với mặt phẳng* (SAD) *góc* β.

a. *Xác định các góc* α *và* β.

b. *Tính thể tích hình chóp* S.ABC.

✍ *Giải*

a. Từ giả thiết:



$$\begin{cases}(SAB)\perp(ABC)\\(SAC)\perp(ABC)\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABC)\Rightarrow SBA=\alpha.$$

Ta có:

$$\begin{cases}BD\perp AD\\BD\perp SA\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAD)\Rightarrow BSD=\beta.$$

b. Ta có:

$$V=\frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}SA.\frac{1}{2}AD.BC=\frac{1}{3}SA.AD.BD.$$

Đặt SB = x, ta lần l□ợt:

- Trong ΔSAB vuông tại A, ta có:

  $SA=SB.\sin SBA=x.\sin\alpha$; $AB=SB.\cos SBA=x.\cos\alpha$.

- Trong ΔSBD vuông tại D, ta có:

  $BD=SB.\sin BSD=x.\sin\beta$; $SD=SB.\cos BSD=x.\cos\beta$.

- Dựa trên các tam giác vuông, ta có:

$$SB^2 = SD^2 + BD^2 = SA^2 + AD^2 + BD^2 \Leftrightarrow x^2 = x^2.\sin^2\alpha + a^2 + x^2.\sin^2\beta$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta} = \frac{a^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}.$$

Từ đó, suy ra:

$$V = \frac{1}{3}.x.\sin\alpha.a.x.\sin\beta = \frac{1}{3}a.\frac{a^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}.\sin\alpha.\sin\beta = \frac{a^3.\sin\alpha.\sin\beta}{3(\cos^2\alpha-\sin^2\beta)}.$$

Ví dụ 9: *Cho hình chóp* S.ABC *có đáy* ABC *là tam giác vuông cân đỉnh* B *và* $SA \perp (ABC)$, $SB = a$. *Góc giữa hai mặt phẳng* (SBC) *và* (ABC) *bằng* α.

a. *Tính thể tích khối chóp* S.ABC theo a và α.

b. *Hãy tìm* α *để thể tích khối chóp* S.ABC *lớn nhất*.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}AB.BC.SA = \frac{1}{6}AB^2.SA. \quad (1)$$

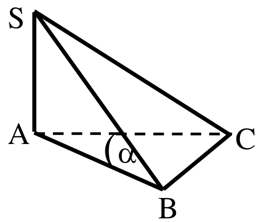
Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow g((SBC), (ABC)) = SBA = \alpha.$$

Trong ΔSAB vuông tại A, ta có:

$$AB = SB.\cos SBA = a.\cos\alpha. \quad (2)$$

$$SA = SB.\sin SBA = a.\sin\alpha. \quad (3)$$



Thay (2), (3) vào (1) ta được:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{6}a^2.\cos^2\alpha.a.\sin\alpha = \frac{a^3}{6}\cos^2\alpha.\sin\alpha \text{ (đvtt).}$$

b. Xét hàm số $y = \cos^2\alpha.\sin\alpha$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, ta có:

$$y' = -2\cos\alpha.\sin\alpha.\sin\alpha + \cos^2\alpha.\cos\alpha = (3\cos^2\alpha - 2)\cos\alpha.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow (3\cos^2\alpha - 2)\cos\alpha = 0 \overset{\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} \cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

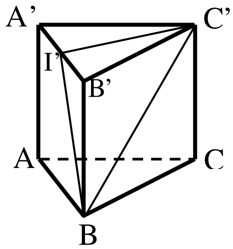
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		$\sqrt{2/3}$		$\pi/2$	$+\infty$
y'			+	0	−		
y		0	↗	CĐ $2/3\sqrt{3}$	↘	0	

Vậy, ta có $\left(V_{S.ABC}\right)_{Max} = \frac{a^3\sqrt{3}}{27}$ đạt được khi $\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ với $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ví dụ 10: *Cho lăng trụ tam giác đều* ABC.A’B’C’, *cạnh đáy bằng* a, BC’ *hợp với mặt bên* (ABB’A’) *một góc* α. *Tính hể tích lăng trụ.*

Giải



Ta có V = $S_{\Delta ABC}$.CC’ = $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.CC'$. (1)

Ta lần lượt:

- Gọi I’ là trung điểm của A’B’, ta có:

$$\begin{cases} C'I' \perp A'B' \\ C'I' \perp BB' \end{cases} \Rightarrow C'I' \perp (ABB'A') \Rightarrow C'BI' = \alpha.$$

