CHƯƠNG 06
BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO HÌNH HỌC OXYZ

……………………………………………………………………

Chủ đề 1. Tọa độ của điểm và véc tơ trong không gian

- ❖ Véc tơ trong không gian
- ❖ Véc tơ đồng phẳng
- ❖ Tọa độ của véc tơ
- ❖ Tích có hướng của hai véc tơ và ứng dụng
- ❖ Một số kiến thức khác
- ❖ Bài tập áp dụng – Lời giải chi tiết

Chủ đề 2. Mặt phẳng trong không gian

- ❖ Định nghĩa
- ❖ Các trường hợp riêng của mặt phẳng
- ❖ Vị trí tương đối của hai mặt phẳng
- ❖ Góc giữa hai mặt phẳng
- ❖ Bài tập áp dụng – Lời giải chi tiết

Chủ đề 3. Đường thẳng trong không gian

- ❖ Định nghĩa
- ❖ Vị trí tương đối của hai đường thẳng
- ❖ Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng
- ❖ Khoảng cách
- ❖ Góc giữa hai đường thẳng
- ❖ Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng
- ❖ Bài tập áp dụng – Lời giải chi tiết

Chủ đề 4. Mặt cầu

- ❖ Định nghĩa mặt cầu
- ❖ Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu (S)
- ❖ Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng
- ❖ Bài tập áp dụng – Lời giải chi tiết

CHƯƠNG 06
BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO HÌNH HỌC OXYZ

Phương pháp tọa độ trong không gian hay còn gọi ngắn là hình học $Oxyz$ là chuyên đề cuối cùng trong chương trình toán THPT. Phần này là một phần được đánh giá là không khó, tuy nhiên việc tính toán lại rất dễ sai và ngoài ra số lượng câu hỏi vận dụng cao cũng không phải là ít. Cùng đi ngay vào Chủ đề 1 sau đây:

CHỦ ĐỀ 1.
TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM VÀ VÉCTƠ TRONG KHÔNG GIAN

1. Véc tơ trong không gian

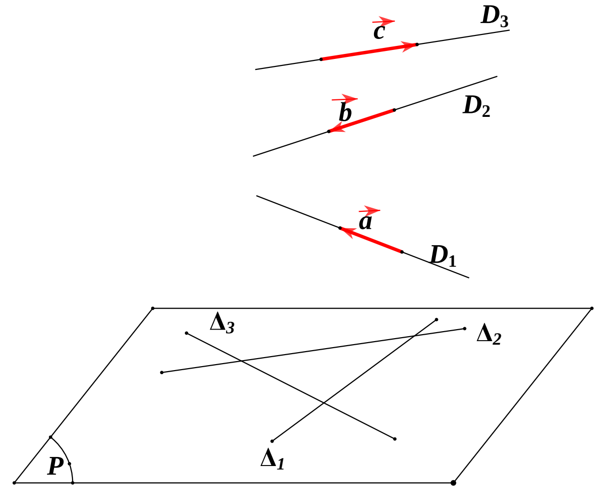
Định nghĩa

Trong không gian, vecto là một đoạn thẳng có định hướng tức là đoạn thẳng có quy định thứ tự của hai đầu

✓ ***Chú ý:*** Các định nghĩa về hai vecto bằng nhau, đối nhau và các phép toán trên các vecto trong không gian được xác định tương tự như trong mặt phẳng.

2. Vecto đồng phẳng

A. Định nghĩa: Ba vecto $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ khác $\vec{0}$ gọi là đồng phẳng khi giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.



✓ ***Chú ý***:

✓

- n vecto khác $\vec{0}$ gọi là đồng phẳng khi giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.
- Các giá của các vecto đồng phẳng có thể là các đường thẳng chéo nhau.

B. Điều kiện để 3 vecto khác $\vec{0}$ đồng phẳng

Định lý 1:

$\boxed{\vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ đồng phẳng } \Leftrightarrow \exists m,n \in \mathbf{R}:\ \vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}}$

C. Phân tích một vecto theo ba vecto không đồng phẳng

✓ Định lý 2: Cho 3 vecto $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ không đồng phẳng. Bất kì một vecto $\vec{a}$ nào trong không gian cũng có thể phân tích theo ba vecto đó, nghĩa la có một bộ ba số thực (x_1, x_2, x_3) duy nhất

$\vec{a} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3}$

✓ ***Chú ý***: Cho vecto $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ khác $\vec{0}$:

1. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng nếu có ba số thực m,n,p không đồng thời bằng 0 sao cho: $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = 0$
2. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng nếu từ $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = 0 \Rightarrow m = n = p = 0$

3. Tọa độ của vecto

Trong không gian xét hệ trục $Oxyz$, có trục Ox vuông góc với trục Oy tại O, và trục Oz vuông góc với mặt phẳng (Oxy) tại O. Các vecto đơn vị trên từng trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $\vec{i} = (1;0;0), \vec{j} = (0;1;0), \vec{k} = (0;0;1)$.

