CHƯƠNG 1: (TIẾP THEO)
BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO CHUYÊN ĐỀ ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM
CHỦ ĐỀ 5.
TÌM GIÁ TRỊ CỦA THAM SỐ ĐỂ HAI HÀM SỐ GIAO NHAU THỎA MÃN CÁC YẾU TỐ ĐẶC BIỆT

Để biện luận theo m về số giao điểm cuatr hai hàm số và thỏa mãn các điều kiện về tính chất hình học phẳng Oxy thì ta làm các bước sau:

Bước 1: TXĐ:

Bước 2: Phương trình hoành độ giao điểm và đưa về dạng: $f(x,m)=g(x,m)\Leftrightarrow F(x,m)=0$

Sử dụng biệt thức Δ, hoặc đưa về phương trình tích để biện luận số giao điểm của hai hàm số.

Bước 3: Dựa theo yêu cầu của đề bài mà ta sử dụng các công thức biến đổi của hình học phẳng như: vectơ, tích vô hướng, khoảng cách, hình chiếu, điểm đối xứng,…

Bước 4: Giải và kết luận giá trị của tham só m.

Bài tập vận dụng

Bài 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\frac{m-x}{x+2}(H_m)$ và đường thẳng $d:2x+2y-1=0$ giao nhau tại hai điểm cùng với gốc tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích là $S=\frac{3}{8}$.

A. $m=3.$ B. $m=\frac{1}{2}.$ C. $m=2.$ D. $m=1.$

Giải:

Hoành độ giao điểm A, B của d và (H_m) là các nghiệm của phương trình: $\frac{-x+m}{x+2}=-x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x^2+x+2(m-1)=0, x\neq -2, \quad (1)$

Phương trình (1) có 2 nghiệm x_1,x_2 phân biệt khác -2:

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=17-16m>0\\ 2.(-2)^2-2+2(m-1)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m<\frac{17}{16}\\ m\neq -2\end{cases}$$

Ta có:

$AB=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}=\sqrt{2}.\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2}$

$=\sqrt{2}.\sqrt{\left(x_2+x_1\right)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{17-16m}$

$$h=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Khoảng cách từ gốc tọa độ đến d là

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}.h.AB=\frac{1}{2}.\frac{1}{2\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{17-16m}=\frac{3}{8}\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$$

Suy ra (thỏa mãn)

Chọn A.

Bài 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\frac{2x}{x-2}\left(H\right)$ và đường thẳng $d:y=x+m$ giao nhau tại hai điểm phân biệt thuộc 2 nhánh khác nhau của đồ thị sao cho khoảng cách giữa hai điểm đó là nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

A. $m=4$ và $\sqrt{30}.$ B. $m=\frac{1}{2}$ và $\sqrt{31}.$ C. $m=0$ và $\sqrt{32}.$ D. $m=-1$ và $\sqrt{33}.$

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{2x}{x-2}=x+m\Leftrightarrow x^2+\left(m-4\right)x-2m=0,\quad \left(1\right)$$

Để d cắt (H) tại 2 điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 2.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=m^2+16\\-4\neq 0\end{cases},\forall m\quad \left(2\right)$$

Giả sử $A\left(x_1;y_1\right),B\left(x_2;y_2\right)$ là hai giao điểm khi đó x_1,x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1)

$$\begin{cases}x_1+x_2=4-m\\x_1.x_2=-2m\end{cases}\quad \left(3\right)$$

Thei viet ta có:

$y_1=x_1+m,\ \ y_2=x_2+m$

Để A, B thuộc 2 nhánh khác nhau của đồ thị thì A và B nằm khác phía đối với đường thẳng $x-2=0$.

A và B nằm khác phía đối với đường thẳng $x-2=0$ khi và chỉ khi $\left(x_1-2\right)\left(x_2-2\right)<0$ hay

$x_1.x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 < 0, \quad (4)$

Tahy (3) vào (4) ta được $-4 < 0$ luôn đúng (5). Mặt khác ta lại có

$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{2(x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2} \quad (6)$

Tahy (3) vào (6) ta được: $AB = \sqrt{2m^2 + 32} \geq \sqrt{32}$ vậy $AB = \sqrt{32}$ nhỏ nhất khi $m = 0 \quad (7)$

Từ (1), (5), (7) ta có $m = 0$ và $AB = \sqrt{32}$ thỏa mãn.

Chọn C.

Nhận xét: Đối với các bài khoảng cách như bài 1 và 2, thì có cách nào tính khoảng cách AB nhanh nhất không?

Chúng ta khẳng định là có.

Thật vậy, ta có bài tổng quát: Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ và đường thẳng $y = mx + n, (m \neq 0)$

Gọi A, B là hai điểm mà đường thẳng cắt hàm số. Giả sử $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là 2 giao điểm, khi đó x_1, x_2 là 2 nghiệm phương trình: $f(x) = mx + n, (1)$

$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (m(x_1 - x_2))^2} = \sqrt{(1 + m^2)(x_1 - x_2)^2}$

$= \sqrt{(1 + m)^2\left((x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right)} = \frac{1}{m}\sqrt{(1 + m^2)\Delta}$

Với Δ được tính từ phương trình (1).

+Nếu AB nhỏ nhất thì Δ nhỏ nhất.

Ta có thể xét bài tập sau đây:

Bài 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x + 1}{x - 1}(H)$ và đường thẳng $d: y = x + m2x + m$ giao nhau tại hai điểm phân biệt *A, B* thuộc 2 nhánh khác nhau . Xác định *m* để đoạn *AB* có độ dài ngắn nhất.

A. $m = 5.$ B. $m = -3.$ C. $m = 0$. D. $m = -1$.

Giải:

Để đường thẳng d luôn cắt (H) tại hai điểm phân biệt thì phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x + 1}{x - 1} = 2x + m$ có hai nghiệm phân biệt với mọi m và $x_1 < 1 < x_2$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=(x-1)(2x+m) \\ x \neq 1 \end{cases}$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < 1 < x_2$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+(m-3)x-m-1=0(*) \\ x \neq 1 \end{cases}$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < 1 < x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2+16>0, \forall m \\ f(1)=2+(m-3)-m-1=-2<0 \end{cases}$$

Vậy với mọi giá trị m thì đường thẳng d luôn cắt (H) tại hai điểm phân biệt A, B thuộc hai nhánh khác nhau.

Gọi $A(x_1;2x_1+m), B(x_2;2x_2+m)$ là giao điểm giữa d và (H).

(x_1, x_2 là 2 nghiệm phương trình (*))

Ta có:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(2(x_2-x_1))^2}=\sqrt{5(x_2-x_1)^2}=\sqrt{5((x_2+x_1)^2-4x_1x_2)}$$

Theo viet ta có:

$$AB=\frac{1}{2}\sqrt{5\left[(m+1)^2+16\right]} \geq 2\sqrt{5}$$

$$AB_{\min}=2\sqrt{5} \Leftrightarrow m=-1$$

Vậy $m=-1$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét: Vậy ta có thể tính theo công thức tính nhanh ở trên: $AB=\frac{1}{2}\sqrt{(1+2^2)\Delta}=\frac{1}{2}\sqrt{5\Delta}=\frac{1}{2}\sqrt{5((m+1)^2+16)} \to \min$

Khi $\Delta \to \min$. vậy $m=-1$. Chọn D.

Bài 4: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}(H)$ và đường thẳng $d: y=x+m2x+m$ giao nhau tại hai điểm phân biệt *A, B* sao cho $AB=\sqrt{5}.$

A. $m=4.$ B. $m=3.$ C. $m=0$. D. $\left[\begin{array}{l} m=10 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm:

$2x^2+mx+m+2=0,\left(x\neq -1\right),\quad (1)$

(d) cắt (H) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác -1 $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-8m-16>0 (2) \\ x\neq -1 \end{cases}$

Gọi $A\left(x_1;y_1\right)$ và $B\left(x_2;y_2\right)$ là giao điểm giữa d và (H). Ta có x_1,x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1).

$AB=\frac{1}{2}\sqrt{\left(1+2^2\right)\Delta}=\frac{1}{2}\sqrt{5\Delta}=\frac{1}{2}\sqrt{5\left(m^2-8m-16\right)}=\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow m^2-8m-20=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=10 \\ m=-2 \end{array}\right.$

Thỏa mãn (2). Chọn D.