- Trong ΔBC’I’, ta có BC’ = $\dfrac{C'I'}{\sin C'BI'} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sin\alpha}$.
- Trong ΔBCC’, ta có:

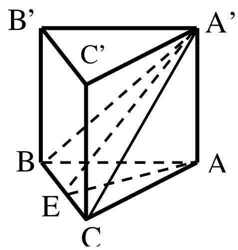
$$C'C^2 = C'B^2 - BC^2 = \frac{3a^2}{4\sin^2\alpha} - a^2 = \frac{a^2(3-4\sin^2\alpha)}{4\sin^2\alpha}$$

$$\Rightarrow CC' = \frac{a\sqrt{3-4\sin^2\alpha}}{2\sin\alpha}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3-4\sin^2\alpha}}{2\sin\alpha} = \frac{a^3}{8}\sqrt{\frac{3\sin 3\alpha}{\sin^3\alpha}} \text{ (đvtt)}.$$

Ví dụ 11: *Đáy của khối lăng trụ đứng tam giác* ABC.A’B’C’ *là tam giác đều. Mặt* (A’BC) *tạo với đáy một góc* α *và tam giác* A’BC *có diện tích bằng* S. *Tính thể tích khối lăng trụ.*



Giải

Ta có:

$$V = S_{\Delta ABC}.A'A = \frac{BC^2\sqrt{3}}{4}.A'A. \qquad (1)$$

Ta lần lượt:

- Gọi E là trung điểm BC, ta có:

AE ⊥ BC ⇒ A’E ⊥ BC (định lí ba đường vuông góc) ⇒ $AEA' = \alpha$.

- Khi đó:

$$S_{\Delta A'BC} = \frac{1}{2}BC.A'E = \frac{1}{2}BC.\frac{AE}{\cos AEA'} = \frac{BC}{2}.\frac{\frac{BC\sqrt{3}}{2}}{\cos AEA'} = \frac{BC^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$$

$$\Leftrightarrow BC = 2\sqrt{\frac{S.\cos\alpha}{\sqrt{3}}}. \qquad (2)$$

$$A'A = AE.\tan AEA' = \frac{BC\sqrt{3}}{2}.\tan AEA' = \sqrt{\sqrt{3}S.\cos\alpha}.\tan\alpha. \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta đ□ợc:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{4S.\cos\alpha}{\sqrt{3}}.\sqrt{\sqrt{3}S.\cos\alpha}.\tan\alpha = S\sqrt{\sqrt{3}S.\cos\alpha}.\sin\alpha \text{ (đvtt).}$$

<u>Ví dụ 12:</u> *Cho lăng trụ tam giác đều* ABC.A'B'C', *cạnh đáy bằng* a. *Mặt phẳng* (ABC') *hợp với mặt phẳng* (BCC'B') *một góc* α. *Gọi* I, J *theo thứ tự là hình chiếu của* A *lên* BC *và* BC'.

a. *Tính số đo góc* AJI.   b. *Tính thể tích hình lăng trụ.*

✍ *Giải*

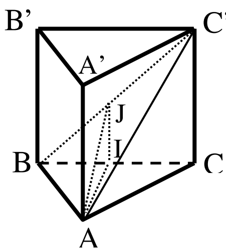
a. Ta có:

$$(ABC') \cap (BCC'B') = BC', \quad \begin{cases} AI \perp BC \\ AI \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AI \perp (BCC'B').$$

Vì AJ vuông góc với BC' thì IJ cũng sẽ vuông góc với BC' (định lí ba đường vuông góc), do đó $((ABC'), (BCC'B')) = AJI = \alpha$.

b. Ta có:

$$V = S_{\Delta ABC}.CC' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.CC'. \qquad (1)$$



Ta lần l□ợt:

- Trong ΔAJI, ta có $IJ = AI.\cot AJI = \dfrac{a\sqrt{3}\cot\alpha}{2}$.
- Trong ΔBCC_1, ta có:

$$CC_1 = BC.\tan CBC_1$$

$$= BC.\frac{IJ}{BJ} = BC.\frac{IJ}{\sqrt{BI^2 - IJ^2}} = \frac{\dfrac{a^2\sqrt{3}\cot\alpha}{2}}{\sqrt{\dfrac{a^2}{4} - \dfrac{3a^2\cot^2\alpha}{4}}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{\tan^2\alpha - 3}}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta đ□ợc:

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{\tan^2\alpha - 3}} = \frac{3a^3}{4\sqrt{\tan^2\alpha - 3}} \text{ (đvtt).}$$