1. $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)\Leftrightarrow \vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$
2. $M(x_M,y_M,z_M)\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=x_M\vec{i}+y_M\vec{j}+z_M\vec{k}$
3. Cho $A(x_A,y_A,z_A),B(x_B,y_B,z_B)$ ta có:

   $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$ và $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.
4. M là trung điểm AB thì $M\left(\frac{x_B+x_A}{2};\frac{y_B+y_A}{2};\frac{z_B+z_A}{2}\right)$
5. Cho $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ ta có:
   - $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\\a_3=b_3\end{cases}$
   - $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1;a_2\pm b_2;a_3\pm b_3)$
   - $k.\vec{a}=(ka_1;ka_2;ka_3)$
   - $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a};\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$
   - $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$
   - $\cos\varphi=\cos(\vec{a};\vec{b})=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$ (với $\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$)
   - $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc : $\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$
   - $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương: $\Leftrightarrow \exists k\in R:\vec{a}=k\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=kb_1\\a_2=kb_2\\a_3=kb_3\end{cases}$

4 . Tích có hướng và ứng dụng

Tích có hướng của $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ là:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}a_2a_3\\b_2b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3a_1\\b_3b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1a_2\\b_1b_2\end{vmatrix}\right)=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$$

1. **Tính chất:**
   - $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{a},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{b}$
   - $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=|\vec{a}|.|\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$
   - $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$
   - $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0$
2. **Các ứng dụng tích có hướng**
   - Diện tích tam giác: $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$
   - Thể tích tứ diện $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$
   - Thể tích khối hộp : $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$

5 . Một số kiến thức khác

1. Nếu M chia đoạn AB theo tỉ số $k\left(\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}\right)$ thì ta có:

$x_M = \frac{x_A - kx_B}{1-k}; y_M = \frac{y_A - ky_B}{1-k}; z_M = \frac{z_A - kz_B}{1-k}$ với $k \neq 1$

2. G là trọng tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$

3. G là trọng tâm tứ diện $ABCD \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Cho 4 điểm $S(1,2,3); A(2,2,3); B(1,3,3); C(1,2,4)$. $SABC$ là:

A . Tứ diện
B. Hình chóp đều
C. Tứ diện đều
D. Hình thang vuông

Lời giải

$\overrightarrow{AB} = (-1;1;0); \overrightarrow{BC} = (0;-1;1); \overrightarrow{AC} = (-1;0;1)$

$\Rightarrow AB = BC = CA = \sqrt{2} \Rightarrow ABC$ là tam giác đều

$\overrightarrow{SA} = (1;0;0); \overrightarrow{SB} = (0;1;0); \overrightarrow{SC} = (0;0;1) \Rightarrow SA = SB = SC = 1$

$$D(SA, SB, SC) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Hay ta có thể tính $\left[\overrightarrow{SA}; \overrightarrow{SB}\right]\overrightarrow{SC} \neq \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$ không đồng phẳng.

$\Rightarrow SABC$ là hình chóp đều , đỉnh S.

Chọn B.

Bài 2: Cho bốn điểm $S(1,2,3); A(2,2,3); B(1,3,3); C(1,2,4)$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA và AB.SMNP là:

A . Hình chóp
B. Hình chóp đều
C. Tứ diện đều
D. Tam diện vuông

Lời giải

Tam giác: ABC có $AB = BC = CA = \sqrt{2}$

$\Rightarrow MN = NP = PM = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\overrightarrow{SA} = (1;0;0); \overrightarrow{SB} = (0;1;0); \overrightarrow{SC} = (0;0;1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} = 0 \Rightarrow SA \perp SB$

Tương tự $SA \perp SC, SB \perp SC$

Các tam giác vuông SAB, SBC, SCA vuông tại S, có các trung tuyến:

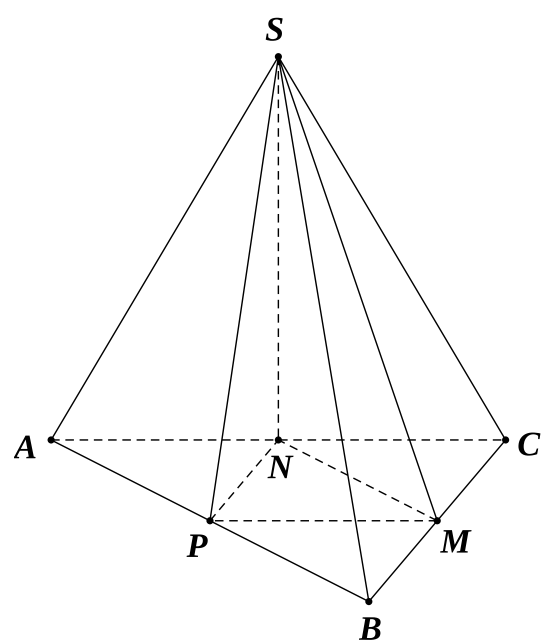
$SP = SM = SN = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = MN = NP = PM$

Ta có: $SP \subset (SAB); SM \subset (SBC); SN \subset (SCA)$

$\Rightarrow \overrightarrow{SP}, \overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SN}$ không đồng phẳng

$\Rightarrow SMNP$ là tứ diện đều.

