CHƯƠNG 01:
BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO CHUYÊN ĐỀ
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM

CHỦ ĐỀ 1. CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI

Đầu tiên xin nhắc lại các kiến thức về đạo hàm, đây là phần kiến thức trong chương trình toán THPT lớp 11 học kì II.

1. Định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và điểm $x_0\in(a;b)$ nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ hữu hạn thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y=f(x)$ tại x_0.

Ký hiệu $y'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ hoặc $f'(x_0)$

Lưu ý: Nếu hàm số có đạo hàm trong khoảng $(a;b)$ thì liên tục trên khoảng đó nhưng ngược lại thì chưa chắc đúng.

2. Các quy tắc tính đạo hàm

Chú ý: $u=u(x), v=v(x)$

•$(u\pm v)'=u'\pm v'$

•$(u.v)'=u'.v+u.v'$ *và* $(ku)'=ku'$

•$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'.v-v'.u}{v^2}$ *và* $\left(\frac{k}{v}\right)'=-\frac{k.v'}{v^2};(v\neq 0)$

BẢNG CÔNG THỨC ĐẠO HÀM THƯỜNG GẶP

Hàm số cơ bản	Hàm số hợp
$(C)'=0$ *(C là hằng số)*	
$(x)'=1$	
$\left(x^\alpha\right)'=\alpha.x^{\alpha-1}$	$\left(u^\alpha\right)'=\alpha.u^{\alpha-1}.u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ với $x\neq 0$	$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$ với $u\neq 0$
$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ với x>0	$\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ với u>0
$(\sin x)'=\cos x$	$(\sin u)'=u'.\cos u$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\cos u)'=-u'.\sin u$
$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$ với $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$	$(\tan u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$ với $u\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ với $x \neq k\pi$	$(\cot u)' = -\dfrac{u}{\sin^2 u}$ với $u \neq k\pi$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ với $x > 0$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ với $u > 0$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$ với $x > 0$	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u\ln a}$ với $u > 0$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u'.e^u$
$(a^x)' = a^x.\ln a$	$(a^u)' = u'.a^u.\ln a$

Tiếp theo xin trình bày cách tìm GTLN, GTNN của hàm số một biến bằng đạo hàm, đây là kỹ năng cực kỳ quan trọng để ứng dụng giải các Bài toán thực tế.

3. Định nghĩa GTLN, GTNN

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trong khoảng K (đoạn, khoảng, nửa khoảng)

+ Nếu có $x_0 \in K$ sao cho $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in K$ thì $f(x_0)$ được gọi là giá trị lớn hất của hàm số trên khoảng K. Kí hiệu: $\max\limits_K y = f(x_0)$

+ Nếu có $x_0 \in K$ sao cho $f(x) \geq f(x_0), \forall x \in K$ thì $f(x_0)$ được gọi là giá trị nhỏ hất của hàm số trên khoảng K. Kí hiệu: $\min\limits_K y = f(x_0)$.

4. Phương pháp tìm GTLN, GTNN.

Bài toán 1: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng K:

Phương pháp: Lập bảng biến thiên trên khoảng K, rồi nhìn trên đó để kết luận max, min.

Bài toán 2: Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a;b]$:

Phương pháp 1: Lập bảng biến thiên trên khoảng đó và kết luận.

Phương pháp 2: Nếu hàm số f(x) liên tục trên đoạn [a;b] thì ta có các bước làm sau:

1. Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ đã cho.

2. Tìm các điểm $x_1; x_2; ...; x_n$ trên đoạn $[a;b]$, tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

3. Tính: $f(a); f(x_1); f(x_2); ...; f(x_n); f(b)$.

4. Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên (ở mục 3)

Khi đó: $M = \max\limits_{[a;b]} f(x); \text{m} = \min\limits_{[a;b]} f(x)$

Chú ý:

1. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì hàm số f(x) luôn tồn tại giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất và tất cả các giá trị trung gian nằm giữa giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số f(x) trên đoạn đó.

2. Nếu đề bài không cho rõ tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng, đoạn nào cón nghĩa là ta tìm GTLN, GTNN của hàm số trên tập xác định của hàm số đó.

3. Tính đạo hàm y'. Nếu $y' \geq 0, \forall x \in [a;b] \Rightarrow \begin{cases} \min f(x) = f(a) \\ \max f(x) = f(b) \end{cases}$

4. Tính đạo hàm y'. Nếu $y' \leq 0, \forall x \in [a;b] \Rightarrow \begin{cases} \min f(x) = f(b) \\ \max f(x) = f(a) \end{cases}$

Ngoài ra cần trang bị thêm một số kiến thức về bất đẳng thức cơ bản để giải quyết các bài này nhanh hơn:

5. Bất đẳng thức Cauchy cho 2 và 3 số:

Hai số: Với $A, B \geq 0$ ta luôn có $A + B \geq 2\sqrt{AB}$, dấu bằng xảy ra khi $A = B$

Ba số: Với $A, B, C \geq 0$ ta luôn có $A + B + C \geq 3\sqrt[3]{ABC}$, dấu bằng xảy ra khi $A = B = C$

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Dạng 1.

Một số bài toán ứng dụng về kinh doanh, sản suất trong cuộc sống.

Ý tưởng giải là cố gắng thiết lập một hàm số một biến sau đó ứng dụng đạo hàm để tìm GTLN, GTNN.

Bài 1:

Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

A. 2.250.000 B. 2.350.000 C. 2.450.000 D. 2.550.000

Lời giải:

Gọi x là giá thuê thực tế của mỗi căn hộ, (x: đồng ; $x \geq 2000.000$ đồng)

Ta có thể lập luận như sau:

Tăng giá 100.000 đồng thì có 2 căn hộ bị bỏ trống.

Tăng giá $x - 2.000.000$ đồng thì có bao nhiêu căn hộ bị bỏ trống.

Theo quy tắc tam xuất ta có số căn hộ bị bỏ trống là:

$$\frac{2(x - 2.000.000)}{100.000} = \frac{x - 2.000.000}{50.000}$$

Do đó khi cho thuê với giá x đồng thì số căn hộ cho thuê là:

$$50 - \frac{x - 2.000.000}{50.000} = -\frac{x}{50.000} + 90$$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được khi cho thuê các căn hộ, (F(x): đồng).

Ta có: $F(x)=\left(-\frac{x}{50.000}+90\right)x=-\frac{1}{50.000}x^2+90x$ (bằng số căn hộ cho thuê nhân với giá cho thuê mỗi căn hộ).

Bài toán trở thành tìm GTLN của $F(x)=-\frac{1}{50.000}x^2+90x$, ĐK: $x\geq 2.000.000$

$F'(x)=-\frac{1}{25.000}x+90$

$F'(x)=0\Leftrightarrow -\frac{1}{25.000}x+90=0\Leftrightarrow x=2.250.000$

Bảng biến thiên:

X	2.000.000		2.250.000		$+\infty$
F'(x)		+	0	−	
F(x)		$\nearrow$	F_{max}	$\searrow$	

Suy ra F(x) đạt giá trị lớn nhất khi $x=2.250.000$

Vậy công ty phải cho thuê với giá 2.250.000 đồng mỗi căn hộ thì được lãi lớn nhất.

Chọn A.

Nhận xét:

Sau khi tìm được hàm $F(x)=-\frac{1}{50.000}x^2+90x$. Ta không cần phải đi khảo sát và vẽ bảng biến thiên như trên. Đề đã cho bốn đáp án x, ta dùng phím CALC của MTCT để thay lần lượt các giá trị vào, cái nào làm cho F(x) lớn nhất chính là giá trị cần tìm.

Bài 2:

Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30.000 đồng.

A. 44.000đ B. 43.000đ C. 42.000đ D. 41.000đ

Lời giải:

Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng, (x: đồng; $30.000 \le x \le 50.000$ đồng).

Ta có thể lập luận như sau:

Giá 50.000 đồng thì bán được 40 quả bưởi

Giảm giá 5.000 đồng thì bán được thêm 50 quả.

Giảm giá 50.000 – x thì bán được thêm bao nhiêu quả?

Theo quy tắc tam xuất số quả bán thêm được là:

$$(50000-x).\frac{50}{5000}=\frac{1}{100}(50000-x).$$

Do đó Số quả bưởi bán được tương ứng với giá bán x:

$$40+\frac{1}{100}(50000-x)=-\frac{1}{100}x+540$$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($F(x)$: đồng).

Ta có: $F(x)=\left(-\frac{1}{100}x+540\right).(x-30.000)=-\frac{1}{100}x^2+840x-16.200.000$

Bài toán trở thành tìm GTLN của

$F(x)=-\frac{1}{100}x^2+840x-16.200.000$, Đk: $30.000 \le x \le 50.000$.

$$F'(x)=-\frac{1}{50}x+840$$

$$F'(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{50}x+840=0 \Leftrightarrow x=42.000$$

Vì hàm F(x) liên tục trên $30.000 \le x \le 50.000$ nên ta có:

$$F(30.000)=0$$

$$F(42.000)=1.440.000$$

$$F(50.000)=800.000$$

Vậy với $x=42.000$ thì $F(x)$ đạt GTLN.

Vậy để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất thì giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng là 42.000 đồng.

Chọn C.

Bài 3. Một xe khách đi từ Việt Trì về Hà Nội chở tối đa được là 60 hành khách một chuyến. Nếu một chuyến chở được m hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách được tính là $\left(30-\frac{5m}{2}\right)^2$ đồng. Tính số hành khách trên mỗi chuyến xe để nhà xe thu được lợi nhuận mỗi chuyến xe là lớn nhất.?

A. 30 B. 40 C. 50 D. 60

Lời giải:

Gọi x là số hành khách trên mỗi chuyến xe để số tiền thu được là lớn nhất, $(0 < x \le 60)$

Gọi F(x) là hàm lợi nhuận thu được (F(x): đồng)

Số tiền thu được :

$$F(x) = \left(300 - \frac{5x}{2}\right)^2 .x = 90.000x - 1500x^2 + \frac{25}{4}x^3$$

Bài toán trở thành tìm x để F(x) đạt giá trị lớn nhất.

$$F'(x) = 90000 - 3000x + \frac{75}{4}x^2$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow 90000 - 3000x + \frac{75}{4}x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 120(loai) \\ x = 40(\mathrm{t/\ m}) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

X	0		40		60
F'(x)		+	0	−	
F(x)			$F_{\max}$		

Vậy để thu được số tiền lớn nhất thì trên mỗi chuyến xe khách đó phải chở 40 người.

Chọn B.

Bài 4.

Một công ty chuyên sản xuất thùng phi nhận được đơn đặt hàng với yêu cầu là thùng phi phải chứa được $16\pi\left(m^3\right)$ mỗi chiếc. Hỏi chiếc thùng phải có kích thước như thế nào để sản suất ít tốn vật liệu nhất?

