CHƯƠNG 1: (TIẾP THEO)
BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO CHUYÊN ĐỀ ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM
Chủ đề 1: (tiếp theo)
Dạng 2:
Một số bài toán ứng dụng về chuyển động

Bài 54:

Một vật chuyển động có phương trình là $S(t)=40\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right),(t(s))$, quãng đường tính theo đơn vị mét.

a. Tính vận tốc của vặt chuyển động tại thời điểm t=4(s)

b. Tính gia tốc của vật chuyển động tại thời điểm t=6(s).

Giải

a) Ta có: $v(t)=S'(t)=40\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)'.cos\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)=40\pi cos\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$

vậy: $v(4)=S'(4)=40\pi cos\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)=40\pi\frac{1}{2}=20\pi(m/s)$

b) Ta có:

$$a(t)=v'(t)=-40\pi\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)'\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)=-40\pi^2\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$$

Vậy: $a(6)=v'(6)=-40\pi^2\sin\left(6\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-40\pi^2\frac{\sqrt{3}}{2}=-20\sqrt{3}\pi^2\left(m/s^2\right)$

Bài 55:

Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động là $S(t)=50t^2,(t(s))$, độ cao tính theo đơn vị là mét.

a. Tính vận tốc của vật rơi tự do tại thời điểm t=6(s).

b. Sau thời gian bao lâu thì vật rơi tự do đạt vận tốc $50(m/s)$.

Giải.

a. Ta có $v(t)=S'(t)=10t$.

Vậy vận tốc thời điểm $t=6(s)$ là: $v(6)=S'(6)=10.6=60(m/s)$

b. Vậy để vận tốc của vật rơi do đạt $50(m/s)$ thì: $50=10t\Leftrightarrow t=5(s)$

Bài 56:

Một vật chuyển động có vận tốc được biểu thị bởi công thức là $v(t)=5t^2+7t,(t(\text{s}))$, trong đó $v(t)$ tính theo đơn vị là (m/s)

a. Tính gia tốc của vật tại thời điểm t=2(s).

b. Tính gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc chuyển động của vật bằng 12 m/s.

giải:

a) Ta có: $a(t)=v'(t)=10t+7.$ Vậy gia tốc của vật tại thời điểm $t=2(s)$

$$a(2)=v'(2)=10.2+2=27\left(m/s^2\right)$$

b) Vật tại thời điểm vận tốc chuyển động của vật bằng 12 m/s:

$$v(t)=12 \Leftrightarrow 5t^2+7t=12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \text{ (t/ m)} \\ t=-2,4 \text{(loai)} \end{array}\right.$$

Với $t=1(s): a(1)=v'(1)=10+7=17\left(m/s^2\right)$

Bìa 57: (Đề KSCL THPT Việt Trì)

Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t)=1+3t^2-t^3, t(s)$. Vận tốc $v(m/s)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi t bằng bao nhiêu.

A. $t=4$ B. $t=3$ C. $t=2$ D. $t=1$

Giải:

Ta có: $v(t)=S'(t)=6t-3t^2$

$v'(t)=6-6t.$

$v'(t)=0 \Leftrightarrow 6-6t=0 \Leftrightarrow t=1$

BBT

t	0		1		$+\infty$
$V'(t)$		$+$	0	$-$	
V(t)		↗	V_{max}	↘	

Vậy vận tốc của chuyển động đạt GTLN khi t=1. Chọn D.

Bài 58:

Hằng ngày mực nước của hồ thủy điện ở miền Trung lên và xuống theo lượng nước mưa, và các suối nước đổ về hồ. Từ lúc 8h sáng, độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lên xuống theo thời gian t (giờ) trong ngày cho bởi công thức $h(t)=24t+5t^2-\frac{t^3}{3}$. Biết rằng phải thông báo cho các hộ dân phải di dời trước khi xả nước theo quy đinh trước 5 giờ. Hỏi cần thông báo cho hộ dân di dời trước khi xả nước mấy giờ. Biết rằng mực nước trong hồ phải lên cao nhất mới xả nước.

A. $15h$ B. $16h$ C. $17h$ D. $18h$

Giải:

Ta có:

$h'(t)=24+10t-t^2$

$$h'(t)=0 \Leftrightarrow 24+10t-t^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \text{(loai)} \\ t=12 \text{ (t/ m)} \end{array}\right.$$

BBT

t	0	12	$+\infty$

$h'(t)$	+ 0 −
$h(t)$	↗ $h_{\max}$ ↘

Vậy để mực nước lên cao nhất thì phải mất 12 giờ. Vậy phải thông báo cho dân di dời vào 15 giờ chiều cùng ngày. Chọn A.

Bài 59: (đề minh họa Quốc gia 2017)

Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10, (t(s))$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 0,2m B. 2m C. 10m D. 20m.

Giải:

Ta có: $v_0 = 10(m/s)$

Gia tốc của ô tô chuyển động chậm dần đều: $a = v'(t) = -5$.

Tại thời điểm ô tô dừng lại thì vận tốc bằng 0.

Ta có: $v_{(t)}^2 - v_0^2 = 2aS \Leftrightarrow 0 - 10^2 = 2(-5)S \Leftrightarrow S = 10(m)$

Vậy ô tô còn có thể đi được quãng đường là $10m$.

Chọn C.

Lưu ý:

Bài này còn có thể áp dụng tích phân để tìm quãng đường di chuyển của ô tô khi dừng lại.

Bài 60: Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) để vượt khoảng cách 300km (tới nơi sinh sản). Vận tốc dòng nước 6km/h. Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong thời gian t giờ cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là hằng số; E tính bằng jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất là bao nhiêu?

A. 9km/h B. 6km/h C. 10km/h D. 12km/h

Giải:

Vận tốc của con cá khi bơi ngược dòng: $v - 6(km/h), (v \geq 6)$

Thời gian con cá bơi từ nơi sinh sống đến nơi sinh sản: $t = \frac{300}{v-6}(h)$

Năng lượng tiêu thụ của con cá khi bơi từ nơi sinh sống đến nơi sinh sản:

$$E(v) = cv^2\frac{900}{v-6} - cv^3\frac{300}{(v-6)^2} = \frac{300cv^2}{v-6}\left(3 - \frac{v}{v-6}\right).$$

$$E'(v) = 0 \Leftrightarrow \frac{300cv^2}{v-6}\left(3 - \frac{v}{v-6}\right) = 0 \Leftrightarrow 3 - \frac{v}{v-6} = 0 \Leftrightarrow \text{v} = 9.$$

BBT

X	6 9 $+\infty$

$E'(x)$	$-$	0	$+$
E(x)	$\searrow$	$E_{\min}$	$\nearrow$

Vậy vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất bằng $v = 9(km/h)$. Chọn. A

Nhận xét:

Đối với bài này có rất nhiều em tìm nhầm hàm $E(v) = c(v-6)^3 \dfrac{300}{v-6}(J)$. Và sẽ tìm được chọn $v = 6km/h$ đó là Chọn sai hoàn toàn vì vận tốc v trong biểu thức $E(v) = cv^3t$, v là vận tốc thực của con cá khi di chuyển, còn t là thời gian con cá bơi từ nơi sinh sống đến nơi sinh sản ứng với vận tốc của con cá đã trừ đi vận tốc dòng nước.