Chọn C.



Bài 3: Cho bốn điểm $S(1,2,3); A(2,2,3); B(1,3,3); C(1,2,4)$. Xác định tọa độ trọng tâm G của hình chóp $SABC.$

A. $(5,9,13)$ **B.** $\left(\frac{5}{3},3,\frac{13}{3}\right)$ **C.** $\left(1,\frac{7}{4},\frac{9}{4}\right)$ **D.** $\left(\frac{5}{4},\frac{9}{4},\frac{13}{4}\right)$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OS}$

$$\Rightarrow G\begin{cases} x=\frac{1}{4}(2+1+1+1)=\frac{5}{4} \\ y=\frac{1}{4}(2+3+2+2)=\frac{9}{4} \\ z=\frac{1}{4}(3+3+4+3)=\frac{13}{4} \end{cases}$$

Chọn D.

Bài 4: Cho 3 vectơ $\vec{a}=(1,1,-2);\vec{b}=(2,-1,2);\vec{c}=(-2,3,-2)$. Xác định vec tơ $\vec{d}$ thỏa mãn $\vec{a}.\vec{d}=4;\vec{b}.\vec{d}=5;\vec{c}.\vec{d}=7.$

A. $(3,6,5)$ **B.** $(-3,6,-5)$ **C.** $\left(\frac{3}{2},6,\frac{5}{2}\right)$ **D.** $\left(3,6,\frac{5}{2}\right)$

Lời giải

$$\begin{cases} \vec{a}.\vec{d}=4 \\ \vec{b}.\vec{d}=5 \\ \vec{c}.\vec{d}=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z=4 & (1) \\ 2x-y+2z=5 & (2) \\ -2x+3y-2z=7 & (3) \end{cases}$$

$(1)+(2): 3x=9 \Leftrightarrow x=3$ và $(2)+(3): 2y=12 \Leftrightarrow y=6$

$(1): z=\frac{1}{2}(x+y+4)=\frac{1}{2}(3+6-4)=\frac{5}{2} \Rightarrow \vec{d}=\left(3;6;\frac{5}{2}\right)$

Chọn D.

Bài 5: Cho khối tứ diện $ABCD.$ Nếu $\overrightarrow{AB}=\vec{a};\overrightarrow{AC}=\vec{b};\overrightarrow{AD}=\vec{c}.$ Gọi M là trung điểm của BC thì:

A. $\overrightarrow{DM}=\frac{\vec{a}+\vec{c}-2\vec{b}}{2}$ **B.** $\overrightarrow{DM}=\frac{\vec{b}+\vec{c}-2\vec{a}}{2}$

C. $\overrightarrow{DM}=\frac{\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}}{2}$ **D.** $\overrightarrow{DM}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}}{2}$

Lời giải

$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DM}=-\vec{c}+\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}}{2}$

Chọn C.

Bài 6: Cho khối tứ diện $ABCD.$ Nếu $\overrightarrow{AB}=\vec{b};\overrightarrow{AC}=\vec{c};\overrightarrow{AD}=\vec{d}.$ Gọi G là trọng tâm tam giác BCD thì:

A. $\overrightarrow{AG}=\frac{\vec{b}+\vec{d}+\vec{c}}{4}$ **B.** $\overrightarrow{AG}=\frac{\vec{b}+\vec{d}+\vec{c}}{3}$

C. $\overrightarrow{AG}=\frac{\vec{b}+\vec{d}+\vec{c}}{2}$ **D.** $\overrightarrow{AG}=\vec{b}+\vec{d}+\vec{c}$

Lời giải

Gọi G là trọng tâm tam giác BCD nên:

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\vec{b}+\overrightarrow{BG}\quad (1)$

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}=\vec{c}+\overrightarrow{CG}\quad (2)$

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}=\vec{d}+\overrightarrow{DG}\quad (3)$

Từ $(1);(2);(3)$ suy ra: $3\overrightarrow{AG}=\vec{b}+\vec{d}+\vec{c}+\vec{0}=\vec{b}+\vec{d}+\vec{c}\Rightarrow \overrightarrow{AG}=\dfrac{\vec{b}+\vec{d}+\vec{c}}{3}$

Chọn B.

