PHẦN CUỐI: BÀI TOÁN VẬN DỤNG (8.9.10)

Chủ đề 7. TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN OXYZ

Câu 1: (SGD VĨNH PHÚC) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;0)$, $B(3;4;1)$, $D(-1;3;2)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho $ABCD$ là hình thang có hai cạnh đáy AB, CD và có góc C bằng $45°$.

A. $C(5;9;5)$. **B.** $C(1;5;3)$. **C.** $C(-3;1;1)$. **D.** $C(3;7;4)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Cách 1. $\overrightarrow{AB}=(2;2;1)$.

Đường thẳng CD có phương trình là $CD:\begin{cases}x=-1+2t\\ y=3+2t\\ z=2+t\end{cases}$.

Suy ra $C(-1+2t;3+2t;2+t);\overrightarrow{CB}=(4-2t;1-2t;-1-t)$, $\overrightarrow{CD}=(-2t;-2t;-t)$.

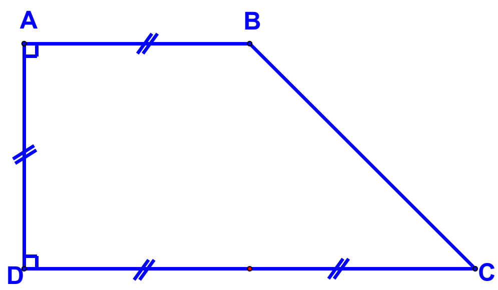
Ta có $\cos\widehat{BCD}=\dfrac{(4-2t)(-2t)+(1-2t)(-2t)+(-1-t)(-t)}{\sqrt{(4-2t)^2+(1-2t)^2+(-1-t)^2}\sqrt{(-2t)^2+(-2t)^2+(-t)^2}}$

Hay $\dfrac{(4-2t)(-2t)+(1-2t)(-2t)+(-1-t)(-t)}{\sqrt{(4-2t)^2+(1-2t)^2+(-1-t)^2}\sqrt{(-2t)^2+(-2t)^2+(-t)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (1).

Lần lượt thay t bằng $3;1;-1;2$ (tham số t tương ứng với toạ độ điểm C ở các phương án A, B, C, D), ta thấy $t=2$ thoả (1).

Cách 2.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;1),\overrightarrow{AD}=(-2;1;2)$. Suy ra $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ và $AB=AD$. Theo giả thiết, suy ra $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$. Kí hiệu $C(a;b;c)$, ta có $\overrightarrow{DC}=(a+1;b-3;c-2)$, $2\overrightarrow{AB}=(4;4;2)$. Từ đó $C(3;7;4)$.



Câu 2: (SGD VĨNH PHÚC) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=t_1\\y=0\\z=0\end{cases}$, $d_2:\begin{cases}x=1\\y=t_2\\z=0\end{cases}$, $d_3:\begin{cases}x=1\\y=0\\z=t_3\end{cases}$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $H(3;2;1)$ và cắt ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 lần lượt tại A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC.

A. $2x+2y+z-11=0$. **B.** $x+y+z-6=0$. **C.** $2x+2y-z-9=0$. **D.** $3x+2y+z-14=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi $A(a;0;0)$, $B(1;b;0)$, $C(1;0;c)$.

$\overrightarrow{AB}=(1-a;b;0)$, $\overrightarrow{BC}=(0;-b;c)$, $\overrightarrow{CH}=(2;2;1-c)$, $\overrightarrow{AH}=(3-a;2;1)$.

Yêu cầu bài toán

$$\begin{cases}\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right]\overrightarrow{CH}=0\\\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH}=0\\\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AH}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2bc+2c(a-1)+(1-c)b(a-1)=0\\a=b+1\\c=2b\end{cases}\Rightarrow 9b^2-2b^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\b=\dfrac{9}{2}\end{array}\right.$$

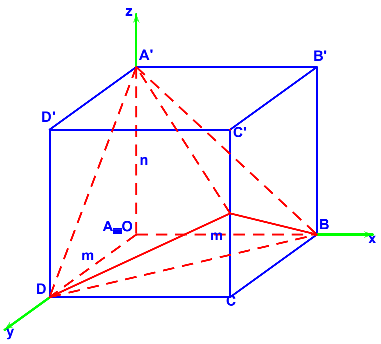
Nếu $b=0$ suy ra $A\equiv B$ (loại).

Nếu $b=\dfrac{9}{2}$, tọa độ $A\left(\dfrac{11}{2};0;0\right)$, $B\left(1;\dfrac{9}{2};0\right)$, $C(1;0;9)$. Suy ra phương trình mặt phẳng (ABC) là $2x+2y+z-11=0$.