<u>Ví dụ 13:</u> *Cho lăng trụ tứ giác đều* ABCD.A'B'C'D', *đ□ờng cao* h. *Mặt phẳng* (A'BD) *hợp với mặt bên* (ABB'A') *một góc* α. *Tính thể tích lăng trụ.*

✍ *Giải*

Tr□ớc tiên, ta đi xác định góc α, ta có:

$$(A'BD) \cap (ABB'A') = A'B, \quad \begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AD \perp (ABB'A').$$

Hạ AH vuông góc với A'B thì DH cũng sẽ vuông góc với A'B (định lí ba đường vuông góc), do đó:

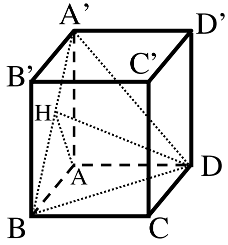
$$((A'BD), (ABB'A')) = AHD = \alpha.$$

Gọi a là cạnh đáy của hình lăng trụ, suy ra:

- Trong ΔHAD, ta có AH = AD.cotα = a.cotα.
- Trong ΔBAA’, ta có:

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{A'A^2}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{a^2.\cot^2\alpha}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{h^2}\ \Rightarrow\ a=h\sqrt{\tan^2\alpha-1}.$$



Từ đó, suy ra:

$$V = S_{ABCD}.AA' = a^2.h = h^3(\tan^2\alpha - 1)\ (\text{đvtt}).$$

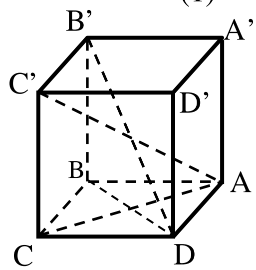
Ví dụ 14: *Cho khối lăng trụ đứng* ABCD.A’B’C’D’ *có* AA’ = h, *đáy là hình bình hành và* $BAD=\alpha$. *Các đ□ờng chéo* AC’ *và* DB’ *lần l□ợt tạo với đáy những góc* α *và* β. *Tính thể tích của khối lăng trụ.*

✍ *Giải*

Ta có:

$$V=S_{ABCD}.AA'=AB.AD.\sin BAD.AA'=h.\sin\alpha.AB.AD.\qquad(1)$$

Ta lần l□ợt:



- Từ giả thiết ta suy ra $C'AC=\alpha$ và $B'DB=\beta$.
- Trong ΔACC’ ta có:

$$AC=CC'.\cot C'AC=h.\cot\alpha.$$

- Trong ΔDBB’ ta có $BD=BB'.\cot B'DB=h.\cot\beta$.
- □p dụng định lý hàm số cosin, ta có:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos\alpha.$$

$$AC^2 = DC^2 + AD^2 - 2DC.AD.\cos(\pi - \alpha) = AB^2 + AD^2 + 2AB.AD.\cos\alpha.$$

Trừ theo vế hai đẳng thức trên, ta đ□ợc:

$$4AB.AD.\cos\alpha = AC^2 - BD^2 = h^2.\cot^2\alpha - h^2.\cot^2\beta$$

$$\Leftrightarrow\ AB.AD=\frac{h^2(\cot^2\alpha-\cot^2\beta)}{4\cos\alpha}.\qquad(2)$$

Thay (2) vào (1), ta đ□ợc:

$$V=h.\sin\alpha.\frac{h^2(\cot^2\alpha-\cot^2\beta)}{4\cos\alpha}==\frac{h^3}{4}.(\cot^2\alpha-\cot^2\beta)\tan\alpha\ \ (\text{đvtt}).$$

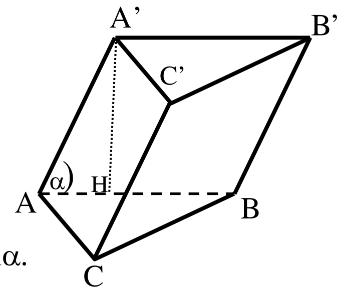
Ví dụ 15: *Cho lăng trụ xiên* ABC.A’B’C’ *đáy* ABC *là tam giác vuông cân đỉnh* A. *Mặt bên* (ABB’A’) *là hình thoi cạnh* a, *nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt bên* (ACC’A’) *hợp với đáy một góc* α. *Tính thể tích lăng trụ.*

✍ *Giải*

Hạ A’H ⊥ AB thì A_1H ⊥ (ABC) nên:

$$V=A'H.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}a^2.A'H.\qquad(1)$$

Ta lần l□ợt:



- Ta có:

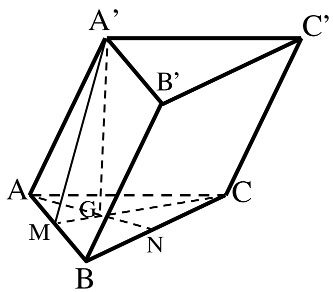
$$\begin{cases} AC \perp AB \\ AC \perp A'H \end{cases} \Rightarrow AC \perp (ABB'A')$$

$$\Rightarrow AC \perp AA' \Rightarrow A'AH = \alpha .$$

- Trong $\Delta A'AH$, ta có $A'H = AA'.\sin A'AH = a.\sin\alpha$.