Bài 5: Tìm tất cả các giá trị thực của a và b sao cho đồ thị của hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}(C)$ và đường thẳng $d: y=ax+b$ giao nhau tại hai điểm phân biệt, đối xứng nhau qua đường thẳng $\Delta: x-2y+3=0$.

A. $\begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a=-2 \\ b=-2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a=-2 \\ b=-3 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a=-2 \\ b=-4 \end{cases}$

Giải:

Phương trình của Δ được viết lại dưới dạng $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

Để giao điểm đối xứng qua Δ thì $\Delta\perp d\Leftrightarrow a.\frac{1}{2}=-1\Leftrightarrow a=-2$.

Suy ra đường thẳng $d: y=-2x+b$

Phương trình hoành độ giao điểm giữa d và (C):

$\frac{x-1}{x+1}=-2x+b\Leftrightarrow 2x^2-\left(b-3\right)x-\left(b+1\right)=0.\quad (1)$

Để d và (C) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta>0\Leftrightarrow b^2+2b+17>0\Rightarrow \forall b\in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{b-3}{4} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{b+3}{2} \end{cases}$$

Goi I là trung điểm của AB, ta có:

Vì A, B đối xứng nhau qua Δ nên trung điểm I thuộc vào đường thẳng Δ, ta có:

$x_I - 2y_I + 3 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{b-3}{4} - (b+3) + 3 = 0 \Leftrightarrow b = -1.$

Vậy $\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$ thỏa ycbt. Chọn A.

Bài 6: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị của hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}(C)$ và đường thẳng $d : y = mx + 3$ giao nhau tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O. (O là gốc tọa độ)

A. $m = 3 \pm \sqrt{5}.$ B. $m = 3 - \sqrt{5}.$ C. $m = 3 + \sqrt{5}$. D. $m = 2 \pm \sqrt{5}$.

Giải:

Pt hoành độ gia điểm:

$$\frac{2x+1}{x-1} = mx + 3, (x \neq 1) \Leftrightarrow mx^2 - (m-1)x - 4 = 0, (1)$$

(d) cắt đồ thị hàm số (C) tại A, B khi và chỉ khi pt (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 1, nên:

$$\begin{cases} \dfrac{2x+1}{x-1} = mx + 3, (x \neq 1) \Leftrightarrow mx^2 - (m-1)x - 4 = 0, (1) \\ m.1^2 - (m-1).1 - 4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < -7 - 4\sqrt{3} \\ m > -7 + 4\sqrt{3} \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_A.x_B + (mx_A + 3)(mx_B + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m^2 + 1)(x_A.x_B) + 3m(x_A + x_B) + 9 = 0, (2)$$

$$\begin{cases} x_A + x_B = \dfrac{m-1}{m} \\ x_A . x_B = -\dfrac{4}{m} \end{cases}, (3)$$

Theo Viet ta có:

$$m^2 - 6m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = 3 \pm \sqrt{5}$$

Thay (3) vào (2) ta được:

$m = 3 \pm \sqrt{5}.$

Vậy với thỏa mãn ycbt. Chọn A.

Bài 7: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 2 (C)$ và đường thẳng $\Delta : y = -x + 2$ tại 3 điểm phân biệt $A(0;2)$; B; C sao cho tam giác MBC có diện tích $2\sqrt{2}$, với $M(3;1)$

A. $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 3 \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 3 \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right.$. D. $\left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = 3 \end{array}\right.$.

Giải:

Pt hoành độ giao điểm của đồ thị với Δ là

$x^3 + 2mx^2 + 3(m-1) + 2 = -x + 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x^2 + 2mx + 3m - 2 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Đường thẳng Δ cắt đồ thị hàm số (C) tại ba điểm phân biệt $A(0;2)$, B, C thì pt (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0, khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 > 0 \\ 3m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < 1 \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Gọi $B(x_1; y_1)$ và $C(x_2; y_2)$, trong đó x_1, x_2 là nghiệm của (1); $y_1 = -x_1 + 2$ và $y_2 = -x_2 + 2$

Ta có:

$$h = d(M; (\Delta)) = \frac{|3 + 1 - 2|}{\sqrt{2}} \Rightarrow BC = \frac{2S_{MBC}}{h} = \frac{2.2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4$$

$$BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 2\left[(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2\right]$$

Mà

$= 8(m^2 - 3m + 2)$

$$8(m^2 - 3m + 2) = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 3 \end{array}\right.$$

Suy ra

$$\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 3 \end{array}\right.$$

Vậy thỏa ycbt. Chọn A.

Bài 8: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + \frac{2}{3}\ (C_m)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt $x_1; x_2; x_3$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 15$.

A. $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 4 \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1 \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right.$. D. $\left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 1 \end{array}\right.$.

Giải:

Pt hoành độ giao điểm:

$$\frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3mx^2 - 3x + 3m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)\left[x^2 + (1 - 3m)x - 3m - 2\right] = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 + (1 - 3m)x - 3m - 2 = 0 (2) \end{array}\right.$$

(C_m) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt thì pt (1) có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\begin{cases} \Delta = (1 - 3m)^2 + 4(3m + 2) > 0 \\ g(1) = -6m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 + 2m + 3 > 0, \forall m \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0 \ (3)$$

Giả sử $x_3 = 1, x_1, x_2$ là nghiệm của (2).

Ta có: $x_1 + x_2 = 3m - 1; x_1x_2 = -3m - 2$. Khi đó:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 15 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 1 > 15$$

$$\Leftrightarrow (3m - 1)^2 + 2(3m + 2) - 14 > 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1 \end{array}\right. (4)$$

$$\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1 \end{array}\right.$$

Từ (3) và (4) ta có giá trị cần tìm là: . Chọn B.

Bài 9: Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m\ (C_m)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt với các hoành độ lập thành cấp số cộng.

A. $m = 11$. B. $m = 10$. C. $m = 9$. D. $m = 8$.

Giải:

Pt hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0\ (*)$

Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2, x_3\ (x_1 < x_2 < x_3)$ thì x_1, x_2, x_3 là nghiệm của pt(*)

Khi đó: $x^3 - 3x^2 - 9x + m = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 3\ (1)$

Ta có:

x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $x_1 + x_3 = 2x_2\ \ (2)$

Thế (2) vào (1) ta được $x_2 = 1$, thay vào pt (*) ta được: $m = 11$.

Với $m = 11 : (*) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x + 11 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - 11) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 - 2\sqrt{3} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 + 2\sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow x_1 + x_3 = 2x_2$$

Vậy m=11 thỏa ycbt. Chọn A.

CHỦ ĐỀ 6.

TÌM GIÁ TRỊ CỦA THAM SỐ ĐỂ TIẾP TUYẾN CỦA HÀM SỐ THẢO MÃN CÁC YẾU TỐ ĐẶC BIỆT

Bài toán 1: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của $(C): y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; y_0)$

Nếu cho x_0 thì tìm $y_0 = f(x_0)$

Nếu cho y_0 thì tìm x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = y_0$

Tính $y' = f'(x)$. Suy ra $y'(x_0) = f'(x_0)$.

Phương trình tiếp tuyến Δ là: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Bài toán 2: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của $(C): y = f(x)$ biết Δ có hệ số góc k cho trước

Cách 1: Tìm tọa độ tiếp điểm.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Tính $f'(x_0)$

Δ có hệ số góc $k \Rightarrow f'(x_0) = k \quad (1)$

Giải phương trình (1), tìm được x_0 và tính $y_0 = f(x_0)$. Từ đó viết phương trình của Δ.

Cách 2: Dùng điều kiện tiếp xúc.

Phương trình đường thẳng Δ có dạng $y = kx + m$.

Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} f(x) = kx + m \\ f'(x) = k \end{cases} (*)$

Giải hệ (*), tìm được m. Từ đó viết phương trình của Δ.

Chú ý: Hệ số góc k của tiếp tuyến Δ có thể được cho gián tiếp như sau:

+ Δ tạo với chiều dương trục hoành góc α thì $k = \tan\alpha$

+ Δ song song với đường thẳng $d: y = ax + b$ thì $k = a$

+ Δ vuông góc với đường thẳng $d: y = ax + b (a \neq 0)$ thì $k = -\dfrac{1}{a}$

+ Δ tạo với đường thẳng $d: y = ax + b$ một góc α thì $\left|\dfrac{k - a}{1 + ka}\right| = \tan\alpha$.