Bài 61: (trích từ Luận văn thạc sĩ Nguyễ Văn Bảo)

Chi phí về nhiên liệu của một tàu được chia làm hai phần. Trong đó phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 ngàn đồng/giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v = 10km/h$ thì phần thứ hai bằng 30 ngàn đồng/giờ. Hãy xác định vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường là nhỏ nhất?

A. 10km/h B. 15km/h C. 20km/h D. 25km/h

Giải:

Gọi $x(km/h)$ là vận tốc của tàu. Thời gian tàu chạy quãng đường 1 km là $\dfrac{1}{x}$ (giờ).

Chi phí tiền nhiên liệu cho phần thứ nhất là: $\dfrac{1}{x}.480$ (ngàn đồng).

Khi vận tốc $v = 10km/h$ thì chi phí cho quãng đường 1 km ở phần thứ hai là:

$$\frac{1}{10}.30 = 3 \text{ (ngàn đồng).}$$

Xét tại vận tốc $x(km/h)$, gọi y (ngàn đồng) chi phí cho quãng đường 1 km tại vận tốc x thì chi phí cho quãng đường 1 km tại vận tốc x, ta có: $y = kx^3$

Ta có: $3 = k10^3 \Leftrightarrow k = \dfrac{3}{10^3}$. Suy ra $y = \dfrac{3x^3}{1000}$.

Vậy tổng chi phí tiền nhiên liệu cho 1 km đường là: $P(x) = \dfrac{480}{x} + \dfrac{3x^3}{1000}$.

Bài toán trở thành tìm x để $P(x)$ nhỏ nhất.

$$P'(x) = -\frac{480}{x^2} + \frac{9x^2}{1000}$$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{480}{x^2} + \frac{9x^2}{1000} = 0 \Leftrightarrow x = 20$$

$$P''(x) = \frac{960}{x^3} + \frac{18x}{1000}$$

$$P''(20) = \frac{960}{20^3} + \frac{18.20}{1000} > 0$$

Suy ra $P(x)$ đạt GTNN tại $x = 20$

Vậy vận tốc của tàu $x = 20(km/h)$.

CHọn C.

Bài 62:

Một vật rơi tự do với phương trình chuyển động $S = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9,8m/s^2$ và t tính bằng giây (s). Vận tốc của vật tại thời điểm t = 5s bằng:

A. 49m/s B. 25m/s C. 10m/s D. 18m/s

Giải:

$v = S' = gt$ nên tại thời điểm $t = 5s$. Vận tốc của vật là:

$v = 9,8.5 = 49(m/s)$. CHọn A.

Bài 63:

Một chất điểm chuyển động thẳng theo phương trình $S = t^3 - 3t^2 + 4t$, trong đó t tính bằng giấy (s) và S tính bằng mét (m). Gia tốc của chất điểm lúc t=2s là:

A. $4m/s^2$ B. $6m/s^2$ C. $8m/s^2$ D. $12m/s^2$

Giải:

$a = S'' = 6t - 6$ nên tại thời điểm t=2s thì gia tốc của chất điểm là: $a = 6.2 - 6\left(m/s^2\right)$.

Chọn B.

Bài 64:

Cho chuyển động thẳng theo phương trình $S = t^3 + 3t^2 - 9t + 27$, trong đó t tính bằng giấy (s) và S tính bằng mét (m).Gia tốc chuyển động tại thời điểm vận tốc triệt tiêu là:

A. $0m/s^2$ B. $6m/s^2$ C. $24m/s^2$ D. $12m/s^2$

Giải:

$v = S' = 3t^2 + 6t - 9; a = S'' = 6t + 6$

Tại thời điểm vận tốc bị triệt tiêu: $3t^2 + 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -3(loai) \end{array}\right.$

Với $t = 1$ thì gia tốc của chuyển động là: $a = 6.1 + 6 = 12\left(m/s^2\right)$.

Chọn D.

Bài 65:

Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S=\frac{1}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2+2t-100$, trong đó t tính bằng giấy (s). Chất điểm đạt giá trị nhỏ nhất tại thời điểm:

A. $t=1$ B. $t=16$ C. $t=5$ D. $t=3$

Giải:

$$S'=t^3-3t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2(l)\\t=1\end{array}\right.$$

Vậy chất điểm đạt GTNN tại t= 1s.

Chọn A.

Bài 66:

Một vật đang chuyển động với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=3t+t^2\left(m/s^2\right)$. Hỏi quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc?

A. $11100m$ B. $\frac{6800}{3}m$ C. $\frac{4300}{3}m$ D. $\frac{5800}{3}m$

Giải:

$$a(t)=3t+t^2$$

$$v'(t)=a(t);\quad S'(t)=v(t)$$

Theo đề ta có: vận tốc ban đầu là $10(m/s)$

$$\Rightarrow v(t)=\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+10(m/s)$$

$$S(t)=\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{12}t^4+10t(m)$$

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc là: $S(10)=\frac{4300}{3}(m)$.

Chọn C.

Bài 67:

Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)(m/s)$, có gia tốc $v'(t)=\frac{3}{t+1}\left(m/s^2\right)$. vận tốc ban đầu của vật là $6m/s$. Vận tốc của vật sau 10 giây là (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị):

A. 14m/s B. 13m/s C. 11m/s. D. 12m/s.

Giải:

Vận tốc của vật sau 10 giây là $v=6+7=13(m/s)$. Chọn B

CHỦ ĐỀ 2.

TÌM GIÁ TRỊ CỦA THAM SỐ ĐỂ HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU TRÊN MIỀN D

Cho hàm số $y=f(x,m)$,m là tham số, có taaph xác định D.

- HÀm số f đồng biến trên $D \Leftrightarrow f' \ge 0, \forall x \in D$.
- HÀm số f nghịch biến trên $D \Leftrightarrow f' \le 0, \forall x \in D$.

Từ đó suy ra điều kiện của m.