Câu 3: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O, các đỉnh $B(m;0;0)$, $D(0;m;0)$, $A'(0;0;n)$ với $m,n>0$ và $m+n=4$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Khi đó thể tích tứ diện $BDA'M$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\dfrac{245}{108}$. **B.** $\dfrac{9}{4}$. **C.** $\dfrac{64}{27}$. **D.** $\dfrac{75}{32}$.

Hướng dẫn giải



Tọa độ điểm $C(m;m;0), C'(m;m;n), M\left(m;m;\dfrac{n}{2}\right)$

$\overrightarrow{BA'}=(-m;0;n), \overrightarrow{BD}=(-m;m;0), \overrightarrow{BM}=\left(0;m;\dfrac{n}{2}\right)$

$\left[\overrightarrow{BA'}\overrightarrow{BD}\right]=(-mn;-mn;-m^2)$

$$V_{BDA'M}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BD}\right]\overrightarrow{BM}\right|=\frac{m^2n}{4}$$

Ta có $m.m.(2n)\le\left(\frac{m+m+2n}{3}\right)^3=\frac{512}{27}\Rightarrow m^2n\le\frac{256}{27}$

$\Rightarrow V_{BDA'M}\le\frac{64}{27}$

Chọn đáp án: C

Câu 4: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hai mặt phẳng $4x-4y+2z-7=0$ và $2x-2y+z+1=0$ chứa hai mặt của hình lập phương. Thể tích khối lập phương đó là

A. $V=\frac{27}{8}$ **B.** $.V=\frac{81\sqrt{3}}{8}$. **C.** $V=\frac{9\sqrt{3}}{2}$ **D.** $V=\frac{64}{27}$

Hướng dẫn giải

Theo bài ra hai mặt phẳng $4x-4y+2z-7=0$ và $2x-2y+z+1=0$ chứa hai mặt của hình lập phương. Mà hai mặt phẳng $(P):4x-4y+2z-7=0$ và $(Q):2x-2y+z+1=0$ song song với nhau nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng sẽ bằng cạnh của hình lập phương.

Ta có $M(0;0;-1)\in(Q)$ nên $d((Q),(P))=d(M,(P))=\left|\frac{-2-7}{\sqrt{4^2+(-4)^2+2^2}}\right|=\frac{3}{2}$

Vậy thể tích khối lập phương là: $V=\frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$.

Câu 5: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;3;0)$, $B(0;-\sqrt{2};0)$, $M\left(\frac{6}{5};-\sqrt{2};2\right)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\y=0\\z=2-t\end{cases}$. Điểm C thuộc d sao cho chu vi tam giác ABC là nhỏ nhấ thì độ dài CM bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 4. **C.** 2. **D.** $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Hướng dẫn giải

Do AB có độ dài không đổi nên chu vi tam giác ABC nhỏ nhất khi $AC+CB$ nhỏ nhất.

Vì $C\in d\Rightarrow C(t;0;2-t)\Rightarrow AC=\sqrt{\left(\sqrt{2}t-2\sqrt{2}\right)^2+9}$, $BC=\sqrt{\left(\sqrt{2}t-\sqrt{2}\right)^2+4}$

$\Rightarrow AC+CB=\sqrt{\left(\sqrt{2}t-2\sqrt{2}\right)^2+9}+\sqrt{\left(\sqrt{2}t-\sqrt{2}\right)^2+4}$.

Đặt $\vec{u}=\left(\sqrt{2}t-2\sqrt{2};3\right),\vec{v}=\left(-\sqrt{2}t+\sqrt{2};2\right)$ ápdụngbấtđẳngthức $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\ge\left|\vec{u}+\vec{v}\right|$

$\Rightarrow\sqrt{\left(\sqrt{2}t-2\sqrt{2}\right)^2+9}+\sqrt{\left(\sqrt{2}t-\sqrt{2}\right)^2+4}\ge\sqrt{\left(\sqrt{2}-2\sqrt{2}\right)^2+25}$. Dấubằngxảyrakhivàchỉ

khi $\dfrac{\sqrt{2}t-2\sqrt{2}}{-\sqrt{2}t+\sqrt{2}}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow t=\dfrac{7}{5}\Rightarrow C\left(\dfrac{7}{5};0;\dfrac{3}{5}\right)\Rightarrow CM=\sqrt{\left(\dfrac{6}{5}-\dfrac{7}{5}\right)^2+2+\left(2-\dfrac{3}{5}\right)^2}=2.$

Chọn C.