Thay (2) vào (1), ta đ□ợc $V = \frac{1}{2}a^3.\sin\alpha$.

Ví dụ 16: *Cho lăng trụ xiên* ABC.A’B’C’ *đáy là tam giác đều cạnh* a. *Hình chiếu của* A’ *lên mặt phẳng* (ABC) *trùng với tâm đ□ờng tròn ngoại tiếp* ΔABC. *Cho* $BAA' = 45^0$. *Tính thể tích lăng trụ.*



✍ *Giải*

Gọi G là trọng tâm ΔABC thì $A'G \perp (ABC)$ nên:

$$V = A'G.S_{\Delta ABC} = A'G.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \qquad (1)$$

Ta lần l□ợt:

- Gọi M là trung điểm của AB, ta có:

$\Delta A'AB$ vuông cân tại A’ $\Rightarrow A'M = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$.

- Trong $\Delta A'MG$, ta có:

$$A'G^2 = A'M^2 - MG^2 = A'M^2 - \left(\frac{CM}{3}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{6}$$

$$\Leftrightarrow A'G = \frac{a\sqrt{6}}{6}. \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta đ□ợc:

$$V = \frac{a\sqrt{6}}{6}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{8} \text{ (đvtt)}.$$

Ví dụ 17: *Cho lăng trụ xiên* ABC.A’B’C’ *có đáy* ABC *là tam giác vuông tại* A, AB = a, BC = 2a. *Mặt bên* ABB’A’ *là hình thoi, mặt bên* BCC’B’ *nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, hai mặt này hợp với nhau một góc* α.

a. *Tính khoảng cách từ* A *tới mặt phẳng* (BCC’B’).
b. *Xác định góc* α.
c. *Tính thể tích lăng trụ.*

✍ *Giải*

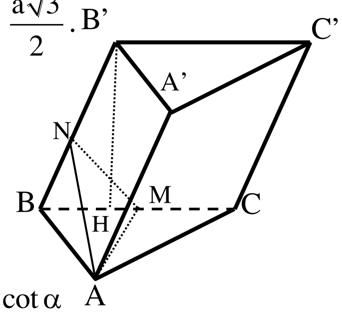
a. Hạ AM vuông góc với BC thì:

$AM \perp (BCC'B') \Rightarrow d(A, (BCC'B')) = AM$.

Trong ΔABC, ta có:

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3}. \qquad (1)$$

$$\frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2} \Leftrightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



b. Kẻ MN vuông góc với BB_1 suy ra $ANM = \alpha$.

c. Hạ B’H ⊥ BC thì B’H ⊥ (ABC) nên:

$$V = B'H.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}B'H.AB.AC. \qquad (2)$$

Ta lần l□ợt:

- Trong ΔAMN, ta có $MN = AM.\ \cot ANM = \dfrac{a\sqrt{3}.\cot\alpha}{2}$.
- Trong ΔABC, ta có:

$$AB^2 = BM.BC \Rightarrow BM = \frac{AB^2}{BC} = \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}.$$

- Từ hai tam giác vuông đồng dạng là ΔBHB_1 và ΔBNM, ta có:

$$\frac{B'H}{MN} = \frac{B'B}{MB} \Rightarrow B'H = \frac{MN.B'B}{MB} = \frac{\dfrac{a\sqrt{3}.\cot\alpha}{2}.a}{\dfrac{a}{2}} = a\sqrt{3}.\cot\alpha. \qquad (3)$$

Thay (1), (3) cùng với AB = a vào (2), ta đ□ợc:

$$V = \frac{1}{2}a\sqrt{3}.\cot\alpha.a.a\sqrt{3} = \frac{3}{2}a^3.\cot\alpha \text{ (đvtt)}.$$

<u>**Ví dụ 18:**</u> *Cho khối hộp* ABCD.A'B'C'D' *có đáy là hình chữ nhật với* AB = a, AD = b *và cạnh bên có độ bằng* c. *Hai mặt bên* (ABB'A') *và* (ADD'A') *lần l□ợt tạo với đáy những góc* α *và* β. *Tnh thể tích khối hộp.*