Bài toán 3: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của $(C): y = f(x)$, biết Δ đi qua điểm $A(x_A; y_A)$

Cách 1: Tìm tọa độ tiếp điểm.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Khi đó: $y_0 = f(x_0), y'_0 = f'(x_0)$

Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M: y - y_0 = f'(x_0).(x - x_0)$

Δ đi qua $A(x_A; y_A)$ nên: $y_A - y_0 = f'(x_0).(x_A - x_0) \quad (2)$

Giải phương trình (2), tìm được x_0. từ đó viết phương trình của Δ.

Cách 2: Dùng điều kiện tiếp xúc.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A\left(x_A;y_A\right)$ và có hệ số góc $k: y-y_A=k\left(x-x_A\right)$

Δ tiếp xúc với (*C*) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f\left(x\right)=k\left(x-x_A\right)+y_A \\ f'\left(x\right)=k \end{cases} \left(*\right)$$

Giải hệ (*), tìm được *x* (suy ra *k*). Từ đó viết phương trình tiếp tuyến Δ.

Bài toán 4: Tìm những điểm trên đường thẳng d mà từ đó có thể vẽ được 1,2,3,… tiếp tuyến với đồ thị $(C): y=f(x)$.

Giả sử $d: ax+by+c=0. M\left(x_M;y_M\right)\in d$

Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc $k: y=k\left(x-x_M\right)+y_M$

Δ tiếp xúc với (*C*) khi hệ pt sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f\left(x\right)=k\left(x-x_M\right)+y_M & \left(1\right) \\ f'\left(x\right)=k & \left(2\right) \end{cases}$$

+ Thế k từ (2) vào (1) ta được $f\left(x\right)=\left(x-x_M\right).f'\left(x\right)+y_M \quad \left(C\right)$

+ Số tiếp tuyến của $\left(C\right)$ vẽ từ M = số nghiệm của x của (C).

Bài toán 5:

Tìm những điểm mà từ đó có thể vẽ được 2 tiếp tuyến với đồ thị $\left(C\right): f=f(x)$ và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau.

Gọi $M\left(x_M;y_M\right)$

Phương trình đường thẳng Δ qua M có hệ số góc $k: y=k\left(x-x_M\right)+y_M$

Δ tiếp xúc với (*C*) khi hệ pt sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f\left(x\right)=k\left(x-x_M\right)+y_M & \left(1\right) \\ f'\left(x\right)=k & \left(2\right) \end{cases}$$

+ Thế k từ (2) vào (1) ta được $f\left(x\right)=\left(x-x_M\right).f'\left(x\right)+y_M \quad \left(C\right)$

+ Qua M vẽ được 2 tiếp tuyến với (C) $\Leftrightarrow$ (C) có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2.

Hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau $\Leftrightarrow f'(x_1).f'(x_2)=-1$.

Từ đó ta tìm được M.

Chú ý: Qua M vẽ được 2 tiếp tuyến với (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía với trục hoành thì

¿

(C) có 2 nghiệm phân biệt

¿

¿

Bài toán 6: Tìm giá trị tham số mà tiếp tuyến của hàm số thỏa mãn các tính chất hình học Oxy ta sử dụng cách viết phương trình tiếp tuyến của các dạng trên

Δ tiếp xúc với (C) khi hệ pt sau có nghiệm: $\begin{cases} f(x)=k(x-x_M)+y_M & (1) \\ f'(x)=k & (2) \end{cases}$

Sử dụng công thức cơ bản của hình học Oxy về công thức khoảng cách, độ dài, vectơ,…

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* sao cho đồ thị của hàm số $y=x^3+(1-2m)x^2+(2-m)x+m^2+2m-5(C)$ có tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d:x+y+7=0$ góc α, biết $cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{26}}$

A. $m\le-\frac{1}{4}$ hoặc $m\ge\frac{1}{2}$.

B. $m\le-1$ hoặc $m\ge\frac{1}{3}$.

C. $m\le-\frac{1}{3}$ hoặc $m\ge\frac{1}{4}$.

D. $m\le-\frac{1}{5}$ hoặc $m\ge\frac{1}{3}$.

Giải:

$y'=3x^2+2(1-2m)x+(2-m)$

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến, phương trình tiếp tuyến $y=kx+b$. Suy ra tiếp tuyến có vectơ pháp tuyến $\vec{n_1}=(k;-1)$, đường thẳng d có vectơ pháp tuyến $\vec{n_2}=(1;1)$

Ta có:

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{n_1}.\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|.|\vec{n_2}|}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{26}}=\frac{|k-1|}{\sqrt{2}.\sqrt{k^2+1}}\Leftrightarrow 12k^2-26k+12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} k_1=\frac{3}{2} \\ k_2=\frac{2}{3} \end{array}\right.$$

Để hàm số (C) có tiếp tuyến thỏa mãn ycbt thì ít nhất một trong hai phương trình: $y'=k_1\ (1)$ hoặc $y'=k_2\ (2)$ có nghiệm thực x.

$$\left[\begin{array}{l} 3x^2+2(1-2m)x+2-m=\dfrac{3}{2} \\ 3x^2+2(1-2m)x+2-m=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Nghĩa là:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta_1' \geq 0 \\ \Delta_2' \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8m^2-2m-1\geq 0 \\ 4m^2-m-3\geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq -\dfrac{1}{4}; m\geq \dfrac{1}{2} \\ m\leq -\dfrac{3}{4}; m\geq 1 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow m\leq -\dfrac{1}{4}$ hoặc $m\geq \dfrac{1}{2}$

Vậy với $m\leq -\dfrac{1}{4}$ hoặc $m\geq \dfrac{1}{2}$. thỏa ycbt. Chọn A.

Bài 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}(C)$ và đường thẳng $d: y=2x+m$ giao nhau tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau.

A. $m=-1.$ B. $m=-2.$ C. $m=-3$ D. $m=-4$

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{x+1}{x-1}=2x+m \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+(m-3)x-m-1=0\ (1) \\ x\neq 1 \end{cases}$$

Đề hàm số (C) và d giao nhau tại hai điểm phân biệt A, B thì phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt khác 1 khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta=(m-3)^2+8(m+1)=(m+1)^1+16>0, \forall m\in ¡ \\ g(1)=-2\neq 0 \end{cases}$$

Vậy hàm số (C) và d luôn luôn giao nhau tại hai điểm phân biệt A, B.

Gọi $x_1, x_2\ (x_1\neq x_2)$ lần lượt là hoành độ của A và B thì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1).

Theo Vi-et: $x_1+x_2=\frac{1}{2}(3-m)(*)$, tiếp tuyến Δ_1,Δ_2 tại A, B của hàm số (C) có hệ số góc lần lượt là:

$k_1=y'(x_1)=\frac{-2}{(x_1-1)^2}$ và $k_2=y'(x_2)=\frac{-2}{(x_2-1)^2}$

Theo đề bài: $$\Delta_1//\Delta_2\Leftrightarrow k_1=k_2\Leftrightarrow -\frac{2}{(x_1-1)^2}=-\frac{2}{(x_2-1)^2}$$

$\Leftrightarrow (x_1-1)^2=(x_2-1)^2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1-1=x_2-1\\ x_1-1=-x_2+1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=x_2(loai)\\ x_1+x_2=2,\quad (2)\end{array}\right.$

Thay (*) vào (2) ta được: $$\frac{1}{2}(3-m)=2\Leftrightarrow m=-1$$

Vậy $m=-1$ thỏa ycbt. Chọn A.

Bài 3: Cho điểm $A(0;m)$, tìm tất cả các giá trị thực của m để từ điểm A kẻ được hai tiếp tuyến tới hàm số $y=\frac{x+2}{x-1}(C)$ sao cho hai tiếp điểm tương ứng nằm về hai phía trục Ox.

A. $\begin{cases}-2<m\\ m\neq 1\end{cases}$ B. $\begin{cases}\frac{-2}{3}<m\\ m\neq 1\end{cases}$ C. $\begin{cases}\frac{-2}{5}<m\\ m\neq 1\end{cases}$ D. $\begin{cases}\frac{-2}{7}<m\\ m\neq 1\end{cases}$

Giải:

Phương trình tiếp tuyến qua $A(0;m)$, có dạng: $y=kx+m,(1)$

ĐK có 2 tiếp tuyến đi qua A:

$\begin{cases}\frac{x+2}{x-1}=kx+m & (2)\\ \frac{-3}{(x-1)^2}=k & (3)\end{cases}$ có hai nghiệm $x\neq 1$.