A. $R = 2(m), h = 4(m)$

B. $R = 4(m), h = 2(m)$

C. $R = 3(m), h = 4(m)$

D. $R = 4(m), h = 4(m)$

Lời giải:

Do thùng phi có dạng hình trụ nên:

$$V_{tru} = \pi R^2 h = 16\pi \Leftrightarrow h = \frac{16}{R^2}, (1)$$

Diện tích toàn phần của thùng phi là:

$$S_{Tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R(h + R), (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$S_{Tp} = 2\pi R\left(\frac{16}{R^2} + R\right) = 2\pi\left(\frac{16}{R} + R^2\right)$$

$$S'_{Tp} = 2\pi\left(-\frac{16}{R^2} + 2R\right) = \frac{4\pi}{R^2}\left(R^3 - 8\right)$$

$$S'_{Tp} = 0 \Leftrightarrow \frac{4\pi}{R^2}\left(R^3 - 8\right) = 0 \Leftrightarrow R = 2$$

Bảng biến thiên

R	0	2	$+\infty$
S'(R)	−	0	+
S(R)		$S_{\min}$	

Vậy để sản xuất thùng phi ít tốn vật liệu nhất thì R= 2(m) và chiều cao là h = 4 (m).
Chọn A.

Bài 5.

Gia đình ông Thanh nuôi tôm với diện tích ao nuôi là $100m^2$. Vụ tôm vừa qua ông nuôi với mật độ là $1\left(kg/m^2\right)$ tôm giống và sản lượng tôm khi thu hoạch được khoảng 2 tấn tôm. Với kinh nghiệm nuôi tôm nhiều năm, ông cho biết cứ thả giảm đi $\left(200g/m^2\right)$ tôm giống thì sản lượng tôm thu hoạch được 2,2 tấn tôm. Vậy vụ tới ông phải thả bao nhiêu kg tôm giống để đạt sản lượng tôm cho thu hoạch là lớn nhất? (Giả sử không có dịch bệnh, hao hụt khi nuôi tôm giống).

A. $\frac{230}{3}kg$ B. $70kg$ C. $72kg$ D. $69kg$

Giải:

Số Kg tôm giống mà ông Thanh thả vụ vừa qua: 100.1= 100(kg).
Gọi x (0<x<100) là số kg tôm cần thả ít đi trong vụ tôm tới.
Khối lượng trung bình $1\left(kg/m^2\right)$ tôm giống thu hoạch được: $2000:100=20\left(kg\right)$
Khi giảm 0,2 kg tôm giống thì thì sản lượng tôm thu hoạch tăng thêm là $2\left(kg/m^2\right)$
Gọi $F(x)$ là hàm sản lượng tôm thu được vụ tới $(F(x):kg)$
Vậy sản lượng tôm thu hoạch được trong vụ tới có pt tổng quát là:

$$F(x)=(100-x)\left(20+\frac{3}{8}x\right)=2000+\frac{35}{2}x-\frac{3}{8}x^2$$

Bìa toán trở thành tìm x để F(x) lớn nhất.
Ta có:

$$F'(x)=\frac{25}{2}-\frac{3}{4}x$$

$$F'(x)=0\Leftrightarrow\frac{25}{2}-\frac{3}{4}x=0\Leftrightarrow x=\frac{70}{3}$$

Bảng biến thiên

X	0	$\frac{70}{3}$	100
F'(x)	+	0	−

F(x)	F_{max}

Vậy vụ tới ông Thanh phải thả số kg tôm giống là:

$100-\frac{70}{3}=\frac{230}{3}\approx 76,67(kg)$

Chọn A.

Nhận xét:

Làm sao ta có thể tìm được hàm F(x) và tìm được hệ số $\frac{3}{8}$

Ta có thể hiểu đơn giản như sau: nếu ta không giảm số lượng tôm giống thì sản lượng tôm thu hoạch được là: $100.20=2000(kg)$ tôm.

Nếu ta giảm số $x(kg)$ tôm giống thì số tôm giống cần thả là $100-x$ và số kg tôm thu hoạch được là: $(100-x)(20+mx)\,kg$

Theo giả thiết tôm giống giảm 0,2 (kg/m^2) thì $100m^2$ giảm $x=20kg$, sản lượng thu được là $2200kg$.

Ta có: $(100-20)(20+m20)=2200 \Leftrightarrow m=\frac{3}{8}$

Bài 6.

Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được đo bởi công thức $G(x)=0,25x^2(30-x)$ trong đó $x(mg)$ và x > 0 là lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng bao nhiêu:

A. 15mg B. 30mg C. 40mg D. 20mg

Giải:

Ta có: $G(x)=0,25x^2(30-x)=\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{40}x^3$

$G'(x)=\frac{3}{2}x-\frac{3}{40}x^2$

$G'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-\frac{3}{40}x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0(\text{loai}) \\ x=20(\text{t/ m}) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

X	0		20		$+\infty$
G'(x)		+	0	−	
G(x)			100		

Dựa vào bảng biến thiên thì bênh nhân cần tiêm một lượng thuốc $20mg$

Chọn D.

Bài 7.

Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $G(t) : 45t^2 - t^3$, (kết quả khảo sát được trong 10 tháng vừa qua). Nếu xem $G'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người / ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ:

A. 25 B. 30 C. 20 D. 15

Giải:

Ta có:

$G'(t) = 90t - 3t^2$

$G''(t) = 90 - 6t$

$G''(t) = 0 \Leftrightarrow 90 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 15$

Bảng biến thiên:

T	0		15		$+\infty$
G’’(t)		+	0	−	
G(t)			675		

Vậy tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ 15.

Chọn D.

Bài 8:

Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian $t(h)$ trong ngày cho bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$. Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?

A. $t = 10(h)$ B. $t = 14(h)$ C. $t = 15(h)$ D. $t = 22(h)$

Giải:

Ta có:

$$h' = -3\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$h' = 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow t = -2 + 6k, \left(k \in Z_{(+)}\right)$$

ở đây ta chỉ cần xét một số giá trị

k	1	2	3	4

t	4	10	16	22

Bảng biến thiên:

Ta suy ra được h đạt GTLN khi $t=10$ (h)

Lưu ý: Ngoài cách trên ta có thể làm như sau

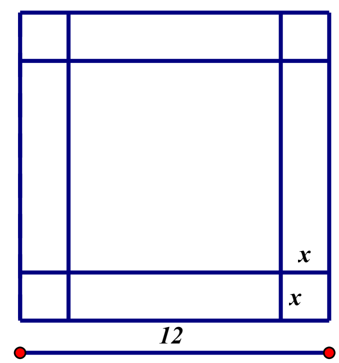
Vì $-1\le cos\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)\le 1\Rightarrow 9\le 3cos\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)+12\le 15.$

Vậy để h lớn nhất thì $cos\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=1\Leftrightarrow t=-2+12k,\left(k\in Z_{(+)}\right)$

Vậy h đạt GTLN khi $t=10$ (h)

Bài 9:

(Đề minh họa Quốc gia 2017): Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh $x(cm)$, rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được cái hộp không nắp. Tìm x để được một cái hộp có thể tích lớn nhất.



A. $x=6(cm)$

B. $x=3(cm)$

C. $x=2(cm)$

D. $x=4(cm)$

Giải:

Khi cắt tấm nhôm hình vuông và gấp thành một cái hộp thì độ dài cạnh của cái hộp là: $12-2x$

Ta có:

$V=S.h=(12-2x)^2.x=4x^3-48x+144x$ với $0<x\le 6$

Bài toán trở thành tìm x để V lớn nhất.

Ta có:

$V'=12x^2-96x+144$

$V'=0\Leftrightarrow 12x^2-96x+144=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=6\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		2		6
V'(x)		+	0	–	
V(x)			128		

Vậy để thể tích hộp lớn nhất thì x =2 cm

Chọn C.

Bài 10:

Cuốn sách giáo khoa cần một trang chữ có diện tích là $384cm^2$. Lề trên và dưới là $3cm$, lề trái và lề phải là $2cm$. Kích thước tối ưu của trang giấy?

A. Dài $24cm$, rộng $17cm$

B. Dài $30cm$, rộng $20cm$

C. Dài $24cm$, rộng $18cm$

D. Dài $24cm$, rộng $19cm$

Giải:

Gọi chiều dài của trang chữ nhật là $x(cm),(x>0)$

Chiều rộng của trang chữ nhật là: $\dfrac{384}{x}cm$

Chiều dài của trang giấy là $x+6(cm)$

Chiều rộng của trang giấy là : $\dfrac{384}{x}+4(cm)$

Diện tích trang giấy: $S=(x+6)\left(\dfrac{384}{x}+4\right)=408+4x+\dfrac{2304}{x}$

Bài toán trở thành tìm x để S đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có: $S'(x)=4-\dfrac{2304}{x^2}$

$S'=0\Leftrightarrow 4-\dfrac{2304}{x^2}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=24(\text{t/ m}) \\ x=-24(\text{loai}) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		24		$+\infty$
S'(x)		−	0	+	
S(x)			$S_{\min}$		

Vậy kích thước tối ưu của trang giấy có chiều dài là 30 cm, chiều rộng là 20 cm.

Bài 11:

Trong tất cả các hình chữ nhật có chu vi bằng 16cm thì hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $36cm^2$

B. $20cm^2$

C. $16cm^2$

D. $30cm^2$

Giải:

Gọi độ dài hình chữ nhật đó là: $x(cm)$. Chiều rộng của hình chữ nhật đó là: $(8-x)cm$

Suy ra $4\le x\le 8$

Diện tích hình chữ nhật đó là: $S=x(8-x)=8x-x^2$

Bài toán trở thành tìm x để S đạt GTLN.

Ta có: $S'=8-2x; S'=0 \Leftrightarrow 8-2x=0 \Leftrightarrow x=4$

Vì hàm S(x) liên tục trên $4 \le x \le 8$, ta có: $S(4)=16; S(8)=0$

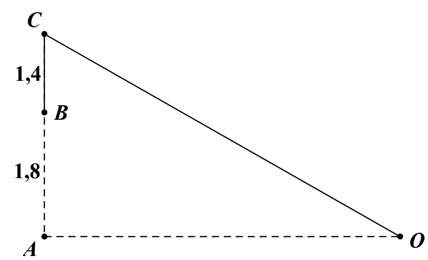
Kết luận: hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng $16cm^2$

Lưu ý: Bìa này ta còn có thể sử dụng lí thuyết của lớp 10. Tìm GTLN của parapol với hệ số a<0 thì $S_{\max}=-\dfrac{\Delta}{4a}=S\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=16$

Chọn C.

Bài 12:

Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4 mét và đặt ở độ cao 1,8 mét so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đó? Biết rằng góc $\widehat{BOC}$ là góc nhọn.