Bài 7: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương, khi đó:

A. $\overrightarrow{AO}=\dfrac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}}{3}$

B. $\overrightarrow{AO}=\dfrac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}}{4}$

C. $\overrightarrow{AO}=\dfrac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}}{2}$

D. $\overrightarrow{AO}=\dfrac{2\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}\right)}{3}$

Lời giải

$\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC'}=\dfrac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}}{2}$.

Chọn C.

Bài 8: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là tâm của mặt $(CDD'C')$, khi đó:

A. $\overrightarrow{AI}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}}{2}+\overrightarrow{AD}$

B. $\overrightarrow{AI}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{2}+\overrightarrow{AA'}$

C. $\overrightarrow{AI}=\dfrac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}}{2}+\overrightarrow{AB}$

D. $\overrightarrow{AI}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}}{2}$

Lời giải

O là tâm hình lập phương $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{IO}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}}{2}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}}{2}+\overrightarrow{AD}$.

Chọn A.

Bài 9: Cho khối tứ diện $ABCD$. Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của AC,BD. Tìm hệ thức đúng:

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=4\overrightarrow{PQ}$

B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{PQ}$

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{PQ}$

D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{PQ}$

Lời giải

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AQ}$

$+$

$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{CQ}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=2\left(\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{CQ}\right)=2\left(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PQ}\right)=2\left(2\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{CP}\right)=4\overrightarrow{PQ}$

Chọn A.

Bài 10: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm hệ thức sai:

A. $\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{CA'}+2\overrightarrow{C'C}=0$

B. $\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{A'C}=2\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{AA'}$

D. $\overrightarrow{CA'}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CC'}$

Lời giải

O là tâm hình hộp

$\overrightarrow{AC'} = 2\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{OC'}; \overrightarrow{CA'} = 2\overrightarrow{CO} \Rightarrow \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} = 2\left(\overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{CO}\right) = 2\overrightarrow{CC'}$

$\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{A'C} + 2\overrightarrow{C'C} = 2\overrightarrow{CC'} + 2\overrightarrow{C'C} = \vec{0}$

$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AC'} = 2\overrightarrow{AO}\\ \overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{OC}\end{array}\right\} \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{A'C} = 2\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}\right) = 2\overrightarrow{AC}$

Vậy C sai.

Chọn C.

Bài 11: Cho tứ diện $ABCD.M, N$ lần lượt là trung điểm $AC, BD.$ Chọn hệ thức sai:

A. $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN}$
B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{MN}$
C. $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{MN}$
D. $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{MN}$

Lời giải

$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN}$ (hệ thức trung điểm). Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của $AD, BC \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành:

$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MN}$

$\begin{cases}\overrightarrow{MP} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}\\ \overrightarrow{MQ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MN} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{MN}$

$\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{MN} \qquad (C\ sai)$

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{MN}$

Chọn C.

Bài 12: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D', A'C \cap \left(A'BD\right) = E, AC' \cap \left(CB'D'\right) = F.$ Xác định hệ thức sai:

A. $\overrightarrow{EA'} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED} = \vec{0}$
B. $\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FD'} + \overrightarrow{FB'} = \vec{0}$
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AC'}$
D. $\overrightarrow{EF} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC'}$

Lời giải

Gọi I, I' là các giao điểm của các đường chéo ở 2 mặt đáy AC' cắt các trung tuyến $A'I$ của tam giác $A'BD$ và trung tuyến CI' (của tam giác $CB'D'$) tại E và F.

$\dfrac{EI}{A'I} = \dfrac{\text{IF}}{FC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow E, F$ là trọng tâm của tam giác $A'BD; CB'D'.$

Chọn A, B đúng.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AC'}.$ C sai

$AE = EF = FC' = \dfrac{1}{3}AC' \Rightarrow \overrightarrow{EF} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC'}.$ D đúng.

Chọn D.

Bài 13: Cho khối tứ diện $ABCD, G$ là trọng tâm của tứ diện, A' là trọng tâm tam giác $BCD.M$ là 1 điểm tùy ý trong không gian. Chọn hệ thức đúng:

A. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GA'}$
B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$
C. $\overrightarrow{AA'} = 3\overrightarrow{AG}$
D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$

Lời giải

Gọi B' là trọng tâm tam giác $ACD,$ hai trung tuyến $\text{AA'}; \text{BB'}$ cắt nhau tại $G, \Delta GA'B'$ đồng dạng $\Delta GAB.$

$$\Rightarrow \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'M}{BM}=\frac{1}{3}\Rightarrow GA'=\frac{1}{3}GA\Rightarrow \overrightarrow{AA'}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AG}$$

$$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'C}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{A'D}$$

$$=3\overrightarrow{GA'}+\underbrace{\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}+\overrightarrow{A'D}}=3\overrightarrow{GA'}+\vec{0}=3\overrightarrow{GA'}$$

$$3\overrightarrow{GA'}=-\overrightarrow{GA}\Rightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GD}$$

$$=4\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=4\overrightarrow{MG}$$

Chọn C.