1. Sử dụng GTLN, GTNN của hàm số trên tập D để giải quyết bài toán tìm giá trị của tham số để hàm số đơn điệu.

Lí thuyết nhắc lại:

Cho bất phương trình:

$$f(x,m) \ge 0, \forall x \in D \Leftrightarrow f(x) \ge g(m), \forall x \in D \Leftrightarrow \min_{x\in D} f(x) \ge g(m)$$

Cho bất phương trình:

$$f(x,m) \le 0, \forall x \in D \Leftrightarrow f(x) \le g(m), \forall x \in D \Leftrightarrow \min_{x\in D} f(x) \le g(m)$$

Phương pháp: Để điều kiện để hàm số luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên tập xác định (hoặc từng khoảng xác định) của hàm số $y = f(x,m)$, ta thực hiện các bước sau:

- Bước 1: Tìm TXĐ của hàm số.
- Bước 2: Tính y'. Để hàm số đồng biến $y' \ge 0, \forall x \in D$, (để hàm số nghịch biến $y' \le 0, \forall x \in D$) thì ta sử dụng lý thuyết nhắc lại phần trên.
- Bước 3: Kết luận giá trị của tham số.

Chú ý:

+ Phương pháp trên chỉ sử dụng được khi ta có thể tách được thành $f(x) và\ g(m)$ riêng biệt.

+ Nếu ta không thể tách được thì phải sử dụng dấu của tam thức bậc 2.

2. Sử dụng phương pháp tham thức bậc hai để tìm điều kiện của tham số:

Lý thuyết nhắc lại:

1) $y' = 0$ chỉ xảy ra tại một số hữu hạn điểm.

2) Nếu $y' = ax^2 + bx + c$ thì:

- $y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b = 0 \\ c \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases} \end{array}\right.$
- $y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b = 0 \\ c \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases} \end{array}\right.$

3) Định lí về dấu của tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c$

- Nếu $\Delta < 0$ thì $g(x)$ luôn cùng dấu với a.
- Nếu $\Delta = 0$ thì $g(x)$ luôn cùng dấu với a, trừ $x = -\dfrac{b}{2a}$
- Nếu $\Delta > 0$ thì $g(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2 và trong khoảng hai nghiệm thì $g(x)$ khác dấu với a, ngoài khoảng hai nghiệm thì $g(x)$ cùng dấu với a.

4) So sánh các nghiệm x_1, x_2 của tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c$ với số 0.

- $x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$
- $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$
- $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0$

5) Để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có độ dài khoảng đồng biến (nghịch biến) $(x_1; x_2)$ bằng d thì ta thực hiện các bước sau:

- Tính y'.
- Tìm điều kiện để hàm số có khoảng đồng biến và ngịch biến: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ (1)
- Biến đổi $|x_1 - x_2| = d$ thành $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = d^2 \quad (2)$
- Sử dụng định kí Vi-et đưa (2) thành phương trình theo m.
- Giải phương trình, so với điều kiện (1) để chọn nghiệm.

BÀI TẬP VẬN DỤNG.

Bài 1:

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số:

$y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + (2m+1)x - 3m^2 + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m \leq 2.$ B. $m \leq -\frac{5}{2}$ C. $m \geq -\frac{5}{2}$ D. $m \leq 3$

Giải:

TXĐ : $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -x^2 + 4x + (2x+1)$

$\Delta' = 2m + 5$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

$y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{5}{2}$

Chọn B.

Bài 2:

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số:

$y = mx^3 - 3x^2 + (m-2)x - 3m + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m \leq 2$ B. $m \leq 1$ C. $m \geq -1$ D. $m \leq -1$

Giải:

TXĐ : $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3mx^2 - 6x + (m-2)$

Hàm số nghịch biến trên R khi và chỉ khi

$y' = 3mx^2 - 6x + (m-2) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

TH1: $m = 0,$ khi đó $y' = -6x - 2 \leq 0, x \in \mathbb{R}$

$y' = -6x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{-1}{3}$. Không thỏa mãn yêu cầu đề bài $\forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy m=0 không thỏa mãn.

TH2: $m \neq 0$. Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

$$y'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \Delta = 9 - 3m(m-2) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -3m^2 + 6m + 9 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \left[\begin{array}{l} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1$$

Chọn D.

Bài 3:

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số: $y = \dfrac{mx+1}{x+m}$ luôn đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

A. $m \leq 1$ hoặc $m \geq -1$. B. $m < -1$ hoặc $m > 1$.

C. $m \leq 2$ hoặc $m \geq -1$. D. $m \leq 2$ hoặc $m \geq 1$.

Giải:

TXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{m^2 - 1}{(x+m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi $y' > 0, \forall x \neq -m \Leftrightarrow m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1 \end{array}\right.$

Chọn B.

Bài 4:

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số:

$y = \dfrac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \dfrac{1}{3}$ đồng biến trên $[2;+\infty)$

A. $m \geq \dfrac{2}{3}$ B. $m \leq 1$ C. $m \geq -1$ D. $m \leq -1$

Giải:

Ta có: $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$

Hàm số đồng biến trên $[2;+\infty)$ thì

$y' \geq 0 \Leftrightarrow mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) \geq 0, \forall \in [2;+\infty)$

$$\Leftrightarrow m(x^2 - 2x + 3) + 2x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{6-2x}{x^2 - 2x + 3}, \forall \in [2;+\infty)$$

Đặt $f(x) = \dfrac{6-2x}{x^2 - 2x + 3}, \forall x \in [2;+\infty)$ ta tìm GTLN của hàm: $f(x), \forall x \in [2;+\infty)$

Ta có:

$f'(x)=\dfrac{2x^2-12x+6}{\left(x^2-2x+3\right)^2},\forall x\in[2;+\infty)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{2x^2-12x+6}{\left(x^2-2x+3\right)^2}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3+\sqrt{6} \\ x=3-\sqrt{6}\,(loai)\end{array}\right.$

Ta có: $f(2)=\dfrac{2}{3}, f\left(3+\sqrt{6}\right)=\dfrac{2-\sqrt{6}}{2}, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\le m \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}\le m.$

Chọn A.

Bài 5: (ĐHKA,A1 - 2013).

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số:

$y=-x^3+3x^2+3mx-1$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. $m\le 1$ B. $m\le -1$ C. $m\ge -1$ D. $m\le 0$

Giải:

Ta có: $y'=-3x^2+6x+3m$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ thì :

$y'\le 0\Leftrightarrow -3x^2+6x+3m\le 0,\forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow x^2-2x\ge m,\forall x\in(0;+\infty)$

Đặt $f(x)=x^2-2x,\forall x\in(0;+\infty)$ Ta đi tìm GTNN của hàm $f(x),\forall x\in(0;+\infty)$

Ta có:

$f'(x)=2x-2$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-2=0\Leftrightarrow x=1.$

Ta có: $f(0)=0; f(1)=-1, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Vậy để hàm số nghịch biến trong khoảng $(0;+\infty)$ thì: $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)\ge m\Leftrightarrow m\le -1$.

Chọn B.