A. $AO=2,4m$ B. $AO=2m$

C. $AO=2,6m$ D. $AO=3m$

Giải:

Đặt độ dài cạnh $AO=x(cm),(x>0)$

Suy ra:

$BO=\sqrt{3,24+x^2}, CO=\sqrt{10,24+x^2}$

Ta sử dụng định lí cosin trong tam giác OBC ta có:

$$\cos\widehat{BOC}=\frac{OB^2+OC^2-BC^2}{2.OB.OC}=\frac{(3,24+x^2)+(10,24+x^2)-1,96}{2\sqrt{(3,24+x^2)(10,24+x^2)}}$$

$$=\frac{5,76+x^2}{\sqrt{(3,24+x^2)(10,24+x^2)}}$$

Vì góc $\widehat{BOC}$ là góc nhọn nên bài toán trở thành bài toán tìm x để $F(x)=\dfrac{5,76+x^2}{\sqrt{(3,24+x^2)(10,24+x^2)}}$

Đạt GTNN.

Đặt $(3,24+x^2)=t,(t>3,24)$.

Suy ra $F(t)=\dfrac{t+\dfrac{63}{25}}{\sqrt{t(t+7)}}=\dfrac{25t+63}{25\sqrt{t(t+7)}}$

Ta tìm t để $F(t)$ nhận giá trị nhỏ nhất.

$$F'(t)=\left(\frac{25t+63}{25\sqrt{t(t+7)}}\right)'=\frac{1}{25}\left(\frac{25\sqrt{t(t+7)}-(25t+63)\left(\frac{2t+7}{2\sqrt{t(t+7)}}\right)}{t(t+7)}\right)$$

$$=\frac{1}{25}\left(\frac{50(t^2+7t)-(25t+63)(2t+7)}{2t(t+7)\sqrt{t(t+7)}}\right)=\frac{1}{25}\left(\frac{49t-441}{2t(t+7)\sqrt{t(t+7)}}\right)$$

$F'(t)=0\Leftrightarrow t=9$

BBT

t	3,24	9	$+\infty$
F'(t)	$-$	0	$+$
F(t)		$F_{\min}$	

Thay vào đặt ta có: $(3,24+x^2)=9\Leftrightarrow x^2=\frac{144}{25}\Leftrightarrow x=2,4m$

Vậy để nhìn rõ nhất thì AO =2,4 m.

Chọn A.

Bài 13:

Một công trình nghệ thuật kiến trúc trong công viên thành phố Việt Trì có dạng là một tòa nhà hình chóp tứ giác đều nội tiếp một mặt cầu có bán kính 5(m). Toàn bộ tòa nhà đó được trang trí các hình ảnh lịch sử và tượng anh hùng, do vậy để có không gian rộng bên trong tòa nhà người ta đã xây dựng tòa nhà sao cho thể tích lớn nhất. Tính chiều cao của tòa nhà đó.

A. $h=\frac{20}{3}(m)$ B. $h=\frac{22}{3}(m)$ C. $h=\frac{23}{3}(m)$ D. $h=\frac{25}{3}(m)$

Giải:

Gọi độ dài cạnh đáy, chiều cao của hình chóp tứ giác đều lần lượt là x và h, (x>0, h>0, m)

Dựng mặt phẳng trung trực của 1 cạnh bên cắt trục đáy ở O, vậy O là tâm mặt câu. Ta có: $OS=5m$, nên $OI=h-5$, với I là giao của 2 đường chéo đáy. Vì tam giác OIC vuông nên ta có:

$$IC=\sqrt{OC^2-OI^2}=\sqrt{5^2-(h-5)^2}\Leftrightarrow\frac{x\sqrt{2}}{2}=\sqrt{10h-h^2}$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt{20h-2h^2},(5<h<10)$$

Ta có thể tích khối chóp tứ giác đều:

$$V(h)=Bh=\frac{1}{3}\left(\sqrt{20h-2h^2}\right)^2h=\frac{1}{3}\left(20h^2-2h^3\right)$$

Bài toán trở thành tìm h để V(h) đạt GTNN.

$V'(h)=\frac{1}{3}(40h-6h^2)$

$V'(h)=0\Leftrightarrow \frac{1}{3}(40h-6h^2)=0\Leftrightarrow h=\frac{20}{3}$

BBT

h	5	$\frac{20}{3}$	10
$V'(h)$	+	0	−
$V(h)$		$V_{\max}$	

Vậy chọn chiều cao đó là $h=\frac{20}{3}(m)$

Chọn A.

Bài 14:

Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà khoa học đã nhận thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là $P(n)=480-20n(g)$. Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

A. 14 B. 13 C. 12 D. 11

Giải

Gọi $F(n)$ là hàm cân nặng của n con cá sau vụ thu hoạch trên một đơn vị diện tích

Ta có: $F(n)=(480-20n).n=480n-20n^2$

Để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất thì cân nặng của n con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ là lớn nhất.

Bài toán trở thành tìm $n\in\mathbb{N}^*$ sao cho F(x) đạt GTLN.

$F'(n)=480-40n$

$F'(n)=0\Leftrightarrow 480-40n=0\Leftrightarrow n=12$

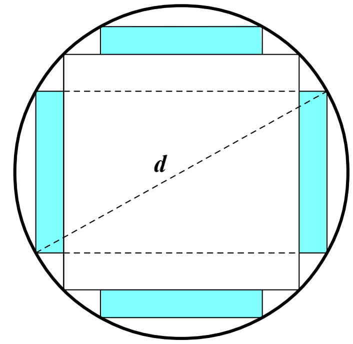
Học sinh tự lập bảng biến thiên.

Vậy phải thả 12 con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất.

Chọn C.

Bài 15:

(Trích luận văn thạc sĩ Nguyễn Văn Bảo): Một khúc gỗ tròn hình trụ cần xẻ thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và 4 miếng phụ như hình vẽ. Hãy xác định kích thước của các miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất. Biết đường kính khúc gỗ là d.



A. Rộng $\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}d$, dài $\frac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d$

B. Rộng $\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{15}d$, dài $\frac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d$

C. Rộng $\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{14}d$, dài $\frac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d$

D. Rộng $\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{13}d$, dài $\frac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d$

Giải

Gọi chiều dài và chiều rộng của miếng phụ lần lượt là x, y. Đường kính của khúc gỗ là d, khi đó tiết diện ngang của thanh xà có độ dài cạnh là $\frac{d}{\sqrt{2}}$ và $0<x<\frac{d\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}, 0<y<\frac{d}{\sqrt{2}}$

Theo đề bài ta được hình chữ nhật ABCD như hình vẽ, theo định lý Pitago ta có:

$$\left(2x+\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2+y^2=d^2 \Leftrightarrow y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}x}$$

Do đó, miếng phụ có diện tích là:

$$S(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}dx} \text{ với } 0<x<\frac{d\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}$$

Bài toán trở thành tìm x để S(x) đạt GTLN.

Ta có:

$$S'(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}dx}+\frac{x\left(-8x-2\sqrt{2}d\right)}{\sqrt{2}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}dx}}$$

$$=\frac{-16x^2-6\sqrt{2}dx+d^2}{\sqrt{2}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}dx}}$$

$$S'(x)=0 \Leftrightarrow -16x^2-6\sqrt{2}dx+d^2=0 \Leftrightarrow -16\left(\frac{x}{d}\right)^2-6\sqrt{2}\left(\frac{x}{d}\right)+1=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}d$$

BBT

X	0		$\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}d$		$\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}d$
S'(x)		+	0	−	
S(x)			$S_{\max}$		

Vậy miếng phụ có kích thước $x=\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}d, y=\frac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d$

Chọn A.

Bài 16:

Nhà Long muốn xây một hồ chứa nước có dạng một khối hộp chữ nhật có nắp đậy có thể tích bằng $576m^3$. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá tiền thuê nhân công để xây hồ tính theo m^2 là 500.000 đồng/m^2. Hãy xác định kích thước của hồ chứa nước sao cho chi phí thuê nhân công là ít nhất và chi phí đó là bao nhiêu?

A. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 216 triệu

B. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 215 triệu

C. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 214 triệu

D. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 213 triệu.

Giải:

Gọi x, y, h lần lượt là chiều dài, chiều rộng, chiều cao của hồ chứa nước, $\left(x>0, y>0, h>0, m\right)$

Ta có: $\frac{y}{x}=2 \Leftrightarrow y=2x$

Thể tích hồ chứa nước $V=xyh \Leftrightarrow h=\frac{V}{xy}=\frac{576}{x\left(2x\right)}=\frac{288}{x^2}$

Diện tích cần xây dựng hồ chứa nước:

$S\left(x\right)=2xy+2xh+2yh=2x\left(2x\right)+2x\frac{288}{x^2}+2\left(2x\right)\frac{288}{x^2}=4x^2+\frac{1728}{x}$

Để chi phí nhân công là ít nhất thì diện tích cần xây dựng là nhỏ nhất, mà vẫn đạt thể tích như mong muốn.

Bài toán trở thành tìm x để $S\left(x\right)$ nhỏ nhất.

$S\left(x\right)=4x^2+\frac{1728}{x}$

$S'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow 8x-\frac{1728}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=6$

BBT

X	0	6	$+\infty$
S'(x)	−	0	+
S(x)		$S_{\min}$	

Vậy kích thước của hồ là: rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Diện tích cần xây: $432m^2$

Chi phí ít nhất là: $432x500.000 = 216.000.000$

Chọn A.

Bài 17:

Một công ty chuyên sản xuất container muốn thiết kế các thùng gỗ đựng hàng ở bên trong có dạng hình hộp chữ nhật và không có nắp, có đáy là hình vuông. Thùng gỗ có thể chứ được $62,5m^3$. Hỏi các cạnh của hình hộp chữ nhật có độ dài là bao nhiêu để tổng diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy của thùng là nhỏ nhất?

A. Cạnh bên: $2,5m$, cạnh đáy: $5m$.

B. Cạnh bên: 4m, cạnh đáy: $\frac{5\sqrt{10}}{4}m$

C. Cạnh bên: 3m, cạnh đáy: $\frac{5\sqrt{10}}{6}m$

D. Cạnh bên: 5m, cạnh đáy: $\frac{5\sqrt{2}}{2}m$.

Giải.

Gọi x, h lần lượt là độ dài cạnh đáy hình vuông, chiều cao của thùng gỗ, $\left(x > 0, h > 0, (m)\right)$.

Thể tích thùng gỗ: $V = x^2h \Leftrightarrow h = \frac{V}{x^2} = \frac{62,5}{x^2}$

Diện tích xung quanh và diện tích mặt đáy của thùng là:

$S(x) = x^2 + 4xh$

$= x^2 + 4x.\frac{62,5}{x^2}$

$= x^2 + \frac{250}{x}$

Bài toán trở thành tìm x để S(x) nhỏ nhất.

$S'(x) = 2x - \frac{250}{x^2}$

$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{250}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 5$

BBT

X	0	5	$+\infty$
S'(x)	−	0	+
S(x)			

	$S_{\min}$

Vậy để tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy của thùng là nhỏ nhất thì cạnh đáy là 5m, chiều cao 2,5m.

Chọn A.

Bài 18:

Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính R, nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp?