Bài 14: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn hệ thức sai:

A. $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC'}$

B. $\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{A'C}$

C. $\overrightarrow{C'D'}+\overrightarrow{C'B'}+\overrightarrow{C'C}=\overrightarrow{C'A}$

D. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{D'B}$

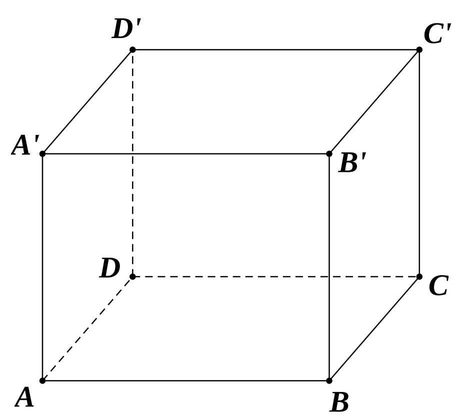
Lời giải

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C}$$

$$\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{A'C'}+\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{A'C}$$

$$\overrightarrow{C'D'}+\overrightarrow{C'B'}+\overrightarrow{C'C}=\overrightarrow{C'A'}+\overrightarrow{C'C}=\overrightarrow{C'A}$$

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD'}$$



Chỉ có hệ thức D sai.

Chọn D.

CHỦ ĐỀ 2.
MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

1. Định nghĩa

Trong không gian $Oxyz$ phương trình dạng $Ax+By+Cz+D=0$ với $A^2+B^2+C^2>0$ được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

- Phương trình mặt phẳng (P):Ax+By+Cz+D=0 với $A^2+B^2+C^2>0$ có vec tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$.
- Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và nhận vecto $\vec{n}=(A;B;C),\vec{n}\neq\vec{0}$ làm vecto pháp tuyến dạng $(P): A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$
- Nếu (P) có cặp vecto $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3);\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ không cùng phương, có giá song song hoặc nằm trên (P). Thì vecto pháp tuyến của (P) được xác định $\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]$.

2 . Các trường hợp riêng của mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$ cho mp (α):Ax+By+Cz+D=0, với $A^2+B^2+C^2>0$. Khi đó:

- $D=0$ khi và chỉ khi (α) đi qua gốc tọa độ.
- $A=0,B\neq 0,C\neq 0,D\neq 0$ khi và chỉ khi (α) song song trục Ox.
- $A=0,B=0,C\neq 0,D\neq 0$ khi và chỉ khi (α) song song mặt phẳng (Oxy).
- $A,B,C,D\neq 0$. Đặt $a=-\dfrac{D}{A},b=-\dfrac{D}{B},c=-\dfrac{D}{C}$. Khi đó : $(\alpha):\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{c}{z}=1$

3 . Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$ cho (α):Ax+By+Cz+D=0 và (α'):A'x+B'y+C'z+D'=0

- (α) cắt (α') $\Leftrightarrow\begin{cases}AB'\neq A'B\\BC'\neq B'C\\CB'\neq C'B\end{cases}$
- (α) // (α') $\Leftrightarrow\begin{cases}AB'=A'B\\BC'=B'C\\CB'=C'B\end{cases}$ $va\ AD'\neq A'D$
- $(\alpha)\equiv(\alpha')$ $\Leftrightarrow\begin{cases}AB'=A'B\\BC'=B'C\\CB'=C'B\\AD'=A'D\end{cases}$

Đặt biệt: $(\alpha)\perp(\alpha')\Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0\Leftrightarrow A.A'+B.B'+C.C'=0$

4 . Góc giữa hai mặt phẳng

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $\left(0^0\le\varphi\le 90^0\right)$

(P):Ax+By+Cz+D=0 và (Q):A'x+B'y+C'z+D'=0

$$\cos\varphi=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{n_Q}\right|}=\frac{|A.A'+B.B'+C.C'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

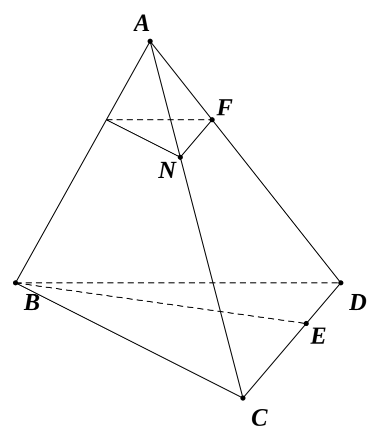
BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Cho tứ giác $ABCD$ có $A(0;1;-1);B(1;1;2);C(1;-1;0);D(0;0;1)$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) qua A,B và chia tứ diện thành hai khối $ABCE$ và $ABDE$ có tỉ số thể tích bằng 3.