Bài 6: (Đề minh họa 2017)

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số: $y=\dfrac{\tan x-2}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$

A. $m\le 0$ hoặc $1\le m<2$. B. $m\le 0$.

C. $1\le m<2$. D. $m\ge 2$.

Giải:

Đặt $t=\tan x,$ với $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)\Rightarrow t\in(0;1)$

Hàm số đã cho trở thành tìm tham số m để hàm số $y=\frac{t-2}{t-m}$ đồng biến trên khoảng (0;1)

Ta có: $y'(t)=\frac{-m+2}{(t-m)^2}$

Để hàm số đồng biến trong khoảng (0;1) thì:

$\begin{cases} y'(t)>0 \\ t\neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+2>0 \\ m\notin(0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<2 \\ m\notin(0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1\le m<2 \\ m\le 0 \end{array}\right.$

Chọn A.

Bài 7:

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số:

$y=x^3-mx^2-\left(2m^2-7m+7\right)x+2(m-1)(2m-3)$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. $-1\le m\le\frac{5}{2}$ B. $-1<m\le\frac{5}{2}$ C. $-1<m<\frac{5}{2}$ D. $-\frac{1}{2}<m\le\frac{5}{2}$

Giải:

Ta có: $y'=3x^2-2mx-\left(2m^2-7m+7\right)$

Hàm số đồng biến trong khoảng $(2;+\infty)$ thì ta xét 2 trường hợp sau:

TH1: Hàm số luôn đồng biến trên R:

$\Delta'\le 0\Leftrightarrow m^2+3\left(2m^2-7m+7\right)\le 0\Leftrightarrow m^2-3m+3\le 0,(VL)$

Vậy không có giá trị nào của m để hàm số luôn đồng biến trên R,

TH2: Hàm số đồng biến trong khoảng $(2;+\infty)$

$\Delta'>0\Leftrightarrow m^2-3m+3>0,(\forall x\in\mathbb{R})$.

Giả sử $x_1,x_2,(x_1<x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $y'=0$, để Hàm số đồng biến trong khoảng $(2;+\infty)$ thì:

$x_1<x_2\le 2\Leftrightarrow\begin{cases} \frac{S}{2}\le 2 \\ (x_1-2)(x_2-2)\ge 0\Leftrightarrow x_1x_2-2(x_1+x_2)+4\ge 0,(1) \end{cases}$

Theo định lí vi-et ta có:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{2m}{3} \\ x_1x_2=\frac{-2m^2+7m-7}{3} \end{cases} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$\begin{cases} m \le 6 \\ \dfrac{-2m^2+7m-7}{3} - 2\left(\dfrac{2m}{3}\right) + 4 \ge 0 \Leftrightarrow -2m^2+3m+5 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \le 6 \\ -1 \le m \le \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le m \le \dfrac{5}{2}$$

Vậy với $-1 \le m \le \dfrac{5}{2}$ thì hàm số đồng biến trong khoảng $(2;+\infty)$.

Chọn A.

CHỦ ĐỀ 3.

GẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH DỰA VÀO HÀM SỐ.

- Kiến thức cơ bản

Cho f(x) là hàm số xác định và liên tục trên D, thì:

$f(x) \le g(m)$ với mọi $x \in D \Leftrightarrow g(m) \ge \max\limits_{x\in D} f(x)$

$f(x) \le g(m)$ có nghiệm khi và chỉ khi $g(m) \ge \min\limits_{x\in D} f(x)$

$f(x) \ge g(m)$ với mọi $x \in D \Leftrightarrow g(m) \le \min\limits_{x\in D} f(x)$

$f(x) \ge g(m)$ có nghiệm khi và chỉ khi $g(m) \le \max\limits_{x\in D} f(x)$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1:

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* sao cho bất phương trình: $m\sqrt{x^2-2x+2}+m+2x-x^2 \le 0$ có nghiệm $x \in \left[0;1+\sqrt{3}\right]$.

A. $m \le \dfrac{2}{3}$. B. $m \le -1$. C. $m \ge \dfrac{2}{3}$. D. $m \le 0$.

Giải:

Bpt $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-2x+2}+1\right)+x(2-x) \le 0 \Leftrightarrow m \le \dfrac{x^2-2x}{\sqrt{x^2-2x+2}+1}, (1)$

Đặt $t=\sqrt{x^2-2x+2} \Rightarrow x^2-2x=t^2-2$.

Ta xác đinhk ĐK của t:

Xét hàm số $t=\sqrt{x^2-2x+2}$ với $x \in \left[0;1+\sqrt{3}\right]$, ta đi tìm ĐK ràng buộc của t.

Ta có: $t'=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}, t'=0 \Leftrightarrow x=1$.

Vậy với $x \in \left[0;1+\sqrt{3}\right]$ thì $1 \le t \le 2$.

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow m \le \dfrac{t^2-2}{t+1}$ với $t \in [1;2]$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2-2}{t+1}$ với $t \in [1;2]$. Ta có: $f'(t) = \dfrac{t^2+2t+2}{(t+2)^2} > 0, \forall x \in [1;2]$. Vậy hàm số f tăng trên [1;2].

Do đó, yêu cầu của bài toán trở thành tìm m để (1) có nghiệm $t \in [1;2]$

$\Leftrightarrow m \le \max\limits_{t\in[1;2]} f(t) = f(2) = \dfrac{2}{3}$.

Vậy $m \le \dfrac{2}{3}$ thì pt có nghiệm. Chọn A.

Bài 2: (Đề tuyển sinh ĐH, CĐ khối B 2014)

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* sao cho bất phương trình:

$m\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2\right) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$ có nghiệm.

A. $m \le \sqrt{2} - 1$. B. $\sqrt{2} - 1 \le m \le 1$. C. $m \ge 1$. D. $m \le 1$.

Giải:

ĐK: $x \in [-1;1]$.

Đặt $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$. Với $x \in [-1;1]$, ta xác định ĐK của t như sau:

Xét hàm số $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$ với $x \in [-1;1]$.

Ta có:

$t' = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{x\left(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1-x^4}}$, cho $t' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ta có $t(-1) = \sqrt{2}, t(0) = 0, t(1) = \sqrt{2}$

Vậy với $x \in [-1;1]$ thì $t \in \left[0;\sqrt{2}\right]$

Từ $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} \Rightarrow 2\sqrt{1-x^4} = 2 - t^2$.

Khi đó pt đã cho tương đương với: $m(t+2) = -t^2 + t + 2 \Leftrightarrow \dfrac{-t^2+t+2}{t+2}$

Bài toán trở thành tìm m để phương trình $\dfrac{-t^2+t+2}{t+2} = m$ có nghiệm $t \in \left[0;\sqrt{2}\right]$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{-t^2+t+2}{t+2}$ với $t \in \left[0;\sqrt{2}\right]$.