A. $2R^2$ B. $5R^2$ C. R^2 D. $3R^2$

Giải.

Gọi x là độ dài cạnh của hình chữ nhật không nằm dọc theo đường kính của hình tròn $(0 < x < R)$.

Độ dài cạnh còn lại của hình chữ nhật là $2\sqrt{R^2 - x^2}$

Ta có diện tích của hình chữ nhật là: $S(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$

Bài toán trở thành tìm x để S(x) đạt GTLN.

$$S'(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{2R^2 - 4x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2R^2 - 4x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow 2R^2 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{R\sqrt{2}}{2} (\text{t/ m}) \\ x = \frac{-R\sqrt{2}}{2} (\text{loai}) \end{array}\right.$$

BBT:

X	0 $\qquad$ $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ R
S'(x)	+ $\qquad$ 0 $\qquad$ −
S(x)	R^2

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật là R^2

Bài 19:

(Đề thi thử Việt Trì lần I): Để thiết kế một chiếc bể cá hình chữ nhật có chiều cao là $60cm,$ thể tích là $96.000cm^3$, người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70.000 đồng/m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/m^2. Chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là:

A. $83.200.000$ đồng B. 382.000 đồng

C. 83.200 đồng C. 8.320.000 đồng.

Giải

Diện tích của đáy hộp là: $S = \frac{V}{h} = \frac{96.000}{60} = 1600cm^2 = 0,16m^2$

Gọi chiều dài cạnh đáy của hộp là $x,(x > 0, m)$

Chiều rộng của hộp là $\frac{0,16}{x}$

Gọi $F(x)$ là hàm chi phí để làm để cá.

Chi phí để hoàn thành bể cá:

$$F(x) = 0,16 \times 100.000 + 2.0,6x.70.000 + 2.0,6.\frac{0,16}{x}.70.000$$

$$= 16.000 + 48.000x + \frac{13440}{x}$$

Bài toán trở thành tìm x để F(x) đạt GTNN.

$$F'(x) = 84.000 - \frac{13440}{x^2}$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow 84.000 - \frac{13440}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0,4$$

BBT

X	0		0,4		$+\infty$
F'(x)		−	0	+	
F(x)			$F_{\min}$		

Vậy chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là: 83.200 đồng

Bài 20:

Người ta muốn mạ vàng cho một cái hộp có đáy là hình vuông không có có nắp có thể tích chứa được $4dm^3$. Tìm kích thước của thùng để lượng vàng mạ là ít nhất. Giả sử độ dày của lớp mạ tại mọi nơi trên mặt ngoài hộp là như nhau:

A. Cạnh đáy: 2dm, cao: 1dm. B. Cạnh đáy: 2dm, cao: 2dm.

C. Cạnh đáy: 1dm, cao: 2dm. D. Cạnh đáy: 2dm, cao: 3dm.

Giải

Gọi: Độ dài cạnh đáy của hộp là $x,(x > 0, dm)$

Chiều cao của hộp là $h,(h > 0, dm)$. S(x) là diện tích của hộp cần mạ (dm^2)

Ta có khối lượng cần mạ là: $(P_{vang}.d).S(x) = C.S(x)$

Với C là hằng số, P_{vang} là khối lượng riêng của vàng.

Ta có: Khối lượng vàng cần mạ tỉ lệ thuận với $S(x)$

Thể tích hộp $V = x^2 h \Leftrightarrow h = \frac{V}{x^2} = \frac{4}{x^2}$

$S(x) = 4xh + x^2 = \frac{16}{x} + x^2$

Bài toán trở thành tìm x để $S(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$S'(x) = \frac{-16}{x^2} + 2x$

$S'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-16}{x^2} + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 2$

BBT

X	0		2		$+\infty$
S'(x)		−	0	+	
S(x)			$S_{\min}$		

Vậy để tiết kiệm nhất lượng vàng cần mạ thì chũng ta phải sản xuất hoppj có kích thước cạnh đáy: $x = 2dm,\ cao: h = 1dm$.

Chọn A.

Bài 21:

Ông Thanh nuôi cá chim ở một cái ao có diện tích là $50m^2$.Vụ trước ông nuôi với mật độ là 20 con/m^2 và thu được 1,5 tấn cá. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình thì cứ thả giảm đi 8 con/m^2 thì mỗi con cá khi thu hoạch tăng lên 0,5kg. Vậy vụ tới ông phải thả bao nhiêu con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất? Giả sử không có hao hụt khi nuôi.

A. 512 con B. 511 con C. 510 con D. 509 con

Giải:

Số cá giống mà ông thanh đã thả trong vụ vừa qua là $50.20 = 1000(con)$

Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phần trong vụ vừa qua là:

$1500 : 1000 = 1,5(kg)$.

Gọi số cá giống cần thả ít đi trong vụ này là: $x(con), (x > 0)$

Theo đề bài, giảm 8 con thì mỗi con tăng thêm $0,5kg/con$

Vậy giảm x con thì mỗi con tăng thêm $0,0625x\ kg/con$.

Tổng số lượng cá thu được ở vụ này:

$F(x) = (1000 - x)(1,5 + 0,0625x) = -0,0625x^2 + 61x + 1500$.

Bài toán trờ thành tìm x để $F(x)$ đạt GTLN.

Ta có:

$F'(x) = -0,125x + 61$

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,125x + 61 = 0 \Leftrightarrow x = 488$

BBT

X	0		488		1000
F'(x)		+	0	−	
F(x)			F_{max}		

Vậy ông thanh phải thả số cá giống trong vụ này là:

$1000 - 488 = 512con$

Chọn A.

Bài 22:

Người ta cần làm một hộp theo dạng một khối lăng trụ đều không nắp với thể tích lớn nhất từ một miếng tôn hình vuông có cạnh là 1 mét. Thể tích của hộp cần làm.

A. $V = \frac{2}{27}dm^3$ B. $V = \frac{3}{27}dm^3$ C. $V = \frac{4}{27}dm^3$ D. $V = \frac{5}{27}dm^3$

Giải

Giả sử mỗi góc cắt đi một hình vuông x dm.

Khi đó chiều cao của hình hộp là $x(dm), \left(0 < x < \frac{1}{2}\right)$

Và cạnh đáy của hộp là $(1-2x)dm$.

Vậy thể tích của hộp là: $V = x(1-2x)^2 dm^3$

Ta có:

$V' = 1 - 8x + 12x^2$

Phương trình $V' = 0 \Leftrightarrow -8x + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6} \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

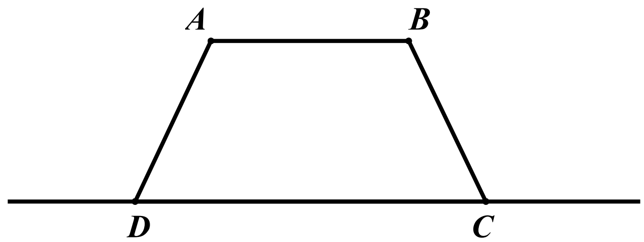
BBT

X	0		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$
V'		+	0	−	
V			$\frac{2}{27}$		

Vậy thể tích cần tìm là: $\frac{2}{27}dm^3$. chọn A.

Bài 23:
(Đề minh học HSG Phú Thọ 2016-2017)

Một người nông dân có ba tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài $a(m)$ và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân ABCD như hình vẽ (Bờ sông là đường thẳng CD không phải rào). Hỏi ông ta có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu m^2 ?



A. $\sqrt{3}a^2$ B. $\dfrac{5\sqrt{3}a^2}{4}$ C. $\dfrac{\sqrt{3}a^2}{2}$ D. $\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{4}$

Giải:

$AB = a, AA' = h, CD = x.$ Ta có:

$$h^2 + \left(\frac{x-a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow 3a^2 + 2ax - x^2 = 4h^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{3a^2 + 2ax - x^2} = 2h$$

$$S = \frac{a+x}{2}.h = \frac{a+x}{4}.\sqrt{3a^2+2ax-x^2} = \frac{1}{4}\sqrt{(3a-x)(x+a)^3}$$

$$= \frac{\sqrt{27}}{4}\sqrt{(3a-x).\frac{x+a}{3}.\frac{x+a}{3}.\frac{x+a}{3}}$$

$$\le \frac{\sqrt{27}}{4}\left(\frac{(3a-x)+\frac{x+a}{3}+\frac{x+a}{3}+\frac{x+a}{3}}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{27}a^2}{4}$$

Chọn D.

Bài 24:

Một công ty muốn làm đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ đến một điểm B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6km. Giá thành để xây đường ống trên bờ là 50.000USD mỗi km, và 130.000USD mỗi km để xây dưới nước. B’ là điểm trên bờ sao cho BB’ vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến B’ là 9km. Vị trí C trên đoạn AB’ sao cho khi nối ống theo hướng ACB thì số tiền ít nhất. Khi đó C cách A một đoạn bằng:

A. 9km B. 6,5km C. 5km D. 4km.

Giải:

Ta đặt: $B'C = x(km), (0 \le x \le 9)$

Ta có:

$BC = \sqrt{B'B^2 + B'C^2} = \sqrt{36 + x^2}, AC = 9 - x$

Gọi F(x) là hàm chi phí xây dựng đường ống nước từ ACB

Ta có: $F(x) = 130.000.\sqrt{36 + x^2} + 50.000(9 - x)(USD)$

Bài toán trở thành tìm x sao cho F(x) đạt GTNN.

$$F'(x) = \frac{130.000}{\sqrt{36 + x^2}}x - 50.000.$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{130.000}{\sqrt{36 + x^2}}x - 50.000 = 0 \Leftrightarrow 13x = 5\sqrt{36 + x^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} = 2,5$$

Vì F(x) là hàm liên tục trên đoạn $[0;9]$ nên ta có:

$$F(0) = 1.230.000, F(9) = 1.406.000, F\left(\frac{5}{2}\right) = 1.170.000$$

Vậy chi phí nhỏ nhất khi C cách A khoảng bằng 9km-2,5km=6,5km.

Chọn B.

Bài 25:

Một gia đình cần xây một cái bể nước hình trụ có thể chứa được $150m^3$ có đáy được làm bằng bê tông, thành làm bằng tôn, bề mặt làm bằng kính. Tính chi phí thấp nhất cần dùng để xây bể nước đó. biết giá thành vật liệu làm bằng bê tông có giá thành là 100.000 đồng/m^2, làm bằng tôn là 90.000 đồng/m^2, bề mặt làm làm bằng kính là 120.000 đồng/m^2. (số tiền để xây được tính lấy giá trị lớn hơn gần nhất với số tiền tính toán trên lí thuyết).

A. 15.041.000đ B. 15.040.000đ C. 15.039.000đ D. 15.038.000đ

Giải

Gọi $r(m), h(m)$ lần lượt là bán kính của đáy bể và chiều cao của bể.