Thay (3) vào (2) và rút gọn ta được:

$(m-1)x^2-2(m+2)x+m+2=0\quad (4)$

Để (4) có 2 nghiệm $x \neq 1$ là: $\begin{cases} m \neq 1 \\ f(1) = -3 \neq 0 \\ \Delta' = 3m + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > -2 \end{cases} (*)$

Gọi hoành độ tiếp điểm $x_1; x_2$ là nghiệm của (4), tung độ tiếp điểm là $y_1 = \dfrac{x_1 + 2}{x_1 - 1}, y_2 = \dfrac{x_2 + 2}{x_2 - 1}$

Để hai tiếp điểm nằm khác phía trục Õ là:

$$y_1.y_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + 2)(x_2 + 2)}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4}{x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1} < 0 \Leftrightarrow \frac{9m + 6}{-3} < 0 \Leftrightarrow m > -\frac{2}{3}$$

.

So với điều kiện (*), vậy $\begin{cases} -\dfrac{2}{3} < m \\ m \neq 1 \end{cases}$ thỏa ycbt. Chọn B.

Bài 4: Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{x - 1}{2x + 2}(C)$ sao cho tiếp tuyến tại M của (C) tạo với trục tọa độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $d: y = -4x.$

A. $M\left(-\dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{2}\right), M\left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{2}\right)$

B. $M\left(2; \dfrac{1}{5}\right), M\left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{2}\right)$

C. $M\left(3; \dfrac{1}{4}\right), M\left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{2}\right)$

D. $M\left(5; \dfrac{1}{3}\right), M\left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{2}\right)$

Giải:

$$y' = \frac{1}{(x + 1)^2}$$

Ta có:

Gọi $M\left(a; \dfrac{a - 1}{2a + 2}\right) \in (C), (a \neq -1)$ là điểm cần tìm. Gọi Δ tiếp tuyến với (C) tại M, ta có phương trình $\Delta:$

$$\Delta: y = f'(a)(x - a) + \frac{a - 1}{2a + 2} \Rightarrow y = \frac{1}{(a + 1)^2}(x - a) + \frac{a - 1}{2(a + 1)}$$

$A = Ox \cap \Delta \Rightarrow A\left(-\frac{a^2-2a-1}{2};0\right)$

Gọi

$B = Oy \cap \Delta \Rightarrow B\left(0;\frac{a^2-2a-1}{2(a+1)^2}\right)$. Khi đó Δ tạo với hai trục tọa độ ΔOAB có trọng tâm là: $G\left(-\frac{a^2-2a-1}{6};\frac{a^2-2a-1}{6(a+1)^2}\right)$

Do $G \in d$ nên: $-4.\frac{a^2-2a-1}{6}+\frac{a^2-2a-1}{6(a+1)^2}=0 \Leftrightarrow 4=\frac{1}{(a+1)^2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+1=\frac{1}{2} \\ a+1=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-\frac{1}{2} \\ a=-\frac{3}{2} \end{array}\right.$

(Vì A, B $\neq 0$ nên $a^2-2a-1 \neq 0$).

Với $a=-\frac{1}{2} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$; với $a=-\frac{3}{2} \Rightarrow M\left(-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$

Chọn A.

Bài 5: (KSCL CHV) Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}(C)$ sao cho tiếp tuyến tại M với (C) cắt các đường tiệm cận của (C) tại A và B để đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất, với I là giao điểm của 2 tiệm cận.

A. $M\left(4;\frac{5}{2}\right)$ và $M(3;3)$

B. $M\left(0;\frac{3}{2}\right)$ và $M(3;3)$

C. $M(1;1)$ và $M(3;3)$

D. $M\left(5;\frac{7}{3}\right)$ và $M(3;3)$

Giải:

Ta có: $y'=-\frac{1}{(x-2)^2}$

$$M\left(a;\frac{2a-3}{a-2}\right)\in(C),a\neq 2,y'(a)=\frac{-1}{(a-2)^2}$$

Giả sử

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M có dạng:

$$\Delta: y=\frac{-1}{(a-2)^2}(x-a)+\frac{2a-3}{a-2}$$

Tọa độ giao điểm A, B của (Δ) và hai tiệm cận là:

$$A\left(2;\frac{2a-2}{a-2}\right);\ B(2a-2;2)$$

Ta thấy $\begin{cases}\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2+2a-2}{2}=a=x_M\\ \frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2a-3}{a-2}=y_M\end{cases}$, Suy ra M là trung điểm của AB.

Mặt khác $I(2;2)$ và tam giác IAB vuông tại I nên đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích

$$S=\pi IM^2=\pi\left[(a-2)^2+\left(\frac{2a-3}{a-2}-2\right)^2\right]=\pi\left[(a-2)^2+\frac{1}{(a-2)^2}\right]\geq 2\pi$$

Theo Bđt Cô si

Dấu "=" xảy ra khi $(a-2)^2=\frac{1}{(a-2)^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=3\end{array}\right.$

Do đó hai điểm M cần tìm là: $M(1;1)$ và $M(3;3)$.

Chọn C.

Bài 6: Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{2x-1}{x+1}(C)$ sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất.

A. $M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right),M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$

B. $M(0;-1),M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$

$M\left(2;1\right), M\left(1;\frac{1}{2}\right)$

C.

$M\left(0;-1\right), M\left(2;1\right)$

D.

Giải:

$$y' = \frac{3}{\left(x+1\right)^2}$$

Ta có:

Giả sử $M\left(a;\frac{2a-1}{a+1}\right) \in \left(C\right), a \neq -1$, thì tiếp tuyến tại M với $\left(C\right)$ có phương trình:

$$y = \frac{3}{\left(a+1\right)^2}\left(x-a\right) + \frac{2a-1}{a+1}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x-a\right) - \left(a+1\right)^2\left(y-2\right) - 3\left(a+1\right) = 0$$

Khoảng cách từ $I\left(-1;2\right)$ tới tiếp tuyến là:

$$d = \frac{\left|3\left(-1-a\right) - 3\left(a+1\right)\right|}{\sqrt{9+\left(a+1\right)^4}} = \frac{6\left|a+1\right|}{\sqrt{9+\left(a+1\right)^4}} = \frac{6}{\sqrt{\frac{9}{\left(a+1\right)^2} + \left(a+1\right)^2}}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy $\frac{9}{\left(a+1\right)^2} + \left(a+1\right)^2 \geq 2\sqrt{9} = 6$, Vậy $d \leq \sqrt{6}$

Khoảng cách lớn nhất bằng $\sqrt{6}$ khi:

$$\frac{9}{\left(a+1\right)^2} + \left(a+1\right)^2 \Leftrightarrow \left(a+1\right)^2 = 3 \Leftrightarrow a = -1 \pm \sqrt{3}$$

Vậy có hai điểm M: $M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right), M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$.

Chọn A.

Bài 7: Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}\left(C\right)$ sao cho tiếp tuyến tại M của $\left(C\right)$ cắt hai tiệm cận của $\left(C\right)$ tại A, B và có độ dài AB ngắn nhất.

A. $M(3;3), M\left(0;\frac{3}{2}\right)$

B. $M(3;3), M\left(4;\frac{5}{2}\right)$

C. $M\left(6;\frac{9}{4}\right), M(1;1)$

D. $M(3;3), M(1;1)$.

Giải:

$$y' = -\frac{1}{(x-2)^2}$$

Ta có:

Giả sử $M\left(a;\frac{2a-3}{a-2}\right) \in (C), a \neq 2.$ Ta có: $y'(a) = -\frac{1}{(a-2)^2}$.

Tiếp tuyến tại M có phương trình $\Delta: y = -\frac{1}{(x-2)^2}(x-a) + \frac{2a-3}{a-2}$

Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là: $A\left(2;2+\frac{2}{a-2}\right)$

Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là: $B(2a-2;2)$

Ta có: $AB^2 = 4\left[(a-2)^2 + \frac{1}{(a-2)^2}\right] \geq 8$.

Dấu "=" xảy ra khi $(a-2)^4 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-2=1 \\ a-2=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=1 \end{array}\right.$

Vậy điểm M cần tìm có tọa độ là: $M(3;3), M(1;1)$.Chọn D.