Ta có: $f'(t) = \dfrac{-t^2-4t}{(t+2)^2} < 0, \forall t \in \left[0;\sqrt{2}\right]$

Suy ra: $\max\limits_{t\in\left[0;\sqrt{2}\right]} f(t) = f(0) = 1, \min\limits_{t\in\left[0;\sqrt{2}\right]} f(t) = f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} - 1$.

Bây giờ yêu cầu bài toán xảy ra khi: $\min\limits_{t\in\left[0;\sqrt{2}\right]} f\left(t\right)\le m\le \max\limits_{t\in\left[0;\sqrt{2}\right]} f\left(t\right)\Leftrightarrow \sqrt{2}-1\le m\le 1$

Vậy với $\sqrt{2}-1\le m\le 1$ thảo yêu cầu bài toán.

Chọn B.

Bài 3: (đề tuyển sinh ĐH, CĐ khối A - 2007):

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* sao cho bất phương trình:

$3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}\ \left(1\right)$ có nghiệm.

A. $m\le \sqrt{2}-1.$ B. $\sqrt{2}-1\le m\le 1.$ C. $-1<m\le \frac{1}{3}.$ D. $m\le -1.$

Giải:

ĐK xác định của phương trình : $x\ge 1.$

Khi đó:

$$\left(1\right)\Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+m=2\sqrt[4]{\frac{x^2-1}{\left(x+1\right)^2}}\Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+m=2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}\quad \left(2\right)$$

Đặt $t=2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}\ ,\left(t\ge 0\right)$. Vì $\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}=\sqrt[4]{1-\frac{2}{x+1}}<1$ nên t<1.

Vậy với $x\ge 1$ thì $0\le t<1$

Khi đó, $\left(2\right)\Leftrightarrow 3t^2+m=2t\Leftrightarrow -3t^2+2t=m,\left(3\right)$.

Bây giờ bài toán trở thành tìm m để (3) có nghiệm $t\in\left[0;1\right)$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=-3t^2+2t$ trên khoảng $\left[0;1\right)$. Ta có:

$$f'\left(t\right)=-6t+2,\ f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow -6t+2=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}.$$

BBT

t	0		$\frac{1}{3}$		1
$f'\left(t\right)$		$+$	0	$-$	
$f\left(t\right)$			$\frac{1}{3}$		
	0	$\nearrow$		$\searrow$	-1

Vậy với $-1<m\le \frac{1}{3}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn C.

Bài 4: (Đề tuyển sinh ĐH-CĐ khối B – 2006)

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* sao cho bất phương trình:

$\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

A. $m \le 9$. B. $m \ge \frac{9}{2}$. C. $-1 < m$. D. $m \le 7$.

Giải:

Ta có: $\sqrt{x^2+mx+2} = 2x+1 \quad (1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge -\frac{1}{2} \\ 3x^2+4x-1 = mx \quad (2) \end{array}\right. \qquad (*)$

Nhận xét:

$x=0$ không phải là nghiệm của (2). Do vậy, ta tiếp tục biến đổi:

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{1}{2} \\ \frac{3x^2+4x-1}{x} = m \quad (3) \end{cases}$

Bài toán trở thành tìm m để (3) có 2 nghiệm thực phân biệt:

$x \in \left[-\frac{1}{2};+\infty\right) \setminus \{0\}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{3x^2+4x-1}{x}$ với $x \in \left[-\frac{1}{2};+\infty\right) \setminus \{0\}$. Ta có:

$f'(x) = \frac{3x^2+1}{x^2} > 0, \forall x \in \left[-\frac{1}{2};+\infty\right) \setminus \{0\}$

BBT

X	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	
$f(x)$	$\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy với $m \ge \frac{9}{2}$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt.

Chọn B.

Bài 5: (Đề thi tuyển sinh ĐH, CĐ khối A - 2008)

Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thực phân biệt $\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+2\sqrt[4]{6-x}+2\sqrt{6-x} = m, (m \in \mathbb{R})$

A. $2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6} \le m \le 3\sqrt{2}+6$ B. $2\sqrt{6}+3\sqrt[4]{6} \le m \le 3\sqrt{2}+8$

C. $\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6} \le m \le 3\sqrt{2}+6$ D. $\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6} \le m \le 3\sqrt{2}+6$

Giải:

ĐK: $0 \le x \le 6$

Đặt vế trái của phương trình là $f(x), x \in [0;6]$.

Ta có:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt[4]{(2x)^3}}+\frac{1}{\sqrt{2x}}-\frac{1}{2\sqrt[4]{(6-x)^3}}-\frac{1}{\sqrt{6-x}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}}-\frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}--\frac{1}{\sqrt{6-x}}\right),x\in(0;6)$$

Đăt:

$$u(x)=\left(\frac{1}{\sqrt[4]{(2x)^3}}-\frac{1}{\sqrt[4]{(6-x)^3}}\right),v(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}--\frac{1}{\sqrt{6-x}}\right),x\in(0;6)$$

Ta thấy $u(2)=v(2)=0,x\in(0;6)\Rightarrow f'(2)=0$. Hơn nữa $u(x),v(x)$ cùng dương trên khoảng (0;2) và cùng âm trên khoảng (2;6).

BBT

X	0		2		6
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$
$f(x)$		$\nearrow$	$3\sqrt{2}+6$	$\searrow$	
	$2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}$				$\sqrt[4]{12}+2\sqrt{3}$

Vậy với $2\sqrt{6}+2\sqrt[4]{6}\le m\le 3\sqrt{2}+6$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Chọn A.

CHỦ ĐỀ 4.

TÌM GIÁ TRỊ CỦA THAM SỐ ĐỂ HÀM SỐ CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN CÁC YẾU TỐ ĐẶC BIỆT

1. Khái niệm cực trị của hàm số

Giả sử hàm số f xác định trên tập $D\left(D\subset\mathbb{R}\right)$ và $x_0\in D$.

1) x_0 là điểm cực đại của f nếu tồn tại khoảng $(a;b)\subset D$ và $x_0\in(a;b)$ sao cho $f(x)<f(x_0),\in(a;b)\setminus\{x_0\}$

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại (cực đại) của f.

2) x_0 là điểm cực tiểu của f nếu tồn tại khoảng $(a;b)\subset D$ và $x_0\in(a;b)$ sao cho $f(x)>f(x_0),\in(a;b)\setminus\{x_0\}$

Khi đó $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực tiểu (cực tiểu) của f.

3) Nếu $f(x_0)$ được gọi là cực trị của f thì điểm $\left(x_0;f(x_0)\right)$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số f.

2. Điều kiện cần để hàm số có cực trị

Nếu hàm số f có đạo hàm tại x_0 và đạt cực trị tại điểm đó thì $f'(x_0)=0$.

Chú ý: Hàm số f chỉ có thể đạt cực trị tại những điểm mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.