Ta có:

$$V = \pi r^2 h \Leftrightarrow h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{150}{\pi r^2}$$

Gọi F(r) là hàm chi phí xây dựng bể nước

Ta có: $F(r) = 100.000\pi r^2 + 90.000.2\pi rh + 120.000\pi r^2$

$$= 220.000\pi r^2 + \frac{27.000.000}{r}$$

Bài toán trở thành tìm r để $F(r)$ đạt GTNN.

$$F'(r) = 440.000\pi r - \frac{27.000.000}{r^2}$$

$$F'(r) = 0 \Leftrightarrow 440.000\pi r - \frac{27.000.000}{r^2} = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{675}{11\pi}}$$

BBT

r	0		$\sqrt[3]{\dfrac{675}{11\pi}}$		$+\infty$
F’		−	0	+	
F			$F_{\min}$		

Vậy chi phí thấp nhất là $F\left(\sqrt[3]{\dfrac{675}{11\pi}}\right) \approx 15.038.287,97$ đồng.

Chọn C.

Bài 26:

Có một tấm gỗ hình vuông có độ dài cạnh là 2m. Cắt tấm gỗ đó thành tấm gỗ có hình dạng là một tam giác vuông sao cho tổng của một cạnh tam giác vuông và cạnh huyền của tấm gỗ tam giác vuông đó bằng 1,2m. Hỏi cạnh huyền của tấm gỗ tam giác vuông đó bằng bao nhiêu để tam giác vuông có diện tích lớn nhất.

A. 0,8m B. 0,9m C. 1m D. 1,1m

Giải:

Giả sử tấm dỗ cắt có hình dạng tam giác vuông là ABC, BC là cạnh huyền. VÌ cạnh AB, AC là như nhau nên ta có thể đặt $AB = x, (0 < x < 0,6)$

Khi đó, cạnh huyền $BC = 1,2 - x$ Cạnh góc vuông còn lại là:

$AC = \sqrt{(1,2-x)^2 - x^2} = \sqrt{1,44 - 2,4x}$

Ta có diện tích tam giác ABC: $S(x) = \dfrac{1}{2}x\sqrt{1,44-2,4x}$

Bài toán trở thành tìm x để $S(x)$ đạt GTLN.

$$S'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1,44-2,4x} - \frac{1}{2}\frac{1,2x}{\sqrt{1,44-2,4x}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1,44-3,6x}{\sqrt{1,44-2,4x}}\right)$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 1,44 - 3,6x = 0 \Leftrightarrow x = 0,4$$

BBT

X	0		0,4		0,6
S’(x)		+	0	−	
S(x)			S_{max}		

Vậy cạnh BC=0,8m

Bài 27:

Anh Tuân muốn xây dựng một hố ga không có nắp đậy dạng hình hộp chữ nhật có thể tích chứ được $3200cm^3$, tỉ số giữa chiều cao và chiều rộng của hố ga bằng 2. Xác định diện tích đáy của hố ga để khi xây hố tiết kiệm được nguyên liệu nhất.

A. $170cm^2$ B. $160cm^2$ C. $150cm^2$ D. $140cm^2$

Giải:

Gọi x, y, h lần lượt là chiều rộng, chiều dài, chiều cao của hố ga, $(x>0, y>0, h>0, cm)$

Ta có: $\frac{h}{x}=2 \Leftrightarrow h=2x$

Thể tích hố ga: $V=xyh \Leftrightarrow y=\frac{V}{xh}=\frac{1600}{x^2}$

Diện tích cần xây dựng hố ga là:

$$S(x)=xy+2xh+2yh=x.\frac{1600}{x^2}+2x2x+x\frac{1600}{x^2}2x$$

$$=\frac{1600}{x}+4x^2+\frac{6400}{x}=4x^2+\frac{8000}{x}$$

Bài toán trở thành tìm x để S(x) nhỏ nhất.

$$S'(x)=8x-\frac{8000}{x^2}$$

$$S'(x)=0 \Leftrightarrow 8x-\frac{8000}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=10$$

BBT

X	0		10		$+\infty$
S'(x)		$-$	0	$+$	
S(x)			$S_{\min}$		

Vậy chiều rộng của hố ga là 10cm, chiều dài là 16cm.

Vậy diện tích đáy hố ga nhỏ nhất là: $S=10.16=160cm^2$.

Chọn B

Bài 28:

Một trung tâm thương mại bán 2500 ti vi mỗi năm. Chi phí gửi trong kho là 100.000 đồng một cái ti vi mỗi năm. Để đặt hàng chi phí cố định cho mỗi lần đặt là 200.000 đồng cộng thêm 90.000 đồng mỗi cái ti vi. Trung tâm nên đặt hàng bao nhiêu lần trong mỗi năm và mỗi lần bao nhiêu cái để chi phí hàng tồn kho là ít nhất. Biết rằng mỗi lần đặt hàng về chỉ có một nửa trong số đó được trưng bày ở cửa hàng.

A. Đặt hàng 25 lần, mỗi lần 100 ti vi B. Đặt hàng 20 lần, mỗi lần 125 ti vi

C. Đặt hàng 10 lần, mỗi lần 250 ti vi D. Đặt hàng 50 lần, mỗi lần 50 ti vi

Giải:

Gọi x là số lượng ti vi mà trung tâm đặt mỗi lần $(x>0)$ (đơn vị: cái)

Số lần đặt hàng mỗi năm của trung tâm: $\frac{2500}{x}$

Chi phí cho mỗi lần đặt hàng: $\frac{2500}{x}.(200.000+90.000x)$

Số lượng tivi trung bình gửi kho là $\frac{x}{2}$, chi phí lưu trong kho tương ứng: $50.000x$

Gọi F(x) là hàm chi phí mà trung tâm đó phải trả.

Ta có:

$$F(x)=\frac{2500}{x}(200.000+90.000x)+50.000x$$

$$=\frac{500.000.000}{x}+225.000.000+50.000x$$

Bài toán trở thành tìm x để F(x) nhỏ nhất

$$F'(x)=-\frac{500.000.000}{x}+50.000$$

$$F'(x)=0\Leftrightarrow -\frac{500.000.000}{x}+50.000=0\Leftrightarrow x=100$$

BBT

X	0		100		2500
F'(x)		−	0	+	
F(x)			F_{min}		

Vậy trung tâm phải đặt hàng 25 lần, mỗi lần 100 cái ti vi.

Chọn A.

Bài 29:

Mùa này công ty sách định ra 2 cuốn trắc nghiệm Lý và Toán với giá sản xuất là 200.000 đồng và 300.000 đồng. Khi đó hàm lợi ích chúng ta là $u(x;y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}$, với x, y là số lượng hai cuốn sách được in ra. Nhưng ban quản trị chỉ đồng ý đưa ra số tiền 300.000.000 đồng. Theo bạn phải sản xuất số lượng như thế nào để đạt doanh thu cho công ty sách cao nhất?

A. $\left(\frac{3000}{5}\right)^{\frac{5}{6}}$ triệu. B. $\left(\frac{2000}{5}\right)^{\frac{5}{6}}$ triệu. C. $\left(\frac{3001}{5}\right)^{\frac{5}{6}}$ triệu. D. $\left(\frac{2001}{5}\right)^{\frac{5}{6}}$ triệu.

Giải:

Ta có hàm lợi ích là: $u(x;y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}$. Để cho gọn ta đặt $a=\sqrt[3]{x}, b=\sqrt{y}$

Vì ban quản trị chỉ đồng ý đưa ra số tiền 300.000.000 triệu đồng nên suy ra:

$200.000a^3 + 300.000b^2 = 300.000.000 \Leftrightarrow 2a^3 + 3b^2 = 3000(*)$

Lúc này ta có: $u(x;y) = v(a;b)$ ta cần tìm giá trị lớn nhất của biểu thể tíchức này.

Ta có:

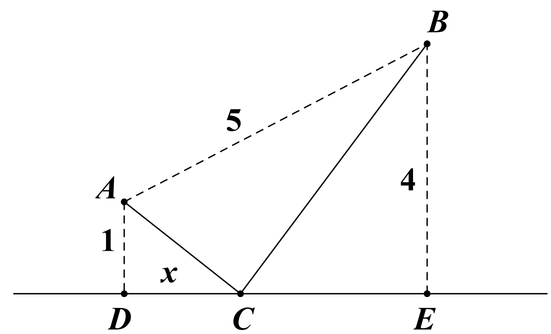
$(*) \Leftrightarrow a^3 + a^3 + b^2 + b^2 + b^2 = 3000 \geq 5\sqrt[5]{a^6b^6}$

$\Rightarrow ab \leq \left(\frac{3000}{5}\right)^{\frac{5}{6}}$

Chon A

Bài 30:

Có hai cây cột dựng trên mặt đất lần lượt cao 1m và 4m, đỉnh của hai cây cột cách nhau 5m. Người ta chọn một vị trí trên mặt đất (nằm giữa hai chân cột) để giăng dây nối đến hai đỉnh cột để trang trí như hình dưới. Tính độ dài dây ngắn nhất.



A. $\sqrt{41}$ B. $\sqrt{37}$

C. $\sqrt{29}$ D. $3\sqrt{5}$

Giải

Đặt $CD = x, x > 0.$ Ta tính được $DE = \sqrt{5^2 - (4-1)^2} = 4$

Ta có $AC + BC = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{(4-x)^2 + 16} = f(x)$

Khi đó: $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+32}}$

Giải phương trình $f'(x) = 0$, ta thu được $x = \dfrac{4}{5}$ và tìm được $\min f(x) = \sqrt{14}$, chọn A.

Bài 31:

Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có tổng diện tích tất cả các mặt là 36, độ dài đường chéo AC' bằng 6. Hỏi thể tích của hình hộp lớn nhất là bao nhiêu?

A. 8 B. 12. C. $8\sqrt{2}$ D. $24\sqrt{3}$.

Giải:

Đặt a,b,c là kích thước hình hộp thì ta có hệ:

$$\begin{cases} 2(ab+bc+ca) = 36 \\ \sqrt{a^2+b^2+c^2} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab+bc+ca = 18 \\ a^2+b^2+c^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab+bc+ca = 18 \\ a+b+c = 6\sqrt{2} \end{cases}$$

Cần tìm GTLN của $V = abc$

Đặt $a = x\sqrt{2}, b = y\sqrt{2}, c = z\sqrt{2}$ thì có hệ mới $\begin{cases} xy + yz + zx = 9 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$

Đến đây chặn được miên của từng biến vì:

$\begin{cases} y + z = 6 - x \\ yz = 9 - x(y+z) = 9 - x(6-x) \end{cases}$ và $(y+z)^2 \ge 4yz$

Nên $(6-x)^2 \ge 4\left[9 - x(6-x)\right] \Leftrightarrow x(4-x) \ge 0 \Leftrightarrow 0 < x \le 4$

Tương tự $0 < y, z \le 4$

Ta có: $V = 2\sqrt{2}xyz = 2\sqrt{2}x\left[9 - x(6-x)\right]$, đến đây khảo sát hàm số này tìm max.