Bài 8: Tìm tất cả các giá trị thực của thàm số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1(C)$, đường thẳng $d: y = mx + m + 3$ giao nhau tại $A(-1;3), B, C$ và tiếp tuyến của (C) tại B và C vuông góc nhau.

A. $\left[\begin{array}{l} m = \frac{-3+2\sqrt{2}}{3} \\ m = \frac{-3-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l} m = \frac{-2+2\sqrt{2}}{3} \\ m = \frac{-2-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-4+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\dfrac{-4-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

D. $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-5+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\dfrac{-5-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

Giải:

Ta có: $y'=3x^2-3$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d):

$x^3-(m+3)x-m-2=0 \Leftrightarrow (x+1)\left(x^2-x-m-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, y=3 \\ x^2-x-m-2=0(*) \end{array}\right.$

Để hàm số (C) cắt d tại 3 điểm phân biệt thì (*) có 2 nghiệm phân biệt khác -1, nên:

$\begin{cases} \Delta>0 \\ f(-1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{9}{4} \\ m\neq 0 \end{cases}$

Giả sử $x_B; x_C$ là nghiệm của (*), hệ số góc của tiếp tuyến:

$k_B=3x_B^2-3; k_C=3x_C^2-3$

Theo giả thiết:

$k_B.k_C=-1 \Leftrightarrow \left(3x_B^2-3\right)\left(3x_C^2-3\right)=-1 \Leftrightarrow 9m^2+18m+1=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-3+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\dfrac{-3-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

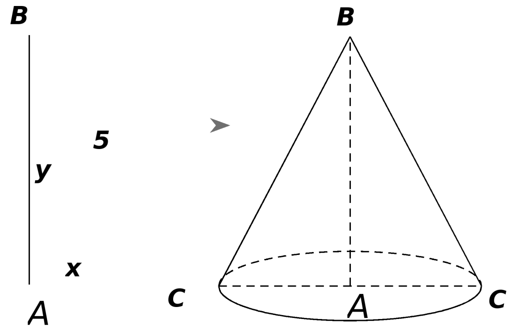
Vậy với $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{-3+2\sqrt{2}}{3} \\ m=\dfrac{-3-2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$ thỏa ycbt.

Chọn A.

ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG I

ĐỀ SỐ 1.

Bài 1: cho tam giác vuông ABC có độ dài cạnh huyền bằng 5(đơn vị độ dài). Người ta quay tam giác ABC quanh trục một cạnh góc vuông để sinh ra hình nón, với kích thước nào của tam giác ABC thì hình nón sinh ra có thể tích lớn nhất?



A. $x=5\sqrt{\frac{2}{3}}, y=\frac{5}{\sqrt{3}}$

B. $x=3, y=4$.

C. $x=\sqrt{10}, y=\sqrt{15}$

D. Một kết quả khác.

Giải:

$$V_n=\frac{1}{3}.S_d.h=\frac{1}{3}.\pi x^2.y=\frac{1}{3}.\pi\left(25-y^2\right).y$$

$$f(y)=\left(25-y^2.y=-y^3+25y\right)$$

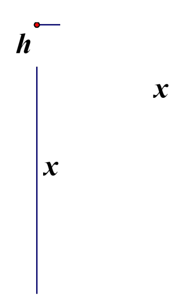
$$f'(y)=-3y^2+25=0 \Leftrightarrow y=\frac{5}{\sqrt{3}}$$

BBT

y	0		$\frac{5}{\sqrt{3}}$		5
$f'(y)$		+		$-$	
$f(y)$		$\nearrow$	Max	$\searrow$	

Vậy $x=5\sqrt{\frac{2}{3}}, y=\frac{5}{\sqrt{3}}$. Chọn A.

Bài 2: Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo hình mẫu. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh $x(cm)$, chiều cao là $h(cm)$ và có thể tích là $500\left(cm^3\right)$. Hãy tìm độ dài cạnh của hình vuông sao cho chiếc hộp được làm ra tốn ít nhiên liệu nhất:



A. $5cm$

B. $10cm$

C. $2cm$

D. $3cm$

Giải:

$V = x^2.h = 500 \Rightarrow h = \dfrac{500}{x^2}$

$S = x^2 + 4xh = x^2 + \dfrac{2000}{x}$

$f\left(x\right) = x^2 + \dfrac{2000}{x}$

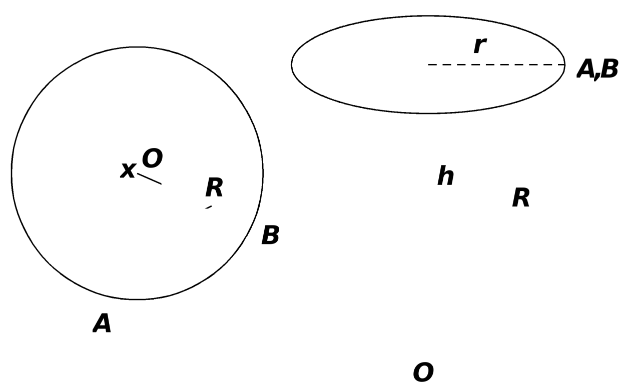
$\Rightarrow f'(x) = 2x - \dfrac{2000}{x^2}\left(x \in \left(0;10\sqrt{5}\right)\right)$

$f'\left(x\right) = 0 \Rightarrow x = 10$

X	0		10		$10\sqrt{5}$
$f\left(x\right)$	$\Vert$	$\searrow$	300	$\nearrow$	589

$\Rightarrow x = 10$ (thỏa mãn). Chọn B.

Bài 3: Huyền có một tấm bìa hình tròn như hình vẽ, Huyền muốn biến hình tròn đó thành một cái phễu hình nón. Khi đó Huyền phải cắt bỏ hình quạt tròn AOB rồi dán hai bán kính OA và OB lại với nhau. Gọi x là góc ở tâm hình quạt tròn dùng làm phễu. Tìm x để thể tích phễu lớn nhất?



A. $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

B. $\dfrac{\pi}{3}$

C. $\dfrac{\pi}{2}$

D. $\dfrac{\pi}{4}$

Giải:

$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$

$$R^2 = h^2 + r^2 = const \Rightarrow r^2 = R^2 - h^2$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 - h^2\right) = f\left(h\right)$$

$$f\left(h\right) = \frac{1}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi h^3; f'\left(h\right) = \frac{1}{3}\pi R^2 - \pi h^2$$

$$\Rightarrow f'\left(h\right) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow V_{\max} \Leftrightarrow h = \frac{R}{\sqrt{3}} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}.R}{\sqrt{3}}$$

Chu vi đường tròn đáy hình nón là $2\pi r = \frac{2\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$

Ta có:

$2\pi \to 2\pi R$

$x \to \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi R \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

Chọn A.

Bài 4: sau khi phát hiện ra dịch bệnh vi rút Zika, các chuyên gia y tế TP.HCM ước tính số người nhiễm bệnh kể từ khi xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f\left(t\right) = 15t^2 - t^3$. Ta xem $f'\left(t\right)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t. Tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày bao nhiêu?

A. Ngày thứ 10. B. Ngày thứ 15. C. Ngày thứ 20. D. Ngày thứ 25.

Giải:

$$f\left(t\right) = 15t^2 - t^3$$

$$f'\left(t\right) = 30t - 3t^2 = -3\left(t-5\right)^2 + 75 \le 75$$

$$f'\left(t\right)_{\max} = 75 \Leftrightarrow t = 5$$

Bài 5: Có một mảnh đất hình vuông ABCD cạnh a. Người ta cần làm một cái trại có đáy là hình thang ABCM với điểm M thuộc cạnh AD và $AM = x\ \left(0 \le x \le a\right)$. Dựng cái cột vuông góc với $mp\left(ABCD\right)$ tại A. Giả sử đỉnh cột là S, chiều cao cột là $y, \left(y > 0\right)$. Nếu $x^2 + y^2 = a^2$, giá trị lớn nhất của thể tích trại dạng chóp S.ABCM là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{32}$.