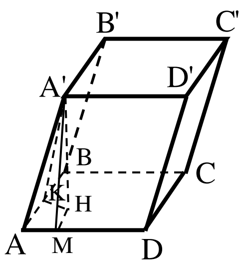
✍ *Giải*

Dựng A'H ⊥ (ABCD) (H ∈ (ABCD)), HK ⊥ AB (K ∈ AB), HM ⊥ AD (M ∈ AD).
Theo định lý 3 đ□ờng vuông góc, ta có:

$$AB \perp A'K \Rightarrow A'KH = \alpha, \qquad AD \perp A'M \Rightarrow A'MH = \beta.$$

Ta có:

$$V = A'H.S_{ABCD} = A'H.AB.AD. \qquad (1)$$



Đặt A'H = x, ta lần l□ợt:

- Trong $\Delta HA'M$, ta có $A'M = \dfrac{A'H}{\sin A'MH} = \dfrac{x}{\sin\beta}$.
- Trong $\Delta MA'A$, ta có:

$$AM = \sqrt{AA'^2 - A'M^2} = \sqrt{c^2 - \frac{x^2}{\sin^2\beta}}.$$

- Trong ΔHA'K, ta có:

$$HK = A'H.\cot A'KH = x.\cot\alpha$$

- Từ nhận xét AMHK là hình chữ nhật, ta có:

$$AM = HK \Leftrightarrow \sqrt{c^2 - \frac{x^2}{\sin^2\beta}} = x.\cot\beta \Leftrightarrow c^2 - \frac{x^2}{\sin^2\beta} = x^2.\cot^2\beta$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\cot^2\beta + \frac{1}{\sin^2\beta}\right) = c^2 \Leftrightarrow x = \frac{c}{\sqrt{\cot^2\alpha + \cot^2\beta + 1}}. \qquad (2)$$

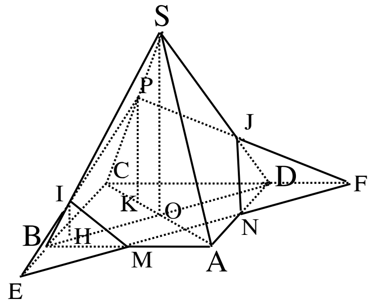
Thay (2) cùng với AB = a, AD = b vào (1), ta được:

$$V = \frac{abc}{\sqrt{\cot^2\alpha + \cot^2\beta + 1}} \text{ (đvtt).}$$

Ví dụ 19: *Cho hình chóp tứ giác đều* S.ABCD. *Gọi* M, N, P *lần lượt là trung điểm của* AB, AD *và* SC.

a. *Dựng thiết diện tạo bởi mặt phẳng* (MNP) *và hình chóp*.

b. *Tính tỉ số thể tích của hai phần hình chóp được phân chia bởi mặt phẳng* (MNP).



✍ *Giải*

a. Ta lần lượt có:

- MN cắt BC, CD theo thứ tự tại E, F.
- PE cắt SB tại I; PF cắt SD tại J.
- Nối IM và JN.

Ta nhận được thiết diện là MNJPI.

b. Đặt SO = h, AB = a và:

$V_1 = V_{S.ABCD}$, $V_2 = V_{SMANJPI}$,

$V_3 = V_{BCDNMIPJ}$, $V_4 = V_{I.BME}$, $V_5 = V_{J.DNF}$, $V_6 = V_{P.CEF}$.

Ta có ngay:

$$V_1 = \frac{1}{3}a^2h.$$

$$V_4 = V_5 = \frac{1}{3}S_{\Delta BME}.IH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}BM.BE.IH = \frac{1}{6}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}.\frac{h}{4} = \frac{a^2h}{96}.$$

$$V_6 = \frac{1}{3}S_{\Delta CEF}.PK = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}CE.CF.PK = \frac{1}{6}.\frac{3a}{2}.\frac{3a}{2}.\frac{h}{2} = \frac{3a^2h}{16}.$$

$$V_3 = V_6 - 2V_4 = \frac{3a^2h}{16} - 2.\frac{a^2h}{96} = \frac{a^2h}{6}.$$

$$V_2 = V_1 - V_3 = \frac{1}{3}a^2h - \frac{a^2h}{6} = \frac{a^2h}{6}.$$

$$\frac{V_2}{V_3} = 1.$$

Vậy, mặt phẳng (A_1EF) chia hình lập phương thành hai phần có thể tích bằng nhau.