3. Điều kiện đủ để hàm số có cực trị.

Định lí 1: giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên $(a;b)\setminus\{x_0\}$

1) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua x_0 thì f đạt cực tiểu tại x_0

2) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua x_0 thì f đạt cực đại tại x_0 .

Định lí 2: Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0, $f'(x_0)=0$ và có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0.

1) Nếu $f''(x_0)<0$ thì f đạt cực đại tại x_0.

2) Nếu $f''(x_0)>0$ thì f đạt cực tiểu tại x_0.

Kiến thức cần nhớ:

1) Khoảng cách giữa hai điểm A, B $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

2) Khoảng cách từ điểm $M(x_0;y_0)$ đến đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$:

$$d(M,\Delta)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

3) Diện tích tam giác ABC:

$$S=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2-(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}$$

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}.\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$ với $\vec{a}=(a_1;a_2);\vec{b}=(b_1;b_2)$.

Chú ý: $\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1: Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* sao cho hàm số $y=(m+2)x^3+3x^2+mx-5$ có cực đại, cực tiểu.

A. $(-3;-2)\cup(-2;1)$. B. $(-3;-2)$. C. $-1<m$. D. $(-2;1)$.

Giải:

Ta có: $y'=3(m+2)x^2+6x+m$

Khi đó y' là tam thức bậc hai có $\Delta'=-3(m^2+2m-3)$. Hàm số có có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}m+2\neq0\\\Delta'>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq-2\\m^2+2m-3<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq-2\\-3<m<1\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-3;-2)\cup(-2;1)$$

Vậy $m\in(-3;-2)\cup(-2;1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Chọn A.

Bài 2: [ĐHD12]: Tìm *m* để hàm số $y=\frac{2}{3}x^3-mx^2-2(3m^2-1)x+\frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị $x_1;x_2$ sao cho $x_1x_2+2(x_1+x_2)=1$.

A. $m=\frac{2}{3}$. B. $m=5$. C. $-1<m$. D. $m=7$.

Giải:

Ta có:

$y' = 2x^2 - 2mx - 2\left(3m^2 - 1\right) = 2\left(x^2 - mx - 3m^2 + 1\right),$

Để hàm số có cực đại, cực tiểu thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Ta có $\Delta = 13m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{2\sqrt{13}}{13} \\ m < -\dfrac{2\sqrt{13}}{13} \end{array}\right.(1)$

$x_1; x_2$ là các nghiệm của $y' = 0$ nên theo định lý Vi-et ta có:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -3m^2 + 1 \end{cases}$

Do đó: $x_1 x_2 + 2\left(x_1 + x_2\right) = 1$

$\Leftrightarrow -3m^2 + 2m + 1 = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện (1) ta thấy chỉ có $m = \dfrac{2}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Chọn A.

Bài 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* sao cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại hai điểm $x_1; x_2$ sao cho: $\left|x_1 - x_2\right| \geq 8$.

A. $\left[\begin{array}{l} m \geq \dfrac{1+\sqrt{64}}{2} \\ m \leq \dfrac{1-\sqrt{64}}{2} \end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l} m \geq \dfrac{1+\sqrt{63}}{2} \\ m \leq \dfrac{1-\sqrt{63}}{2} \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} m \geq \dfrac{1+\sqrt{61}}{2} \\ m \leq \dfrac{1-\sqrt{61}}{2} \end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l} m \geq \dfrac{1+\sqrt{65}}{2} \\ m \leq \dfrac{1-\sqrt{65}}{2} \end{array}\right.$.

Giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$y' = x^2 - 2mx + m$

Hàm số có cực đại và cực tiểu thì $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ khi và chỉ khi:

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - m > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < 0 \end{array}\right., \quad (2)$

Ta có: $\left|x_1 - x_2\right| \geq 8 \Leftrightarrow \left(x_1 - x_2\right)^2 \geq 64 \Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1x_2 \geq 64, (1)$

Theo Đl vi-et Ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1.x_2 = m \end{cases}$.

Thay vào (1) ta được:

$$\left(2m^2\right)-4m\ge 64 \Leftrightarrow 4m^2-4m-64\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge \dfrac{1+\sqrt{65}}{2} \\ m\le \dfrac{1-\sqrt{65}}{2}\end{array}\right.,(3)$$

Kết hợp (2) và (3) ta được: $\left[\begin{array}{l} m\ge \dfrac{1+\sqrt{65}}{2} \\ m\le \dfrac{1-\sqrt{65}}{2}\end{array}\right.$ thỏa mãn bài toán. Chọn D.

Bài 4: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{1}{3}mx^3-\left(m-1\right)x^2+3\left(m-2\right)x+\frac{1}{3}$ đạt cực trị tại hai điểm $x_1;x_2$ sao cho: $x_1+2x_2=1$.

A. $m=\frac{2}{3}$ hoặc $m=2$. B. $m=3$. C. $m=-5$. D. $m=2$.

Giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=mx^2-2\left(m-1\right)x+3\left(m-2\right)$

Hàm số có cực đại và cực tiểu thì $y'=0$ cos2 nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m\ne 0 \\ \Delta'=\left(m-1\right)^2-3m\left(m-2\right)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 0 \\ -2m^2+4m+1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 0 \\ \dfrac{2-\sqrt{6}}{2}<m<\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}\end{cases} (*)$$

Theo đl viet và đề bài, ta có:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2\left(m-1\right)}{m} & (1) \\ x_1.x_2=\dfrac{3\left(m-2\right)}{m} & (2) \\ x_1+2x_2=1 & (3)\end{cases}$$

Từ (1) và (3) ta có: $x_1=\dfrac{3m-4}{m},x_2=\dfrac{2-m}{m}$

Thế vào (2) ta được: $\left(\dfrac{3m-4}{m}\right)\left(\dfrac{2-m}{m}\right)=\dfrac{3\left(m-2\right)}{m}\ \left(m\ne 0\right)$

$$\Leftrightarrow 3m^2-8m+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{2}{3} \\ m=2\end{array}\right. \text{(thỏa (*).}$$

Vậy giá trị cần tìm là: $m=\frac{2}{3}$ hoặc $m=2$. Chọn A.