GTLN là $V = 8\sqrt{2}$. chọn C.

Bài 32:

Một ca sĩ có buổi diễn âm nhạc có giá vé đã thông báo là 600 đô la thì sẽ có 1000 người đặt vé. Tuy nhiên sau khi đã có 1000 người đặt vé với giá 600 đô la thì quản lí kinh doanh của ca sĩ này nhận thấy, cứ mỗi 20 đô la giảm giá vé thì sẽ thu hút thêm 100 người mua vé nên ông quyết định mở ra một chương trình giảm giá vé. Tìm giá vẽ phù hợp để có được số tiền vé thu vào là cao nhất và số tiền đó là bao nhiêu?

A. 400 đô la/ vé, số tiền thu vào là 800 000 đô la.

B. 400 đô la/ vé, số tiền thu vào là 6400 000 đô la.

C. 100 đô la/ vé, số tiền thu vào là 11 000 đô la.

D. 100 đô la/ vé, số tiền thu vào là 110 000 đô la.

Giải.

Gọi x là số lần giảm bớt đi 20 đô la trong giá vé. Khi đó giá vé sẽ là $600 - 20x$ một người.

Số người mua vé sẽ là: $1000 + 100x$

Khi đó số tiền thu được là:

$f(x) = (600 - 20x)(1000 + 100x) = -2000x^2 + 40\ 000x + 600\ 000$

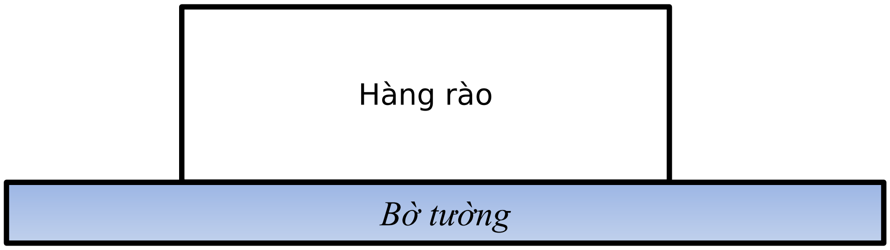
Hàm số bậc 2 có hệ số $a = -2000 < 0$. Ta sẽ áp dụng kết quả đã được đưa ra đó là hàm số sẽ đạt GTLN tại $x = -\frac{b}{2a} = \frac{-40000}{2.(-2000)} = 10$

Khi đó: $f(10) = 800\ 000$. Chọn A.

Bài 33.

Bác nông dân muốn làm hàng rà trồng ra hình chữ nhật có chiều dài song song với hàng tường gạch. Bác chỉ làm ba mặt hàng rào bởi vì mặt thứ tư bác tận dụng luôn bờ tường. Bác dự tính sẽ dùng 200m lưới để làm nên toàn bộ hàng rào đó.

Diện tích đất trồng rau lớn nhất bác có thể rào nên là:



A. 1500m^2. B. 10 000m^2.
C. 2500m^2. D. 5000m^2.

Giải:

Đề bài cho ta dữ liệu về chu vi của hàng rào là $200m$. Từ đó ta sẽ tìm được mối quan hệ giữa x và r, đến đậy ta có thể đưa về hàm số một biến theo x hoặc theo r như sau:

Ta có:

$x+2r=200 \Leftrightarrow r=100-\dfrac{x}{2}$. Từ đây ta có $r>0 \Rightarrow x<200$.

Diện tích đất rào được tính bởi: $f(x)=x\left(100-\dfrac{x}{2}\right)=-\dfrac{x^2}{2}+100x$

Xét hàm số $f(x)=-\dfrac{x^2}{2}+100x$ trên khoảng $(0;200)$

Đến đây áp dụng quy tắc tìm GTLN của hàm số trên đoạn. ta có:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -x+100=0 \Leftrightarrow x=100$

Từ đó ta có $f(100)=5000$ là GTLN của diện tích đất rào được. chọn D.

Bài 34:

Một người có một dây ruy băng dài 130 cm, người đó cần bọc dải ruy băng này quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà, người này dùng 10cm của dải ruy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp (như hình vẽ minh họa). Hỏi dải ruy băng có thể bọc được hộp quà có thể tích lớn nhất là bao nhiêu?

A. $4000\pi\ cm^3$ B. $1000\pi\ cm^3$
C. $2500\pi\ cm^3$ D. $5000\pi\ cm^3$

Giải:

Gọi $x(cm); y(cm)$ lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ $(x,y>0; x<30)$

Dải dây ruy băng còn lại khi đã thắt nơ là: 120cm.

Ta có: $(2x+y).4=120 \Leftrightarrow y=30-2x$

Thể tích khối hộp quà là: $V=\pi x^2.y=\pi x^2(30-2x)$

Thể tích V lớn nhất khi hàm số $f(x)=x^2(30-2x)$ với $0<x<30$ đạt GTLN

$f'(x) = -6x^2 + 60x$, cho $f'(x) = -6x^2 + 60x = 0 \Leftrightarrow x = 10$

Lập Bảng Biến thiên ta thấy thể tích đạt GTLN là:

$V = 1000\pi\left(cm^3\right)$. Chọn B

Bài 35:

Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm tính theo công thức $V(t) = \frac{1}{100}\left(30t^3 - \frac{t^4}{4}\right)\ (0 \le t \le 90)$

Tốc độ bơm nước tại thời điểm t được tính bởi $v(t) = V'(t)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng.

A. Tốc độ bơm giảm từ phút 60 đến phút thứ 90.

B. Tốc độ bơm luôn giảm.

C. Tốc độ bơm tăng từ phút 0 đến phút thứ 75.

D. Cả A, B, C đều sai.

Giải:

Xét hàm $V' = \frac{9}{10}t^2 - \frac{1}{100}t^3\ (0 \le t \le 90)$

$V'' = \frac{9}{5}t - \frac{3}{100}t^2 \Rightarrow V'' = 0$ khi $t = 0, t = 60$

Dựa vào bảng biến thiên, Ta có hàm số V’ đồng biến trên (0;60), nghịch biến trên (60;90).

Chọn A.

Bài 36:

Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần hình trụ nhỉ nhất. Muốn thể tích khối trụ đó bằng 2 và diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy gần số nào nhất?

A. 0,7 B. 0,6 C. 0,8. D. 0,5.

Giải.

Ta có $S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 2\pi rl + 2\pi r^2\ (1)$

$V = \pi r^2 l = 2 \Rightarrow l = \frac{2}{\pi r^2}$ thay vào (1) ta được:

$S_{tp} = \frac{4}{r} + 2\pi r^2 = f(r)$

$f'(r) = -\frac{4}{r^2} + 4\pi r$

$f'(r) = 0$ khi r gần bằng 0,68.

Chọn A.

Bài 37:

Do nhu cầu sử dụng người ta cần tạo ra một lăng trụ đứng có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao h, có thể tích là $1m^3$. Với a,h như thế nào để đỡ tốn nhiều vật liệu nhất?

A. $a=1;h=1.$ B. $a=\frac{1}{3};h=\frac{1}{3}$ C. $a=\frac{1}{2};h=\frac{1}{2}$ D. $a=2;h=2$.

Giải.

$$V=a^2h=1\Rightarrow a=\sqrt{\frac{1}{h}}$$

$$S=4ah+2a^2=\frac{4}{a}+2a^2=f(a)$$

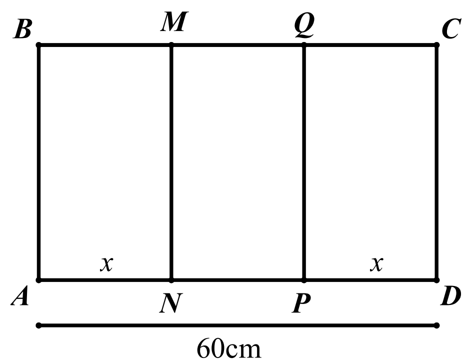
$$f'(a)=-\frac{4}{a^2}+4a$$

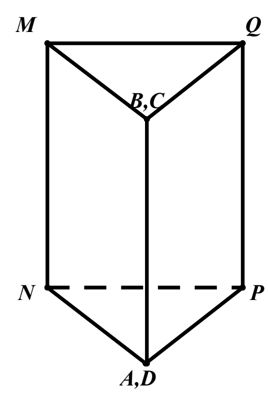
Dấu "=" xẩy ra khi $a=1$.

Chọn A.

Bài 38:

Cho một tấm nhôm hình chữ nhật ABCD có $AD=60cm$. Ta gấp tấm nhôm theo 2 cạnh MN và PQ vào phía trong đến khi AB và DC trùng nhau như hình vẽ để được 1 hình lăng trụ khuyết 2 đáy. Tìm x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất?





A. $x=20$ B. $x=30$ C. $x=45$ D. $x=40$

Giải:

Gọi m_a là độ dài đường trung tuyến đối với cạnh NP

Diện tích tam giác NAP = S_{NAP}

Ta có: $m_a=\sqrt{\frac{4x^2-(60-2x)^2}{4}}=\sqrt{-900+60x}$

$$V=h.m_A.NP$$

Xét hàm $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{60x-900}(60-2x)\Rightarrow f'(x)=\frac{60(60-2x)}{2\sqrt{60x-900}}-2\sqrt{60x-900}$

$f'(x)=0,\ f(x)\to\max$ khi x=20.

Chọn A.

Bài 39.

Một sợi dây kim loại 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a, đoạn thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r. Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì tỉ số $\frac{a}{r}$ nào sau đây đúng?

A. 2 B. 3 C. 4 D. 1.

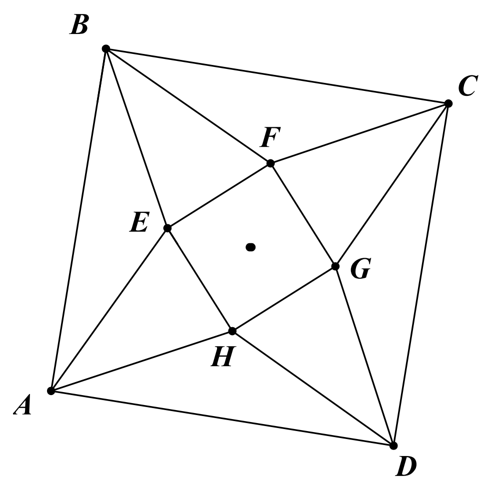
Giải:

$$C = 2\pi r = 60 - a \Rightarrow r = \frac{60 - a}{2\pi}$$

$$S_{hv} + S_{ht} = \frac{a^2}{16} + \frac{(60 - a)^2}{4\pi} \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{8} - \frac{30}{\pi} + \frac{a}{2\pi} \Rightarrow f'(x) = 0 \text{ khi } a = \frac{30.8}{\pi + 4}$$

Suy ra $\frac{a}{r} = \frac{60r}{2\pi(\pi + 4)} = 4$. CHọn C.