A. $15x-4y-5z-1=0$ **B.** $15x+4y-5z-1=0$

C. $15x+4y-5z+1=0$ **D.** $15x-4y+5z+1=0$

Lời giải



(P) cắt cạnh CD tại E,E chia đoạn CD theoo tỷ số -3

$$\Rightarrow E\begin{cases}x=\dfrac{x_C+3x_D}{4}=\dfrac{1+3.0}{4}=\dfrac{1}{4}\\ y=\dfrac{y_C+3y_D}{4}=\dfrac{-1+3.0}{4}=\dfrac{-1}{4}\\ z=\dfrac{z_C+3z_D}{4}=\dfrac{0+3.1}{4}=\dfrac{3}{4}\end{cases}$$

$\overrightarrow{AB}=(1;0;3);\overrightarrow{AE}=\left(\frac{1}{4};-\frac{5}{4};\frac{7}{4}\right)=\frac{1}{4}(1;-5;7)$

Vecto pháp tuyến của

$(P):\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right]=(15;-4;-5)\Rightarrow(P):(x-0)15+(y-1)(-4)+(z+1)(-5)=0\Leftrightarrow 15x-4y-5z-1=0$

Chọn A.

Bài 2: Cho tứ giác $ABCD$ có $A(0;1;-1);B(1;1;2);C(1;-1;0);D(0;0;1)$. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (BCD) và chia tứ diện thành hai khối $AMNF$ và $MNFBCD$ có tỉ số thể tích bằng $\frac{1}{27}$.

A. $3x-3z-4=0$ **B.** $y-z-1=0$

C. $y+z-4=0$ **D.** $4x+3z+4=0$

Lời giải

Tỷ số thể tích hai khối $AMNF$ và $MNFBCD$: $\left(\frac{AM}{AB}\right)^3=\frac{1}{27}$

$\Rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{1}{3}\Rightarrow M$ chia cạnh AB theo tỉ số -2

$$\Rightarrow E\begin{cases} x=\dfrac{1+2.0}{3}=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{1+2.1}{3}=1 \\ x=\dfrac{2+2(-1)}{3}=0 \end{cases};\overrightarrow{BC}=-2(0;1;1);\overrightarrow{BD}=-(1;1;1)$$

Vecto pháp tuyến của $(Q):\vec{n}=(0;1;-1)$

$\Rightarrow M\in(Q)\Rightarrow(Q):\left(x-\dfrac{1}{3}\right)0+(y-1)1+(z-0)(-1)=0$

$\Rightarrow(P): y-z-1=0$

Chọn B.

Bài 3: Từ gốc O vẽ OH vuông góc với mặt phẳng $(P),(OH=p)$; gọi α,β,γ lần lượt là các góc tạo bởi vec tơ pháp tuyến của (P) với ba trục Ox, Oy, Oz. Phương trình của (P) là:

A. $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ **B.** $x\sin\alpha+y\sin\beta+z\sin\gamma-p=0$

C. $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma+p=0$ **D.** $x\sin\alpha+y\sin\beta+z\sin\gamma+p=0$

Lời giải

$H(p\cos\alpha, p\cos\beta, c\cos\gamma)\Rightarrow\overrightarrow{OH}=(p\cos\alpha, p\cos\beta, c\cos\gamma)$

Gọi: $M(x,y,z)\in(P)\Rightarrow\overrightarrow{HM}=(x-p\cos\alpha, y-p\cos\beta, z-c\cos\gamma)$

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{HM}$

$\Leftrightarrow(x-p\cos\alpha)p\cos\alpha+(y-p\cos\beta)p\cos\beta+(z-c\cos\gamma)p\cos\gamma$

$\Leftrightarrow(P): x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$

Chọn A.

Bài 4: Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) cắt hai trục $y'Oy$ và $z'Oz$ tại $A(0,-1,0), B(0,0,1)$ và tạo với mặt phẳng (yOz) một góc 45^0.

A. $\sqrt{2}x-y+z-1=0$ **B.** $\sqrt{2}x+y-z+1=0$

C. $\sqrt{2}x+y-z+1=0;\sqrt{2}x-y+z+1=0$ **D.** $\sqrt{2}x+y-z+1=0;\sqrt{2}x-y+z-1=0$

Lời giải

Gọi $C(a,0,0)$ là giao điểm của (P) và trục $x'\mathrm{Ox}$

$\Rightarrow\overrightarrow{BA}=(0,-1,-1);\overrightarrow{BC}=(a,0,-1)$

Vec tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]=(1,-a,a)$

Vec tơ pháp tuyến của (yOz) là: $\overrightarrow{e_1}=(1,0,0)$

Gọi α là góc tạo bởi (P) và $(yOz)\Rightarrow c\mathrm{os}45^0=\dfrac{1}{\sqrt{1+2a^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 4a^2=2\Leftrightarrow a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy có hai mặt phẳng $(P):\pm\sqrt{2}x-y+z=1\Rightarrow\sqrt{2}x+y-z+1=0;\sqrt{2}x-y+z-1=0$

Chọn D.