Bài 5 [ĐHB12] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^3-3mx^2+3m^3$ có hai điểm cực trị tạo thành 1 tam giác OAB có diện tích bằng 48

A. $m=2$.　　B. $m=\pm 2$　　C. $m=-2$　　D. $m=\pm 3$

Giải:

Ta có:

$$y'=3x^2-6mx=3x\left(x-2m\right), y'=0\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2m \end{cases}$$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $2m\neq 0\Leftrightarrow m\neq 0.(1)$

Khi đó, các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(0;3m^3\right);B\left(2m;-m^3\right)$

Ta có:

$\overrightarrow{OA}\left(0;3m^3\right)\Rightarrow OA=3\left|m^3\right|.$　　　　(2)

Ta thấy $A\in Oy\Leftrightarrow OA\equiv Oy\Rightarrow d\left(B,OA\right)=d\left(B,Oy\right)=2\left|m\right|.$　　(3)

Từ (2) và (3) suy ra $S_{OAB}=\dfrac{1}{2}.OA.d\left(B,OA\right)=3m^4$

Do đó: $S_{OAB}=48\Leftrightarrow 3m^4\Leftrightarrow 48\Leftrightarrow m=\pm 2$ thỏa mãn (1)

Vậy $m=\pm 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Chọn B.

Bài 6: Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4-2mx^2+2m+m^4$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng 4.

A. $m=\sqrt[5]{16}$.　　B. $m=\sqrt[5]{17}$.　　C. $m=\sqrt[5]{18}$.　　D. $m=\sqrt[5]{19}$.

Giải:

Ta có: $y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow 4x\left(x^2-m\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m(*) \end{array}\right.$$

Để hàm số có 3 cực trị thì phương trình y'=0 có 3 nghiệm phân biệt nên phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0. Điều kiện tương đương m>0

Gọi 3 điểm cực trị của hàm số: $A\left(0;m^4+2m\right);B\left(\sqrt{m};m^4-m^2+2m\right);C\left(-\sqrt{m};m^4-m^2+2m\right)$

Gọi $\left(0;m^4-m^2+2m\right)$ là trung điểm BC.

$$AH=\sqrt{\left(-m^2\right)^2}=m^2, BC=\sqrt{\left(2\sqrt{m}\right)^2}=2\sqrt{m}$$

Vì ba điểm cực trị luôn tạo thành 1 tam giác cân tại đỉnh A,

nên $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AH.BC\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}m^2 2\sqrt{m}=4\Leftrightarrow m^5=16\Leftrightarrow m=\sqrt[5]{16}$

vậy với $m=\sqrt[5]{16}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Chọn A

Bài 7: [DDHB07] Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* sao cho đồ thị của hàm số $y=-x^3+3x^2+3\left(m^2-1\right)x-3m^2-1$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số cách đều gốc tọa độ O.

A. $m=-\dfrac{1}{2}$.　　B. $m=\pm\dfrac{1}{3}$.　　C. $m=\pm\dfrac{1}{2}$.　　D. $m=\dfrac{1}{2}$.

Giải:

Ta có: $y'=-3x^2+6x+3\left(m^2-1\right)=-3\left(x^2-2x-m^2+1\right)$

Để hàm số có cực đại, cực tiểu thì phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Ta có: $\Delta'=m^2>0\Leftrightarrow m\neq 0$. (1)

Khi đó: $y'=0$ có các nghiệm là: $x=1\pm m\Rightarrow$ tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(1-m;-2-2m^3\right)$ và $B\left(1+m;-2+2m^3\right)$.

Ta có:

$\overrightarrow{OA}\left(1-m;-2-2m^3\right)\Rightarrow OA^2=\left(1-m\right)^2+4\left(1+m^3\right)^2$;

$\overrightarrow{OB}\left(1+m;-2+2m^3\right)\Rightarrow OB^2=\left(1+m\right)^2+4\left(1-m^3\right)^2$.

A và B cách đều gốc tọa độ khi và chỉ khi:

$OA=OB\Leftrightarrow OA^2=OB^2$

$\Leftrightarrow\left(1-m\right)^2+4\left(1+m^3\right)^2=\left(1+m\right)^2+4\left(1-m^3\right)^2$

$\Leftrightarrow -4m+16m^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=\pm\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện (1), ta thấy chỉ $m=\pm\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Chọn C.

Bài 8: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=-x^3+3mx^2-3m-1$ có cực đại, cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $d:x+8y-74=0$.

A. $m=4$. B. $m=3$. C. $m=2$. D. $m=1$.

Giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=-3x^2+6mx; y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2m\end{array}\right.$

Hàm số đạt cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi phương trình y’=0 có hai nghiệm phân biệt, điều này tương đương với $m\neq 0$.

Hai điểm cực trị là $A\left(0;-3m-1\right);B\left(2m;4m^3-3m-1\right)$

Trung điểm I của đoạn thawngt Ab là $I\left(m;2m^3-3m-1\right)$

Vecto $\overrightarrow{AB}=\left(2m;4m^3\right)$; một vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}=\left(8;-1\right)$.

Hai điểm cực đại, cực tiểu A và B đối xứng với nhau qua đường thẳng d khi và chỉ khi:

$\begin{cases}I\in d\\ AB\perp d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m+8\left(2m^3-3m-1\right)-74=0\\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}=0\end{cases}\Leftrightarrow m=2\left(t/m\right)$. Chọn C.

Bài 9: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\left(m+1\right)x^4-mx^2+\dfrac{3}{2}$ chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $m=0$.	B. $-1\le m<0$.	C. $m=2$.	D. $m=-1$.

Giải:

Ta xét hai trường hợp sau đây:

TH1: $m+1=0\Leftrightarrow m=-1.$ khi đó: $y=x^2+\frac{3}{2}\Rightarrow$ Hàm số chỉ có cực tiểu $(x=0)$ mà không có cực đại $\Rightarrow m=-1$ thỏa yêu cầu bài toán.

TH2: $m=1\ne 0\Leftrightarrow m\ne -1.$ Khi đó hàm số đã cho là hàm bậc 4 có $y'=4(m+1)x^3-2mx=4(m+1)x\left[x^2-\frac{m}{2(m+1)}\right]$

Hàm số chỉ có cực tiểu mà không có cực đại khi và chỉ khi y'=0 có đúng 1 nghiệm và đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua nghiệm này.

Nghĩa là: $\begin{cases}4(m+1)>0\\ \dfrac{m}{2(m+1)}\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -1<m<0.$

Kết hợp với những giá trị m tìm được, ta có: $-1\le m<0$. Chọn B.

Bài 10: [DDHB11] Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho $OA=BC$; trong đó O là gốc tọa độ, A là điểm cực trị thuộc trục tung, B và C là hia điểm cực trị càn lại.

A. $m=0$.	B. $m=2-\sqrt{8}$.	C. $m=2$.	D. $m=2\pm\sqrt{8}$.

Giải:

Ta có: $y'=4x^3-4(m+1)x=4x\left(x^2-(m+1)\right)$

Hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi y'=0 có 3 nghiệm phân biệt.

$h(x)=x^2-(m+1)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow m+1>0\Leftrightarrow m>-1.$ (*).