Bài 40:



Trong một cuộc thi làm đồ dùng học tập do trường phát động, bạn An nhờ bố làm hình chóp tứ giác đều bằng cách lấy một mảnh tôn hình vuông ABCD có cạnh bằng a, cắt mảnh tôn theo các tam giác cân AEB; BFC; CGD; DHA; sau đó gò các tam giác AEH; BEF; CFG; DGH sao cho 4 đỉnh A, B, C, D trùng nhau như hình vẽ. Thể tích lớn nhất của khối tứ giác đều tạo được là:

A. $\frac{a^3}{36}$ B. $\frac{a^3}{24}$

C. $\frac{a^3}{54}$ D. $\frac{a^3}{81}$

Gọi h là chiều cao hình chóp, x là độ dài đáy, I là trung điểm EH.

$$SI = \sqrt{h^2 + 0,25x^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{x}{2}} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{a}{\sqrt{2}} - x\right)}$$

$$V = \frac{1}{3}hx^2$$

Xét $f(x) = x^2.\sqrt{\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{a}{\sqrt{2}} - x\right)}$

$$f'(x)=\frac{\frac{-a}{\sqrt{2}}.x^2}{2\sqrt{\frac{a^2}{2}-\frac{ax}{\sqrt{2}}}}+2x\sqrt{\frac{a^2}{2}-\frac{ax}{\sqrt{2}}}\Rightarrow f'(x)=0\ khi\ a=\frac{3x}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow V=\frac{1}{3}.\sqrt{2}.x^3=\frac{\sqrt{2}}{3}.\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3 a^3=\frac{4a^3}{81}$$

Chọn D.

Bài 41:

Trong các hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính R, hãy tìm hình trụ có thể tích lớn nhất.

A. $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ B. $\frac{5\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ C. $\frac{7\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ D. $\frac{8\pi R^3}{3\sqrt{3}}$

Giải:

Kí hiệu chiều cao, bán kính đáy và thể tích của hình trụ nội tiếp hình cầu lần lượt là h, r và V. khi đó:

$V=h\pi r^2$

Vì $r^2=R^2-\frac{h^2}{4}\Rightarrow V=h\pi\left(R^2-\frac{h^2}{4}\right)=\pi\left(hR^2-\frac{h^3}{4}\right)$

Bài toán trở thành tìm GTLN của hàm số

$V(h)=\pi\left(hR^2-\frac{h^3}{4}\right), h\in(0;2R)$

Ta có: $V'(h)=\pi\left(R^2-\frac{3h^2}{4}\right)=0\Leftrightarrow h=\frac{2R}{\sqrt{3}}$

BBT

h	0	$\frac{2r}{\sqrt{3}}$	2R
V'(h)	+	0	−
V(h)		$\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$	

Từ BBT, suy ra $\max\limits_{(0;2R)} V = V\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$

Vậy hình trụ nội tiếp hình cầu bán kính R có thể tích lớn nhất khi chiều cao của nó bằng $\frac{2R}{\sqrt{3}}$,

Khi đó, Thể tích khối trụ là: $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$.

Bài 42:

Cho số dương m, hãy phân tích m thành tổng của hai số dương sao cho tích của chúng là lớn nhất.

A. $\frac{m}{5}$ B. $\frac{m}{4}$ C. $\frac{m}{3}$ D. $\frac{m}{2}$

Giải:

Cho m>0. Đặt x là số thứ nhất, 0<x<m, số thứ hai là m-x .

Xét tích $P(x) = x(m - x), x \in (0;m)$. Ta có:

$P'(x) = -2x + m = 0 \Leftrightarrow x = \frac{m}{2}$

BBT

X	0		$\frac{m}{2}$		m
$P'(x)$		+	0	$-$	
$P(x)$			$\frac{m^2}{4}$		

Suy ra: $\max\limits_{(0;m)} P(x) = P\left(\frac{m}{2}\right) = \frac{m^2}{4}$. vậy phân tich m thành tổng hai số $\frac{m}{2}$. Chọn D.

Bài 43:

Tìm hai số có hiệu là 13 sao cho tích của chúng là bé nhất.

A. $-\frac{13}{2} và \frac{13}{2}$ B. $-\frac{13}{4} và \frac{39}{4}$ C. $-\frac{13}{5} và \frac{52}{5}$ D. $-\frac{13}{6} và \frac{65}{6}$

Giải:

Gọi một trong hai số phải tìm là x, ta có số kia là $x + 13$

Xét tích $P(x) = x(13 - x)$. tc: $P'(x) = 2x + 13 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-13}{2}$

BBT

X	$-\infty$	$\frac{-13}{2}$	$+\infty$
P'(x)	$-$	0	+
P(x)		$\frac{-169}{4}$	

Suy ra: $\min P(x) = P\left(\frac{-13}{2}\right) = \frac{-169}{4}$. Vậy tích hia số bé nhất khi một trong hai số là $\frac{-13}{2}$ và số kia là $\frac{13}{2}$. CHọn A.

Bài 44: Hãy tìm tam giác vuông có diện tích lớn nhất nếu tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số $a(a>0)$.

A. $\max\limits_{\left[0;\frac{a}{2}\right]} S(x) = \frac{a^2}{6\sqrt{3}}\ khi\ AB = \frac{a}{3}; BC = \frac{2a}{3}$

B. $\max\limits_{\left[0;\frac{a}{2}\right]} S(x) = \frac{a^2}{5\sqrt{3}}\ khi\ AB = \frac{a}{3}; BC = \frac{2a}{3}$

C. $\max\limits_{\left[0;\frac{a}{2}\right]} S(x) = \frac{a^2}{4\sqrt{3}}\ khi\ AB = \frac{a}{3}; BC = \frac{2a}{3}$

D. $\max\limits_{\left[0;\frac{a}{2}\right]} S(x) = \frac{a^2}{3\sqrt{3}}\ khi\ AB = \frac{a}{3}; BC = \frac{2a}{3}$

Giải:

Kí hiệu cạnh góc vuông AB là $x, x \in \left[0; \frac{a}{2}\right]$

Khi đó cạnh huyền $BC = a - x$, cạnh góc vuông kia là

$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(a-x)^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - 2ax}$.

Diện tích tam giác ABC là $S(x) = \frac{1}{2}x.\sqrt{a^2 - 2ax}, x \in \left[0; \frac{a}{2}\right]$. Ta có:

$S'(x) = \frac{a(a-3x)}{2\sqrt{a^2 - 2ax}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}$

BBT

X	0	$\frac{a}{3}$	$\frac{a}{2}$
S'(x)	+	0	–
S(x)		$\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$	

Suy ra $\max\limits_{\left[0;\frac{a}{2}\right]} S(x) = \frac{a^2}{6\sqrt{3}}$ $khi\ AB = \frac{a}{3}, BC = \frac{2a}{3}$. CHỌN A.

Bài 45:

Cho một tam giác đều ABC cạnh a. Người ta dựng một hình chữ nhật MNPQ có cạnh MN nằm trên cạnh BC, hai đỉnh P và Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AC và AB của tam giác. Xác định vị trí của điểm M sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó.

A. $\max\limits_{\left[0;\frac{a}{2}\right]} S(x) = S\left(\frac{a}{5}\right) = \frac{\sqrt{3}a^2}{8}$

B. $\max\limits_{\left[0;\frac{a}{2}\right]} S(x) = S\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}a^2}{7}$

C. $\max\limits_{\left[0;\frac{a}{2}\right]} S(x) = S\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}a^2}{8}$

D. $\max\limits_{\left[0;\frac{a}{2}\right]} S(x) = S\left(\frac{a}{7}\right) = \frac{\sqrt{3}a^2}{13}$

Giải:

Đặt $BM = x; x \in \left[0; \frac{a}{2}\right]$ ta được $MN = a - 2x; QM = x\sqrt{3}$

Diện tích hình chữ nhật MNPQ là:

$S(x) = MN.PQ = (a - 2x)x\sqrt{3} = \sqrt{3}(ax - 2x^2)$. Ta có:

$S'(x) = \sqrt{3}(a - 4x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{4}$

BBT

X	0	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{2}$
S'(x)	+	0	–
S(x)		$\frac{\sqrt{3}a^2}{8}$	

Suy ra S(x) đạt GTLN tại điểm $x=\frac{a}{4}$ và GTLN của diện tích hình chữ nhật là

$\max\limits_{\left[0;\frac{a}{2}\right]} S(x)=S\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}a^2}{8}$. CHọn A.

Bài 46:

Cho một parapol $(P): y=x^2$ và điểm $A(-3;0)$. Xác định điểm M thuộc parapol (P) sao cho khoảng cách AM là ngắn nhất và tìm khoảng cách ngắn nhất đó.

A. $M_0(-1;3); AM_0=\sqrt{7}$ B. $M_0(-1;1); AM_0=\sqrt{5}$

C. $M_0(-2;1); AM_0=\sqrt{5}$ D. $M_0(-2;3); AM_0=\sqrt{11}$

Giải

Gọi $M\left(x;x^2\right)$ là một điểm bất kì của parapol (P).

Ta có: $AM^2=(x+3)^2+x^4=x^4+x^2+6x+9$.

Khoảng cách AM đạt GTNN khi và chỉ khi $f(x)=AM^2$ đạt GTNN.

Xét $f(x)=x^4+x^2+6x+9$

$\Rightarrow f'(x)=4x^3+2x+6=(x+1)\left(4x^2-4x+6\right)=0 \Leftrightarrow x=-1$

BBT

X	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$			5		

Suy ra f(x) đạt GTNN tại điểm x=-1 và $f(-1)=5$. Do đó, khoảng cách AM đạt GTNN khi M nằm ở vị trí điểm $M_0(-1;1); AM_0=\sqrt{5}$. CHọn B.

Bài 47: Một tạp chí được bán với giá 20 nghìn đồng một cuốn. Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: Lương cán bộ, công nhân viên, giấy in,…) được cho bởi công thức $C(x)=0{,}0001x^2-0{,}2x+10000$, $C(x)$ được tính theo đơn vị vạn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng.

1) a) Tính tổng chi phí $T(x)$ (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí

b) Tỉ số $M(x)=\frac{T(x)}{x}$ được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Tính $M(x)$ theo x và tìm số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình là thấp nhất.

2) Các khoản thu bao gồm tiền bán tạp chí và 90 triệu nhận được từ quảng cáo và sự trợ giúp cho báo chí. Giả sử số cuốn in ra đều được bán hết.

a) Chứng minh rằng số tiền lãi khi in x cuốn tạp chí là $L(x)=-0,0001x^2+1,8x-1000.$

b) Hỏi in bao nhiêu cuốn thì có lãi.

c) In bao nhiêu cuốn thì lãi nhiều nhất? tính số tiền lãi.

Giải.