Câu 6: (T.T DIỆU HIỀN) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;1;1)$, $B(0;1;2)$, $C(-2;0;1)$ $(P):x-y+z+1=0$. Tìm điểm $N\in(P)$ sao cho $S=2NA^2+NB^2+NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $N\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{4};\dfrac{3}{4}\right)$. **B.** $N(3;5;1)$. **C.** $N(-2;0;1)$. **D.** $N\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2};-2\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi I là trung điểm BC và J là trung điểm AI. Do đó $I\left(-1;\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ và $J\left(0;\dfrac{3}{4};\dfrac{5}{4}\right)$.

Khi đó $S=2NA^2+2NI^2+\dfrac{1}{2}BC^2=4NJ^2+IJ^2+\dfrac{1}{2}BC^2$.

Do đó S nhỏ nhất khi NJ nhỏ nhất. Suy ra J là hình chiếu của N trên (P).

Phương trình đường thẳng $NJ:\begin{cases}x=t\\ y=\dfrac{3}{4}-t\\ z=\dfrac{5}{4}+t\end{cases}$.

Tọa độ điểm J là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x-y+z+1=0\\ x=t\\ y=\dfrac{3}{4}-t\\ z=\dfrac{5}{4}+t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\ y=\dfrac{5}{4}\\ z=\dfrac{3}{4}\end{cases}$

Câu 7: (LẠNG GIANG SỐ 1) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=1\\ y=1,t\in\mathbb{R}\\ z=t\end{cases}$; $d_2:\begin{cases}x=2\\ y=u\\ z=1+u\end{cases},u\in\mathbb{R}$; $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với cả d_1,d_2 và có tâm thuộc đường thẳng Δ?

A. $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1$.

B. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$.

C. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$.

D. $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2+\left(z-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(1;1;0)$ và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_{d_1}}=(0;0;1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(2;0;1)$ và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_{d_2}}=(0;1;1)$.

Gọi I là tâm của mặt cầu. Vì $I\in\Delta$ nên ta tham số hóa $I(1+t;t;1+t)$, từ đó

$$\overrightarrow{IM_1}=(-t;1-t;-1-t),\qquad \overrightarrow{IM_2}=(1-t;-t;-t).$$

Theo giả thiết ta có $d(I;d_1)=d(I;d_2)$, tương đương với

$$\frac{\left|\left[\overrightarrow{IM_1};\overrightarrow{u_{d_1}}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_{d_1}}\right|}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IM_2};\overrightarrow{u_{d_2}}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_{d_2}}\right|}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{(1-t)^2+t^2}}{1}=\frac{\sqrt{2(1-t)^2}}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow t=0$$

Suy ra $I(1;0;1)$ và bán kính mặt cầu là $R=d(I;d_1)=1$. Phương trình mặt cầu cần tìm là

$$(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1.$$

Câu 8: (LẠNG GIANG SỐ 1) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;2)$; $B(0;-1;2)$ và mặt phẳng $(P):x+2y-2z+12=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất?

A. $M(2;2;9)$.

B. $M\left(-\frac{6}{11};-\frac{18}{11};\frac{25}{11}\right)$.

C. $M\left(\frac{7}{6};\frac{7}{6};\frac{31}{4}\right)$.

D. $M\left(-\frac{2}{5};-\frac{11}{5};\frac{18}{5}\right)$.

Hướng dẫn giải

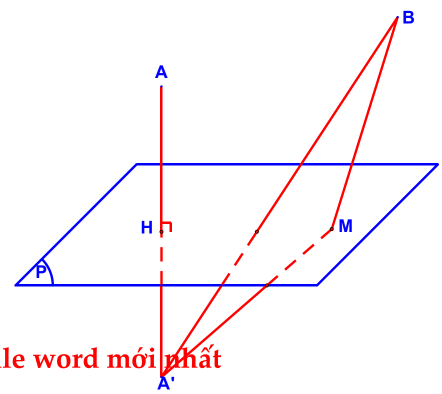
Chọn D.

Thay tọa độ $A(1;0;2)$; $B(0;-1;2)$ vào phương trình mặt phẳng (P), ta được $P(A)P(B)>0\Rightarrow$ hai điểm A, B cùng phía với đối với mặt phẳng (P).

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (P). Ta có

$$MA+MB=MA'+MB\geq A'B.$$

Nên $\min(MA+MB)=A'B$ khi và chỉ khi M là giao điểm của $A'B$ với (P).



Phương trình $AA':\begin{cases}x=1+t\\y=2t\\z=2-2t\end{cases}$ (AA' đi qua $A(1;0;2)$ và có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;2;-1)$).

Gọi H là giao điểm của AA' trên (P), suy ra tọa độ của H là $H(0;-2;4)$, suy ra $A'(-1;-4;6)$,

nên phương trình $A'B:\begin{cases}x=t\\y=-1+3t\\z=2-4t\end{cases}$.