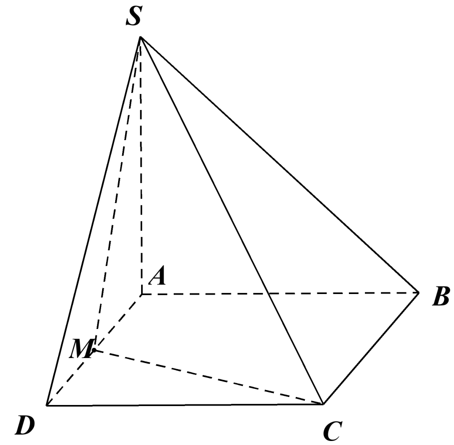
Giải:

$$AM = x \Leftrightarrow DM = a - x$$

$$S_{ABCM} = a^2 - \frac{1}{2}(a-x)a = \frac{1}{2}a(a+x)$$

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$V_{S.ABCM} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCM} = \frac{1}{6}a(a+x)\sqrt{a^2-x^2}$$



Xét hàm số:

$$f(x) = a(a+x)\sqrt{a^2-x^2}, x \in [0;a]$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -a \\ x = \dfrac{a}{2} \end{array}\right.$$

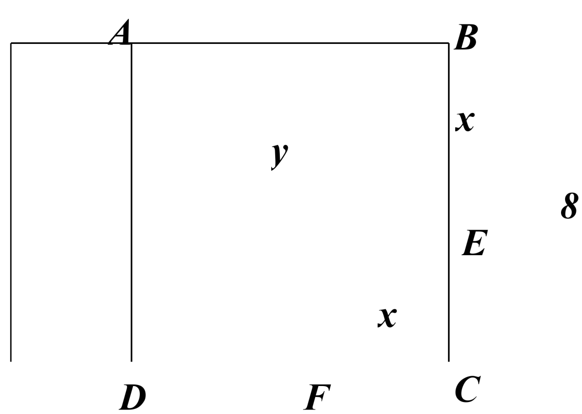
BBT

X	0		$\frac{a}{2}$		a
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	

$$\Rightarrow V_{\max} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \Rightarrow V_{S.ABCM} = \frac{a\sqrt[3]{3}}{8}$$

. Chọn B.

Bài 6: Cho một tờ giấy hình chữ nhật với chiều dài 12cm và chiều rộng 8cm. Gấp góc bên phải của tờ giấy sao cho sau khi gấp, đỉnh của góc đó chạm đáy dưới như hình vẽ. Để độ dài nếp gấp là nhỏ nhất thì giá trị nhỏ nhất đó bằng bao nhiêu?



A. $6\sqrt{5}$

B. $6\sqrt{2}$

C. 6

D. $6\sqrt{3}$

Giải:

$$EF = x, EC = 8 - x$$

$$FC = \sqrt{x^2 - (8-x)^2}$$

$$= \sqrt{16x - 64}$$

$$\Delta ADF : \Delta FCE(g.g) \Rightarrow \frac{EF}{AF} = \frac{CF}{AD}$$

$$AF = \frac{EF.AD}{FC} = \frac{8x}{\sqrt{16x-64}}$$

$$y = AE = \sqrt{AF^2 + EF^2} = \sqrt{\frac{64x^2}{16x-64} + x^2} = \sqrt{\frac{16x^3}{16x-64}}$$

$$f(x) = \frac{16x^3}{16x-64}, x \in (0;8)$$

$$f'(x) = \frac{48x^2(16x-64) - 16.16x^3}{(16x-64)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 768x^3 - 3072x^2 - 256x^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 512x^3 - 3072x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

BBT

X		6		
	0		8	
$f'(x)$	−	0	+	
$f(x)$	↘	108	↗	

$$y = \sqrt{f(x)} \Rightarrow y_{\min} = \sqrt{f_{\min}} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

. Chọn D.

Bài 7: Cần đặt một ngọn điện ở phía trên và chính giữa một cái bàn hình tròn có bán kính a. Hỏi phải treo ở độ cao bao nhiêu để mép bàn được nhiều ánh sáng nhất. Biết rằng cường độ sáng C được biểu thị bởi công thức $C = k\frac{\sin\alpha}{r^2}$ (α là góc nghiêng giữa tia sáng và mép bàn, k là hằng số tỷ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng).

A. $h = \frac{3a}{2}$ B. $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ C. $h = \frac{a}{2}$. D. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Giải:

$R^2 - a^2 + h^2$ (Định lý Py-ta-go)

$$\sin\alpha = \frac{h}{R} = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$$

$$\Rightarrow C = k\frac{\sin\alpha}{R^2} = k\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}\left(a^2+h^2\right)}$$

$$f\left(h\right) = \frac{h}{\left(\sqrt{a^2+h^2}\right)^3}\left(h>0\right)$$

Xét hàm

$$f'\left(h\right) = \frac{\sqrt{\left(h^2+a^2\right)^3} - 2h^2.\frac{3}{2}.\sqrt{a^2+h^2}}{\left(a^2+h^2\right)^3}$$

$$f'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\left(h^2+a^2\right)^3} = 3.h^2.\sqrt{a^2+h^2} \Leftrightarrow h^2+a^2 = 3h^2 \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

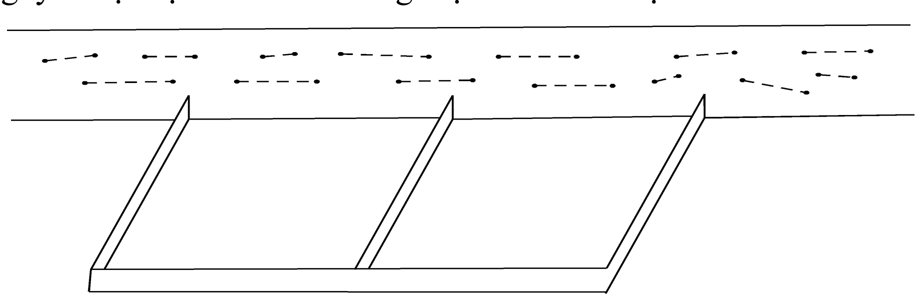
BBT

h	0		$\frac{a\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'\left(h\right)$		$+$	0	$-$	
$f\left(h\right)$		$\nearrow$	Max	$\searrow$	

$$f\left(h\right)_{\max} \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow C = k.f\left(h\right)_{\max} \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

. Chọn B.

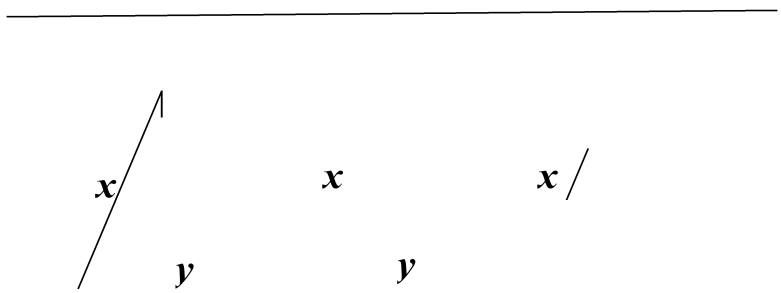
Bài 8: Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí vật liệu là 60 000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng một mét. Tìm diện tích lớn nhất của đất rào thu được.



A. $6250\left(m^2\right)$ B. $1250\left(m^2\right)$ C. $3250\left(m^2\right)$ D. $50\left(m^2\right)$

Giải:

Phân tích ta đặt các kích thước của hàng rào như hình vẽ



Từ đề bài ban đầu ta có được mối quan hệ sau:
Do bác nông dân trả 15000000 đồng để chi trả cho nguyên vật liệu và đã biết giá thành từng mặt nên ta có mối quan hệ:

$$3x.50\ 000+2y.60\ 000=15\ 000\ 000$$

$$\Leftrightarrow 15x+12y=1500$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1500-15x}{12}=\frac{500-5x}{4}$$

Diện tích của khu vườn sau khi đã rào được tính bằng công thức:

$$f(x)=2xy=2x.\frac{500-5x}{4}=\frac{1}{2}\left(-5x^2+500x\right)$$

Cách 1: Xét hàm số trên một khoảng, vẽ bảng biến thiên và kết luận GTLN:

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{2}\left(-5x^2+500x\right)$ trên (0;100)

$$f'\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(-10x+500\right),\ f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=50$$

BBT

x	0		50		100
$f'\left(x\right)$		+	0	−	
$f\left(x\right)$		↗	6250	↘	

Cách 2: Nhẩm nhanh như sau: Ta biết rằng $A-g^2\left(x\right)\le A$ với mọi x, nên ta có thể nhẩm nhanh như sau:

$$f(x)=\frac{5}{2}\left(-x^2+100x\right)=\frac{5}{2}\left(-x^2+2.50x-2500+2500\right)$$