Bài 5: Cho mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(3,0,4), B(-3,0,4)$ và hợp với mặt phẳng (xOy) một góc 30^0 và cắt $y'Oy$ tại C. Tính khoảng cách từ O đến (P).

A. $4\sqrt{3}$ **B.** $\sqrt{3}$ **C.** $3\sqrt{3}$ **D.** $2\sqrt{3}$

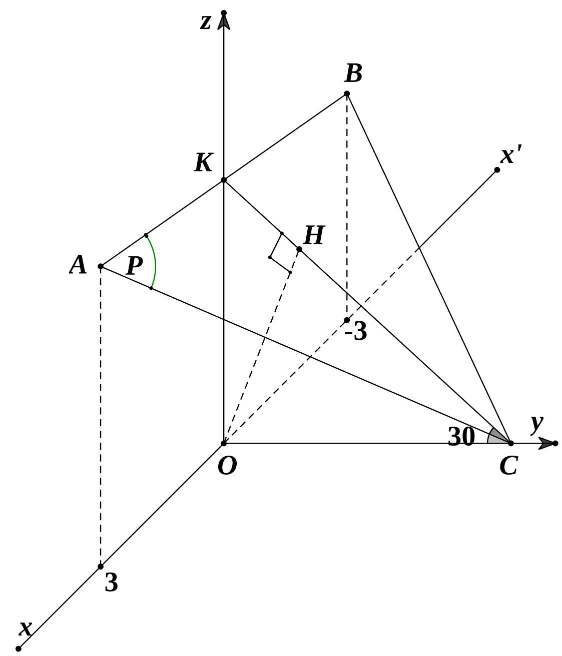
Lời giải

Vẽ $OH \perp KC$ với K là giao điểm của AB và trục $z'Oz$.

Ta có: $\hat{C} = 30^0 \Rightarrow \hat{K} = 60^0; OK = 4$

$\Rightarrow d(O,P) = OH = OK.\sin 60^0$

$= 4.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$



Chọn D.

Bài 6: Cho mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(3,0,4), B(-3,0,4)$ và hợp với mặt phẳng (xOy) một góc 30^0 và cắt $y'Oy$ tại C. Viết phương trình tổng quát mặt phẳng (P).

A. $y + \sqrt{3}z + 4\sqrt{3} = 0$ **B.** $y + \sqrt{3}z - 4\sqrt{3} = 0$

C. $y \pm \sqrt{3}z \pm 4\sqrt{3} = 0$ **D.** $x - y - \sqrt{3}z - 4\sqrt{3} = 0$

Lời giải

$C(0,c,0); \overrightarrow{AC} = (-3,c,-4); \overrightarrow{AB} = (-6,0,0)$

Vec tơ pháp tuyến của $(P): \vec{n} = \left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right] = 6(0,4,c)$

Vec tơ pháp tuyến của $(xOz): \overrightarrow{e_3} = (0,0,1)$

$\cos 30^0 = \dfrac{|c|}{\sqrt{16+c^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow c^2 = 48 \Leftrightarrow c = \pm 4\sqrt{3} \Rightarrow \vec{n} = 6\left(0,4,\pm 4\sqrt{3}\right)$

$\Rightarrow (P): (x-3).0 + (y-0)4 + (z-4)\left(\pm 4\sqrt{3}\right) = 0 \Leftrightarrow y \pm z\sqrt{3} \pm 4\sqrt{3} = 0$

Chọn C.

Bài 7: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 1 = 0, A(8;-7;4), B(-1;2;-2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA^2 + 2MB^2$ nhỏ nhất.

A. $M(0;0;-1)$ **B.** $M(0;0;1)$ **C.** $M(1;0;1)$ **D.** $M(0;1;0)$

Lời giải

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = 0 \Rightarrow I(2;-1;0)$

Có $MA^2 + 2MB^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = 3MI^2 + IA^2 + 2IB^2$

Vì IA, IB không đổi nên $\left(MA^2 + 2MB^2\right)_{\min} \Leftrightarrow MI_{\min} \Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P).

Đường thẳng d đi qua I và vuông góc với (P).

$\Rightarrow d:\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1-t;d\cap(P)=M(0;0;-1) \\ z=t \end{cases}$

Chọn A.

Bài 8: Cho 2 điểm $A(0,0,-3), B(2,0,-1)$ và mặt phẳng $(P): 3x-8y+7z-1=0.$ Tìm $M\in(P)$ sao cho MA^2+2MB^2 nhỏ nhất.