1)a) Tổng chi phí cho x cuốn tạp chí là:

$$T(x)=C(x)+0,4x=0,0001x^2+0,2x+10000.$$

b) Ta có: $M(x)=0,0001x+\frac{10000}{x}+0,2$ với $x=1,2,...$ (6)

ta xét hàm số $y=M(x)$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Trong đó $M(x)$ được xác định bởi công thức (6) với mọi $x>0,$ trong đó hàm số M đạt GTNN trên $(0;+\infty)$

Ta có: $M'(x)=0,0001-\frac{10000}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=10000$

BBT

x	0		10 000		$+\infty$
$M'(x)$		$-$	0	$+$	
M(x)			2,2		

Suy ra $\min\limits_{(0;+\infty)} M(x)=M(10000)=2,2$

Vậy chi phí trung bình cho x cuốn tạp chí thấp nhất khi $x=10000$ (cuốn). chi phí cho mỗi cuốn khi đó là $2,2$ van đồng $=22000$ (đồng).

2) a) Tổng số tiền thu được khi bán x cuốn tạp chí $(x\in\mathbb{N}^*)$ là: $2x+9000$ (vạn đồng)

Số tiền lãi khi bán x cuốn là:

$$L(x)=2x+9000-T(x)=-0,0001x^2+1,8x-1000$$

b) có lãi khi $L(x)>0$. Tức là:

$-0,0001x^2+1,8x-1000>0 \Leftrightarrow \dfrac{0,9-\sqrt{0,71}}{0,0001}<x<\dfrac{0,9+\sqrt{0,71}}{0,0001}$

$\Leftrightarrow 9000-\sqrt{71\,000\,000}<x<9000+\sqrt{71\,000\,000}$

Vì x lấy giá trị nguyên dương và $9000-\sqrt{71\,000\,000}\approx 573,85$ *và* $9000+\sqrt{71\,000\,000}\approx 17426,15$

Nên $573<x<17427$

c) xét hàm số: $L(x)=-0,0001x^2+1,8x-1000$, $x\in(0;+\infty)$ và tìm x>0 để tại đó $L(x)$ đạt GTLN trên $(0;+\infty)$

Ta có: $L'(x)=-0,0002x+1,8=0 \Leftrightarrow x=9000$

BBT.

X	0		9 000		$+\infty$
L'(x)		+	0	–	
L(x)			7100		

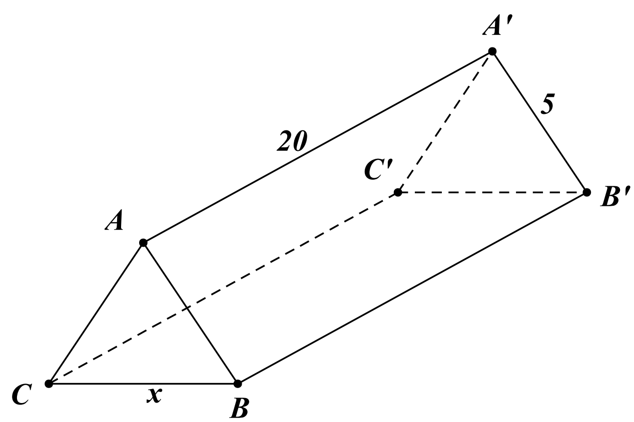
Suy ra $\max\limits_{(0;+\infty)} L(x)=L(9000)=7100$

Vậy muốn lãi nhiều nhất thì phải in 9000 cuốn khi đó tiền lãi thu được là: 7100 vạn đồng $71\,000\,000$ (đồng).

Bài 48: Một hành lang giữa hai toàn nhà có hình dạng của hình lăng trụ đứng. Hai mặt bên ABB'A' và ACC'A" là hai tấm kính hình chữ nhật dài 20 m, rộng 5 m, Gọi x (mét) là độ dài cạnh BC.

a) Tính thể tích V của hình lăng trụ theo x.

b) Tìm x sao cho hình lăng trụ có thể tích lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.



Giải:

a) $V=5x\sqrt{100-x^2}\,(m^3);0<x<10$

b) Hình lăng trụ có thể tích lớn nhất khi $x=5\sqrt{2}\,(m)$ và $\max\limits_{(0;10)} V=V\left(5\sqrt{2}\right)=250\,(m^3)$

Bài 49: Cho hình vuông ABCD với cạnh có độ dài cạnh bằng 1 và cung $\overset{\frown}{AB}$ là một phần tư đường tròn tâm A, bán kính AB chứ trong hình vuông. Tiếp tuyến tại điểm M của cung $\overset{\frown}{BD}$ cắt đoạn thẳng CD tại điểm P và cắt đoạn thẳng BC tại điểm Q. Đặt $x = DP \text{ và } y = PQ$

a) Chứng minh rằng $PQ^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 \text{ và } PQ = x + y$. Từ đó tính y theo x.

b) Tính PQ theo x và tìm x để PQ có độ dài nhỏ nhất.

Giải:

a) $y = \dfrac{1 - x}{1 + x}; 0 < x < 1$

b) $PQ = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}; 0 < x < 1$

đoạn thẳng PQ có độ dài nhỏ nhất khi $x = \sqrt{2} - 1$

Bài 50: Một ngọn hải đăng đặt ở vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 5(km)$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là $7(km)$. Người canh hải đăng có thể chèo đó từ A đến điểm M trên bờ biển với vận tốc $4(km/h)$ rồi đi bộ đến C với vận tốc $6(km/h)$. Xác định vị trí của điểm M để người đó đến kho nhanh nhất.

Giải:

Đặt $x = BM; 0 \le x \le 7.$ Khi đó $AM = \sqrt{x^2 + 25}, MC = 7 - x$.

Thời gian người canh hải đăng đi từ A đến C là $T(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 25}}{4} + \dfrac{7 - x}{6}$ (giờ), $0 \le x \le 7$

Hàm số T đạt GTNN tại điểm $x = 2\sqrt{5} \simeq 4,472(km)$

Bài 51:

Một hình chóp tứ giác đều nội tiếp hình cầu bán kính a.

a) Chứng minh rằng thể tích của hình chóp là: $V = \dfrac{4a^2x^2}{3(x - 2a)}$, trong đó x là chiều cao ci=ủa hình chóp.

b) Với giá trị nảo của x, hình chóp có thể tích nhỏ nhất.

Giải:

a) Mặt phẳng đi qua đường cao SH của hình chóp và trung điểm M của một cạnh đáy cắt hình chóp theo tam giác cân SMN và cắt hình cầu theo hình tròn tâm O, bán kính a nội tiếp tam giác SMN.

Có thể tính thể tích hình chóp theo x và $\alpha = \widehat{SNH}$. Sau đó sử dụng đẳng thức $x = a + SO$. Để tìm hệ thức giữa a, x và α.

Ta có: $HN = x\cot\alpha; MN = 2x\cot a$. thể tích hình chóp là:

$$V = \frac{1}{3}MN^2.SH = \frac{4}{3}x^3\cot^2\alpha$$

Ta tính $\cot^2\alpha$ theo a và x.

Từ đẳng thức:

$$SH = OH + SO \Rightarrow x = a + \frac{a}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \frac{x^2 - 2ax}{(x - a)^2};$$

$$\cot^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{a^2}{x(x - 2a)}.$$

Từ đó suy ra công thức cần chứng minh.

b) Cần chú ý V xác định khi x>2a.

Bài 52:

Một sợi dây kim loại dài $60(cm)$ được cắt thành hai đoạn, đoạn thứ nhất uốn thành hình vuông, đoạn thứ hai uốn thành hình tròn. Phải cắt sợi dây như thế nào để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất.

Giải:

Độ dài cạnh hình vuông là $x = \frac{60}{\pi + 4}(cm)$. Đoạn dây được uốn thành hình vuông là $\frac{240}{\pi + 4} \approx 33,6(cm)$. Bán kính đường tròn là $r = \frac{30}{\pi + 4}(cm)$.

Đoạn dây dây được uốn thành vòng tròn có độ dài là: $\frac{60}{\pi + 4} \approx 26,4(cm)$

Ta có: $4x + 2\pi r = 60 \Rightarrow x = \frac{30 - \pi r}{2}; 0 < r < \frac{30}{\pi}$

Tổng diện tích hình vuông và hình tròn là $S = \pi r^2 + x^2 = \pi r^2 + \frac{1}{4}(30 - \pi r)^2$

Dễ thấy S đạt GTNN tại điểm $r = \frac{30}{\pi + 4}$

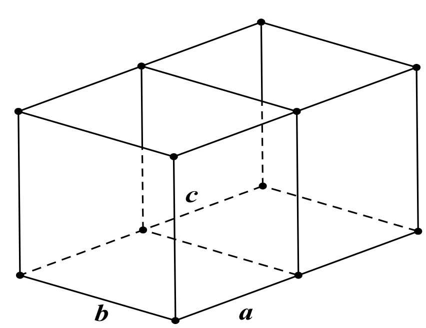
Bài 53:

Người thợ cần làm một bể cá hai ngăn bằng nhau, không có nắp ở phía trên với thể tích $1,296m^3$. Người thợ này cắt các tấm kính ghép lại một bể cá dạng hình hộp chữ nhật với 3 kích thước mỗi ngăn là a, b, c như hình vẽ. Hỏi người thợ phải thiết kế các kích thước a, ,b, c bằng bao nhiêu để đỡ tốn kính nhất, giả sử độ dầy của kính không đáng kể.

A. $a = 3,6cm;\ b = 0,6cm;\ c = 0,6cm$.

B. $a = 2,4cm;\ b = 0,9cm;\ c = 0,6cm$

C. $a = 0,9cm;\ b = 1,2cm;\ c = 0,6cm$



D. $a=1,2cm;\ b=1,2cm;\ c=0,9cm$.

Giải:

$V=2(abc)=1,296$

Ta có: $S=2(ac+bc)+ab+2ac+bc+ab=4ac+3bc+2ab$ (1)

Theo đề bài $V=2(abc)=1,296\Leftrightarrow abc=\frac{81}{125}$ (2)

Bài toán trở thành tìm a,b,c để $S_{\min}$ với ĐK (2)

Từ (1) Ta có:

$$S=\frac{4abc}{b}+\frac{3abc}{a}+\frac{2abc}{c}$$

$$=4\frac{81}{125}.\frac{1}{b}+3.\frac{81}{125}.\frac{1}{a}+2.\frac{81}{125}.\frac{1}{c}$$

$$=\frac{81}{125}\left(\frac{4}{b}+\frac{3}{a}+\frac{2}{c}\right)\geq\frac{81}{125}3\sqrt[3]{\frac{4.3.2}{abc}}$$

$$\geq\frac{81}{125}\sqrt[3]{\frac{24}{\frac{81}{125}}}$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\frac{4}{b}=\frac{3}{a}=\frac{2}{c}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{3b}{4}\\c=\frac{b}{2}\end{cases}$

Thay vào (2): $\frac{3b}{4}.b.\frac{b}{2}=\frac{81}{125}\Leftrightarrow\frac{3b^3}{8}=\frac{81}{125}\Leftrightarrow b=1,2$

Vậy $a=0,9;c=0,6$

Chọn C.