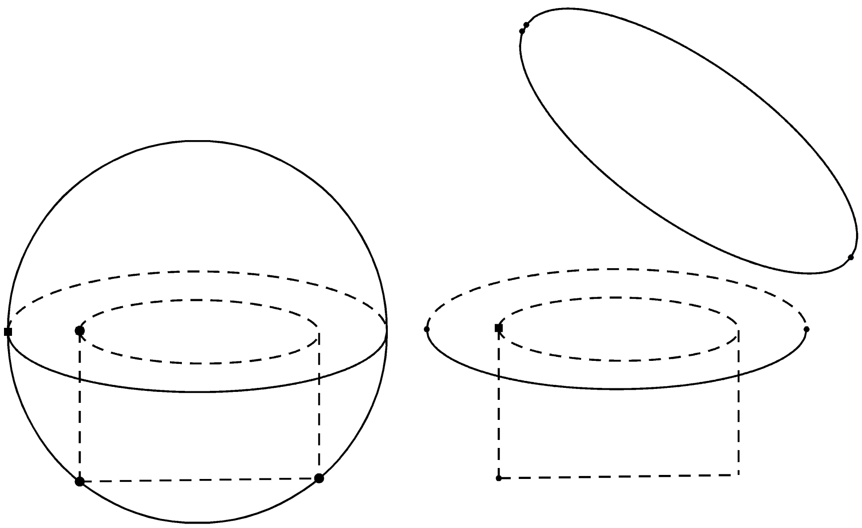
$$=\frac{5}{2}.\left[2500-\left(x-50\right)^2\right]\le 6250$$

Hoặc bấm máy tính phần giải phương trình bậc hai và ấn bằng nhiều lần máy sẽ hiện như sau

X-Value Maximum= 50	Y-Value Maximum= 6250

Vậy chọn A.

Bài 9: Công ty mỹ phẩm chuẩn bị ra một mẫu sản phẩm dưỡng da mới mang tên Ngọc Trai. Với thiết kế là khối cầu như viên ngọc trai khổng lồ, bên trong là một khối trụ bên trong nửa khối cầu để đựng kem dưỡng, như hình vẽ (hình ảnh chỉ mang tính chất minh họa). Theo dự kiến nhà sản xuất có dự định để khối cầu có bán kính là $R = 3\sqrt{3}cm$. Tìm thể tích lớn nhất của khối trụ đựng kem để thể tích thực ghi trên bìa hộp là lớn nhất (với mục đích thu hút khách hàng).



A. $54\pi cm^3$ B. $18\pi cm^3$ C. $108\pi cm^3$ D. $45\pi cm^3$

Giải:

Phân tích: Đậy là một bài thực tế dựa trên ứng dụng: khối trụ nội tiếp nửa khối cầu. Ta có mặt cắt của nửa khối cầu đựng mĩ phẩm với các kích thước được thể hiện trong hình vẽ sau:

Ý tưởng của bài này dựa trên kiến thức chúng ta đã học là tìm GTLN-GTNN của hàm số một biến trên 1 khoảng (đoạn). Owr đây có hai biến đó là r và h. Do đó ta sẽ tìm cách để đưa về một biến, đưa biến này theo biến kia. ở đây tôi sẽ đưa r theo h

Ta nhận thấy theo định lý pytago thì $r^2 = R^2 - h^2$

Khi đó: $V_{tru_g} = B.h = \pi r^2.h = \pi\left(R^2 - h^2\right).h = \pi\left(-h^3 + R^2.h\right)$

Để thể tích khối trụ lớn nhất thì $f\left(h\right) = -h^3 + R^2.h$ có GTLN trên $\left(0; R\right)$

$$f'(h) = -3h^2 + R^2 = 0 \Leftrightarrow h = \frac{R}{\sqrt{3} = 3}$$

BBT

(Khi giải trắc nghiệm không cần vẽ bảng biến thiên)

h	0	$\frac{R}{\sqrt{3}}$	R
$f'(h)$	$+$	0	$-$
$f(h)$		$f\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)$	

$$f\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right) = f(3) = -3x^3 + \left(3\sqrt{3}\right)^2.3 = 54$$

Mà

$$V_{\max} = 54\pi$$

Vậy

Chọn A.

Bài 10: Một cái mương được gọi là dạng "Thủy động học" nếu với diện tích thiết diện ngang xác định thì chiều dài đường biên giới hạn là nhỏ nhất. Người ta cần một cái mương dẫn nước với thiết diện ngang là hình chữ nhật có $2m^2$. Hãy xác định kích thước của mương dẫn nước trên để mương có dạng "Thủy động học"?

A. $1m$ và $2m$.
B. $\frac{1}{2}m$ và $4m$.

C. $\frac{3}{2}m$ và $\frac{4}{3}m$.
D. $\frac{2}{3}m$ và $3m$.

Giải:

Cách 1:

Chiều dài đường biên là:

$$2x + \frac{2}{x} = f(x) \quad \left(x \in (0;2)\right)$$

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

X	0	1	2

$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	4	$\nearrow$	

Vậy kích thước mương là 1m và 2m.

Cách 2:

$$x.y = 2$$

Diện tích ngang:

Chiều dài đường biên:

$x + x + y = 2x + y \geq 2\sqrt{2xy} = 4$

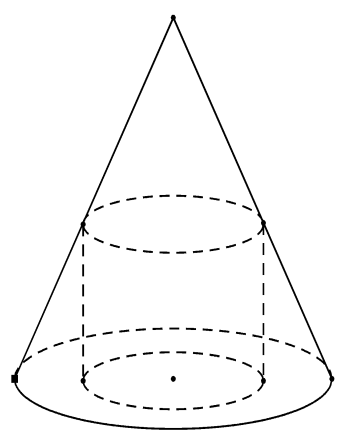
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$\begin{cases} xy = 2 \\ 2x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

.

Chọn A.

Bài 11: Khi sản xuất hộp mì tôm, các nhà xuất luôn để một khoảng trống nho nhỏ ở dưới đáy hộp để nước chảy xuống dưới và ngấm vào thớ mì, giúp mì chín. Hình vẽ dưới mô tả cấu trúc của một hộp mì tôm (hình vẽ chỉ mang tính chất minh họa). Thớ mì tôm có dạng hình trụ, hộp mì tôm có dạng hình nón cụt được cắt ra bởi hình nón có chiều có 9cm và bán kính đáy 6cm. Nhà sản xuất đang tìm cách để sao cho thớ mì tôm có thể tích lớn nhất trong hộp với mục đích thu hút khách hàng. Tìm thể tích lớn nhất đó?



A. $V = 36\pi$ B. $V = 54\pi$ C. $V = 48\pi$ D. $V = \dfrac{81}{2}\pi$

Giải:

Cách 1:

Gọi độ dài $IA = x; (0 < x < 6)$. Khi đó: $r = 6 - x;$

Gọi $KI = R$

$$\Delta ABO : \Delta AKI \Rightarrow \frac{KI}{BO} = \frac{AI}{AO} \Leftrightarrow \frac{R}{BO} = \frac{x}{AO} \Rightarrow R = \frac{9x}{6}$$

Suy ra $V_{tru} = \pi r^2 R = \pi (6 - x)^2 . \dfrac{9x}{6}$

Hình trụ có thể tích lớn nhất khi hàm số:

$y = (6 - x)^2 . \dfrac{9x}{6} = \dfrac{3}{2}x^3 - 18x^2 + 54x$ đạt GTLN

$$y' = \frac{9}{2}x^2 - 36x + 54$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{2}x^2 - 36x + 54 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

BBT

X	0		2		6
y'		+	0	−	
y		↗	48	↘	

Vậy $x = 2 \Rightarrow V = 48\pi$.

Cách 2:

Đặt

$$\begin{cases} BK = x & (0 < x < 6) \\ \widehat{ABH} = \alpha & (0 < \alpha < 90^0) \end{cases}$$

$$h = BK.\tan\alpha = \frac{9x}{6}$$

$$r = 6 - x$$

$$\Rightarrow V = \pi r^2 h = \pi.(6-x)^2.\frac{9x}{6} = \pi\frac{3}{4}(6-x)(6-x).2x \le \frac{3\pi}{4}.\left(\frac{12}{3}\right)^3 = 48\pi$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ klhi x=2. Chọn C.