A. $M\left(\frac{283}{183};\frac{-104}{183};\frac{-214}{183}\right)$ **B.** $M\left(\frac{-283}{183};\frac{104}{183};\frac{-214}{183}\right)$ **C.** $M\left(\frac{283}{183};\frac{-14}{183};\frac{-14}{183}\right)$ **D.** $M\left(\frac{283}{183};\frac{14}{183};\frac{14}{183}\right)$

Lời giải

Gọi I sao cho $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=0\Rightarrow I\left(\frac{4}{3};0;\frac{5}{3}\right)$

$$MA^2=\overrightarrow{MA}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2=MI^2+IA^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}$$

$$MB^2=\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=MI^2+IB^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}$$

$$MA^2+2MB^2=3MI^2+IA^2+2IB^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=3MI^2+IA^2+2IB^2$$

Suy ra $\left(MA^2+2MB^2\right)_{\min}$ khi MI bé nhất hay M là hình chiếu của I trên (P).

Tìm được tọa độ $M\left(\frac{283}{183};\frac{-104}{183};\frac{-214}{183}\right)$.

Chọn A.

Bài 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz,$ cho mặt phẳng $(Q): x+y+z=0$ và hai điểm $A(4,-3,1), B(2,1,1).$ Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (Q) sao cho tam giác ABM vuông cân tại M.

A. $\left[\begin{array}{l} M(1;-2;1) \\ M\left(\frac{17}{7};-\frac{9}{7};-\frac{8}{7}\right) \end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l} M(1;2;1) \\ M\left(\frac{17}{7};\frac{9}{7};\frac{8}{7}\right) \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} M(-1;2;1) \\ M\left(\frac{13}{7};-\frac{5}{7};-\frac{9}{7}\right) \end{array}\right.$

D. $\left[\begin{array}{l} M(1;1;1) \\ M\left(\frac{9}{7};-\frac{9}{7};-\frac{8}{7}\right) \end{array}\right.$

Lời giải

Gọi $M(a,b,c).M\in(Q)\Rightarrow a+b+c=0\ (1).$

Tam giác ABM cân tại M khi và chỉ khi :

$AM^2=BM^2\Leftrightarrow(a-4)^2+(b+3)^2+(c-1)^2=(a-2)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\Leftrightarrow -a+2b+5=0\ \ (2)$

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} a+b+c=0 \\ -a+2b+5=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=2b+5 \\ c=-5-3b \end{cases}\quad(*)$

Trung điểm AB là $I(3;-1;1).$ Tam giác ABM cân tại $M,$ suy ra:

$MI=\frac{AB}{2}\Leftrightarrow(a-3)^2+(b+1)^2+(c-1)^2=5\qquad(3)$

Thay $(*)$ và (3) ta được: $(2b+2)^2+(b+1)^2+(-6-3b)^2=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} b=-2 \\ b=-\frac{9}{7} \end{array}\right.$

$b=-2\Rightarrow a=1,c=1\Rightarrow M\left(1;-2;1\right)$

$b=-\dfrac{9}{7}\Rightarrow a=\dfrac{17}{7},c=-\dfrac{8}{7}\Rightarrow M\left(\dfrac{17}{7};-\dfrac{9}{7};-\dfrac{8}{7}\right)$

Chọn A.

Bài 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz,$ cho 2 điểm $A\left(1;3;2\right), B\left(3;2;1\right)$ và mặt phẳng $\left(P\right): x+2y+2x-11=0.$ Tìm điểm M trên $\left(P\right)$ sao cho $MB=2\sqrt{2},\widehat{MBA}=30^0.$

A. $\left[\begin{array}{l} M\left(1;2;3\right) \\ M\left(1;4;1\right)\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} M\left(1;-2;3\right) \\ M\left(1;-4;1\right)\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} M\left(2;1;3\right) \\ M\left(4;1;1\right)\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} M\left(1;-2;3\right) \\ M\left(-1;4;1\right)\end{array}\right.$

Lời giải

Nhận thấy $A\in\left(P\right),B\notin\left(P\right),AB=\sqrt{6}.$

Áp dụng định lý côsin trong tam giác MAB ta có:

$MA^2=MB^2+BA^2=2MB.BA.\cos 30^0=2\Rightarrow MB^2=MB^2+BA^2$

Do đó tam giác MAB vuông tại $A.$

Ta có: $\overrightarrow{u_{AM}}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_p}\right]=\left(0;-5;5\right)\Rightarrow AM:\begin{cases} x=1 \\ y=3-t \\ z=2+t\end{cases}\Rightarrow M\left(1;3-t;2+t\right)$

Ta có $MA^2=2\Rightarrow t^2+t^2=2\Leftrightarrow t=\pm 1$

Với $t=1\Rightarrow M\left(1;2;3\right)$; $t=-1\Rightarrow M\left(1;4;1\right)$

Chọn A.