Khi đó, ta có $y'=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ x=-\sqrt{m+1}\\ x=\sqrt{m+1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A(0;m)\\ B\left(-\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right)\\ C\left(\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right)\end{cases}$

Vì vai trò của B và C là tương tự nhau nên ta chọn

$B\left(\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right),C\left(-\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right)$

Ta có: $\overrightarrow{OA}=(0;m)\Rightarrow OA=|m|;\overrightarrow{BC}\left(2\sqrt{m+1};0\right)\Rightarrow BC=2\sqrt{m+1}$

Do đó:

$OA=BC\Leftrightarrow |m|=2\sqrt{m+1}\Leftrightarrow m^2-4m-4=0,(\Delta'=8)$

$\Leftrightarrow m=2\pm\sqrt{8}$ (thỏa mãn (*))

Vậy $m=2\pm\sqrt{8}$ thỏa ycbt. Chọn D.

Bài 11:

[ĐHA12] Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông.

A. $m = 0$. B. $m = -2$. C. $m = 2$. D. $m = 1$.

Giải:

Ta có: $y' = 4x^3 - 4(m+1)x = 4x\underbrace{\left[x^2 - (m+1)\right]}_{t(x)}$

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khi đó phương trình $t(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 nên:

$m + 1 > 0 \Rightarrow m > -1.$ (*)

Khi đó, ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{m+1} \\ x = \sqrt{m+1} \end{cases}$

Suy ra các điểm cực trị của đồ thi hàm số là $A(0; m^2), B(-\sqrt{m+1}; -2m-1), C(\sqrt{m+1}; -2m-1)$

Ta thấy $A \in Oy$, B và C đối xứng nhau qua Oy nên tam giác ABC cân tại A. Do đó tam giác cỉ có thể vuông tại A.

Ta có:

$\overrightarrow{AB} = \left(-\sqrt{m+1}; -(m+1)^2\right), \overrightarrow{AC} = \left(\sqrt{m+1}; -(m+1)^2\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (m+1)^4 - (m+1)$

Ta giác ABC vuông kh và chỉ khi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

$\Leftrightarrow (m+1)^4 - (m+1) = 0 \Leftrightarrow (m+1)\left[(m+1)^3 - 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+1 = 0 \\ m+1 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 0 \end{array}\right.$

Kết hợp với ĐK (*) ta có m=0. Chọn A.

Bài 12: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x^4}{4} - (3m+1)x^2 + 2(m+1)$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có trọng tâm là gốc tọa độ O.

A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = \frac{1}{3}$. C. $m = \frac{1}{4}$. D. $m = \frac{1}{5}$.

Giải:

$y' = x^3 - 2(3m+1)x = x\left(x^2 - (6m+2)\right)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - (6m+2)\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 6m + 2 (*) \end{array}\right.$

Để hàm số có 3 cực trị thì pt y’=0 có 3 nghiệm phân biệt nên pt (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0. ĐK tương đương $6m+2>0 \Leftrightarrow m>-\frac{1}{3}$.

Gọi 3 điểm cực trị của hàm số $A(0;2m+2)$; $B\left(\sqrt{6m+2};-9m^2-4m+1\right)$;

$C\left(-\sqrt{6m+2};-9m^2-4m+1\right)$.

Theo công thức trọng tâm ta có:

$$\begin{cases} x_A+x_B+x_C=3x_O \\ y_A+y_B+y_C=3y_O \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=0(t/\mathrm{m}) \\ -18m^2-6m+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{1}{3} \\ m=-\frac{2}{3} \end{array}\right.$$

Với m=1/3 thỏa ycbt. Chọn B.

Bài 13: (Đề minh họa 2017). Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

A. $m=-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. B. $m=-1$. C. $m=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. D. $m=1$.

Giải:

$y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$

$y'=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m(*) \end{array}\right.$

Để hàm số có 3 cực trị thì pt y’=0 có 3 nghiệm phân biệt nên pt (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0. ĐK tương đương $m>0$.

Gọi 3 điểm cực trị của hàm số: $A(0;1), B\left(\sqrt{m};3m^2+1\right), C\left(-\sqrt{m};3m^2+1\right)$

$\overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{m};3m^2\right), \overrightarrow{AC}=\left(-\sqrt{m};3m^2\right)$

Vì 3 điểm cực trị của hàm trùng phương trên luôn tạo thành 1 tam giác cân tại A, nên tam giác ABC vuông tại A.

Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-m+9m^4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\frac{1}{\sqrt[3]{9}} \end{array}\right.$. So với ĐK suy ra $m=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ thỏa ycbt.

Chọn C.

Bài 14: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4-2mx^2+m^2-m$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có một góc bằng 120^0

A. $m=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ B. $m=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ C. $m=\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ D. $m=\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$.

Giải:

$y' = 4x^3 - 4mx = 4x\left(x^2 - m\right)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m(*) \end{array}\right.$

Để hàm số có 3 cực trị thì pt y'=0 có 3 nghiệm phân biệt nên pt (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0. ĐK tương đương $m > 0$.

Gọi 3 điểm cực trị của hàm số: $A\left(0;m^2 - m\right), B\left(\sqrt{m};-m\right), C\left(-\sqrt{m};-m\right)$

$\overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{m};-m^2\right), \overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{m};-m^2\right)$

Theo đề bài ta có:

$cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \dfrac{-m + m^4}{\sqrt{m^4 + m}.\sqrt{m^4 + m}} = \dfrac{m^3 - 1}{m^3 + 1} = cos120^0$

$\Leftrightarrow \dfrac{m^3 - 1}{m^3 + 1} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 3m^3 = 1 \Leftrightarrow m = \pm\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$

Vậy với $m = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ thỏa ycbt.

Bài 15: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + +2m + m^4$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác đều.

A. $m = \sqrt[3]{3}$. B. $m = \sqrt[3]{9}$ C. $m = \sqrt[3]{13}$ D. $m = \sqrt[3]{14}$

Giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$y' = 4x^3 - 4mx = 4x\left(x^2 - m\right)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m(*) \end{array}\right.$

Hàm số có cực đại và cực tiểu thì $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x qua các nghiệm đó $\Leftrightarrow$ pt (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = m^4 + 2m \\ x = \pm\sqrt{m} \Rightarrow y = m^4 - m^2 + 2m \end{array}\right.$

Đò thị hàm số có một điểm cực đại là $A\left(0;m^4 + 2m\right)$ và hai điểm cực tiểu là

$B\left(-\sqrt{m};m^4 - m^2 + 2m\right), C\left(\sqrt{m};m^4 - m^2 + 2m\right)$

Các điểm A, B, C lập thành 1 tam giac đều $\Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AB = BC \end{cases}$

$\Leftrightarrow AB^2 = BC^2 \Leftrightarrow m + m^4 = 4m \Leftrightarrow m\left(m^3 - 3\right) = 0$

Vậy $m = \sqrt[3]{3}$ (m>0). Chọn A.