Bài 12: Một cái ống có đường kính không đáng kể được mang từ một hẻm $8m$ sang một cái hẻm $4m$ (hình vẽ). Hỏi chiều dài dài nhất của cái ống là bao nhiêu?

A. $12\sqrt{2}$

B. $4\left(1+\sqrt[3]{4}\right)$

C. $\left(1+\sqrt[3]{2}\right)^{\frac{3}{2}}$

D. $4\left(1+\sqrt[3]{2^2}\right)^{\frac{3}{2}}$

Giải:

$$8 = y_1.\sin\alpha$$

$$4 = y_2.\cos\alpha$$

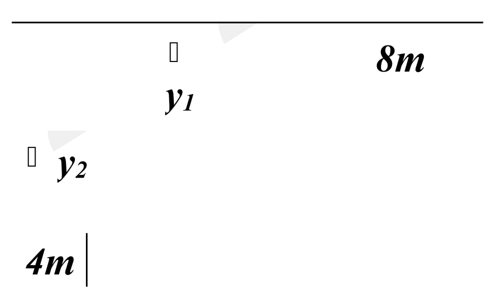
$$y_1 + y_2 = y = \frac{8}{\sin\alpha} + \frac{4}{\cos\alpha}$$

$$y' = \frac{-8\cos x\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{4\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{-8\cos^3\alpha + 4\sin^3\alpha}{\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}$$

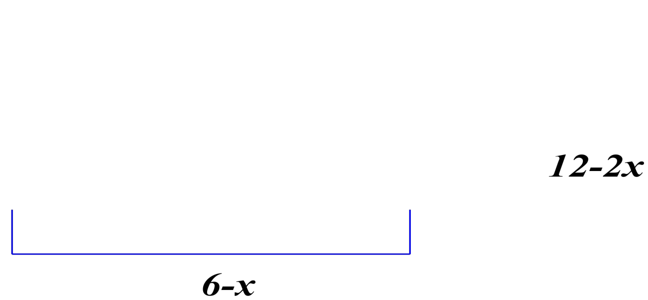
$$y' = 0 \Leftrightarrow -8\cos^3\alpha + 4\sin^3\alpha = 0 \Leftrightarrow (\tan\alpha)^3 = 2 \Leftrightarrow \alpha = 0{,}899$$

$$y_{max} = \frac{8}{\sin\alpha} + \frac{4}{\cos\alpha} = 16{,}64.$$



Chọn D.

Bài 13: một hộp đựng Chocolate bằng kim loại có hình dạng lúc mở nắp như hình vẽ dưới đây. Một phần tư thể tích phía trên của hình hộp được rải một lớp bơ sữa ngọt, phần còn lại phía dưới là chứa đầy chocolate nguyên chất. Với kích thước như hình vẽ, gọi $x = x_0$ là giá trị làm cho hộp kim loại có thể tích lớn nhất, khi đó thể tích chocolate nguyên chất có giá trị là V_0. Tìm V_0.



A 48 đvdt B. 16 đvdt C. 64 đvdt D. $\frac{64}{3}$ đvdt.

Giải:

Thể tích của hộp:

$V_h = (6-x).(12-2x).x$

$\Rightarrow V_0 = \frac{3}{4}(6-x).(12-2x).x = \frac{3}{4}(6-x)(6-x).2x$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{3}{4}.(6-x)(6-x).2x \le \frac{3}{4}.\left(\frac{12}{3}\right)^3 = 48$$

Cách 2:

Thể tích của hộp

$$V_h = (6-x)(12-2x)x = 2x(6-x)^2$$

Thể tích phần chocolate nguyên chất:

$f(x) = V_0 = \frac{3}{4}V = \frac{3}{2}x(6-x)^2$

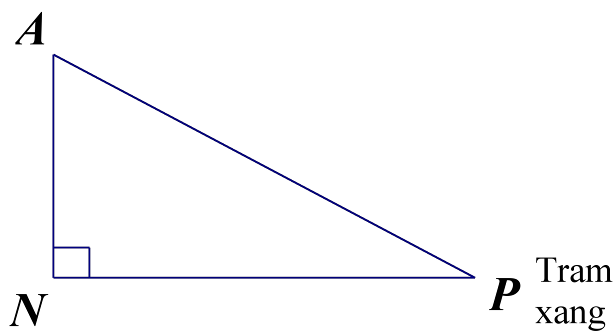
$f'(x) = \frac{3}{2}\left[(6-x)^2 - 2x(6-x)\right] = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 24x + 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 6 \end{array}\right.$

$V_0(6) = 0; V_0(2) = 48$

Vậy thể tích chocolate lớn nhất là $V_0 = 48$ khi $x = x_0 = 2$

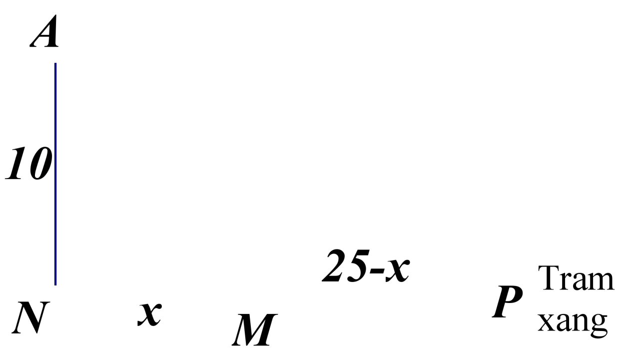
Chọn A.

Bài 14: Một nhà địa chất đang ở vị trí A trong sa mạc, cách con đường thẳng $10km\left(AN = 10km \right)$. Trên con đường thì xe của nhà địa chất có thể chạy với vận tốc $50km/h$ nhưng trên sa mạc thì nó chỉ chạy được với vận tốc $30km/h$. Nhà địa chất muốn đên một trạm xăng ở vị trí P để tiếp nhiên liệu ở vị trí xuôi theo đường $25km\left(NP = 25km \right)$. Tìm thời gian ngắn nhất để nhà địa chất đến được vị trí trạm xăng P.



A. 44 phút B. 45 phút C. 46 phút D. 47 phút.

Giải:



Gọi đoạn MN là $x \Rightarrow MP = 25 - x$

ΔAMN vuông tại N

Suy ra : $AM = \sqrt{10^2 + x^2}$

Khi đó thời gian để nhà địa chất đến trạm xăng là:

$$T = \frac{\sqrt{10^2 + x^2}}{30} + \frac{25 - x}{50}$$

Thời gian T ngắn nhất khi hàm số $y = \frac{\sqrt{10^2 + x^2}}{30} + \frac{25 - x}{50}$ đạt GTNN.

$y' = \dfrac{5x - 3\sqrt{x^2 + 10^2}}{150.\sqrt{x^2 + 10^2}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow 5x - 3\sqrt{x^2 + 10^2} = 0 \Leftrightarrow x = 7,5$

BBT

X	0		7,5		25
y'		$-$	0	$+$	
y		↘	$\dfrac{23}{30}$	↗	

$T_{\min} = \dfrac{23}{30}(h) = 46\,phut$

Vậy . chọn C.

Bài 15: Một lão nông chia đất cho con trai để người con canh tác riêng, biết người con sẽ được chọn miếng đất hình chữ nhật có chu vi bằng 800m. Hỏi anh ta chọn mỗi kích thước của nó bằng bao nhiêu để diện tích canh tác lớn nhất?

A. $200m \times 200m$
B. $300m \times 100m$
C. $250m \times 150m$
D. Chọn khác.

Gọi chiều dài và chiều rộng của miếng đất lần lượt là:

$x(m), y(m) \quad (x, y > 0)$

Diện tích miếng đất $S = x.y$

Theo đề $2(x + y) = 800$ hay $y = 400 - x$

Do đó: $S = x(400 - x) = -x^2 + 400x \quad (x > 0)$

Đạo hàm:

$S'(x) = -2x + 400$

$S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 200$

Lập bảng biến thiên ta được $S_{\max} = 40000$ khi x=200, y=200.

Kết luận: kích thước của miếng đất hình chữ nhật là $200m \times 200m$ (là hình vuông)

Lưu ý: có thể giải bằng BĐT Cauchy.

Chọn A.