Vì M là giao điểm của $A'B$ với (P) nên ta tính được tọa độ $M\left(-\frac{2}{5};-\frac{11}{5};\frac{18}{5}\right)$.

Câu 9: (LẠNG GIANG SỐ 1) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x+2y+2z-4=0$. Phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ là

A. $d:\begin{cases}x=-3+t\\y=1-2t\\z=1-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

B. $d:\begin{cases}x=3t\\y=2+t\\z=2+2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

C. $d:\begin{cases}x=-2-4t\\y=-1+3t\\z=4-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

D. $d:\begin{cases}x=-1-t\\y=3-3t\\z=3-2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Vectơ chỉ phương của $\Delta:\vec{u}_\Delta(1;1;-1)$, vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;2;2)$.

Vì $\begin{cases}d\perp\Delta\\d\subset(P)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{u}_d\perp\vec{u}_\Delta\\\vec{u}_d\perp\vec{n}_{(P)}\end{cases}\Rightarrow\vec{u}_d=\left[\vec{u}_\Delta;\vec{n}_{(P)}\right]=(4;-3;1)$.

Tọa độ giao điểm $H=\Delta\cap(P)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}x=t\\y=1+t\\z=2-t\\x+2y+2z-4=0\end{cases}\Rightarrow t=-2\Rightarrow H(-2;-1;4)$.

Lại có $(d;\Delta)\cap(P)=d$, mà $H=\Delta\cap(P)$. Suy ra $H\in d$.

Vậy đường thẳng d đi qua $H(-2;-1;4)$ và có VTCP $\vec{u}_d=(4;-3;1)$ nên có phương trình $d:\begin{cases}x=-2-4t\\y=-1+3t\\z=4-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Câu 10: (LÝ TỰ TRỌNG – TPHCM) Trong không gian cho điểm $M(1;-3;2)$.Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua M và cắt các trục tọa độ tại A,B,C mà $OA=OB=OC\neq0$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn **C.**

Giả sử mặt phẳng (α) cần tìm cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0c)(a,b,c \neq 0)$

$(\alpha): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$; (α) qua $M(1;-3;2)$ nên: $(\alpha): \frac{1}{a}-\frac{3}{b}+\frac{2}{c}=1(*)$

$$OA=OB=OC \neq 0 \Rightarrow |a|=|b|=|c| \neq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=c(1) \\ a=b=-c(2) \\ a=-b=c(3) \\ a=-b=-c(4) \end{array}\right.$$

Thay (1) vào $(*)$ ta có phương trình vô nghiệm

Thay $(2),(3),(4)$ vào $(*)$ ta được tương ứng $a=-4, a=6, a=\frac{-3}{4}$

Vậy có 3 mặt phẳng.

Câu 11: (LÝ TỰ TRỌNG – TPHCM) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $E(8;1;1)$.Viết phương trình mặt phẳng (α) qua E và cắt nửa trục dương Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho OG nhỏ nhất với G là trọng tâm tam giác ABC.

A. $x+y+2z-11=0$. **B.** $8x+y+z-66=0$.

C. $2x+y+z-18=0$. **D.** $x+2y+2z-12=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn **D.**

Cách 1 :

Với đáp án A: $A(11;0;0); B(0;11;0); C(0;0;\frac{11}{2}) \Rightarrow G(\frac{11}{3};\frac{11}{3};\frac{11}{6}) \Rightarrow OG^2=\frac{121}{4}$

Với đáp án B: $A(\frac{33}{4};0;0); B(0;66;0); C(0;0;66) \Rightarrow G(\frac{11}{4};22;22) \Rightarrow OG^2=\frac{15609}{16}$

Với đáp án C: $A(9;0;0); B(0;18;0); C(0;0;18) \Rightarrow G(3;\frac{18}{3};\frac{18}{3}) \Rightarrow OG^2=81$

Với đáp án D: $A(-12;0;0); B(0;6;0); C(0;0;6) \Rightarrow G(-4;2;2) \Rightarrow OG^2=24$

Cách 2 :

Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$. Theo đề bài ta có : $\frac{8}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Cần tìm giá trị nhỏ nhất của $a^2+b^2+c^2$.

Ta có $(a^2+b^2+c^2)(4+1+1) \geq (a.2+b.1+c.1)^2 \Rightarrow 6.(a^2+b^2+c^2) \geq (2a+b+c)^2$

Mặt khác

$$\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)(4+1+1)}\ge(a.2+b.1+c.1)$$
$$\ge(2a+b+c)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$
$$\ge(4+1+1)^2=36$$

Suy ra $a^2+b^2+c^2\ge6^3$. Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a^2}{4}=b^2=c^2\Rightarrow a=2b=2c.$

Vậy $a^2+b^2+c^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 216 khi $a=12,b=c=6$.

Vậy phương trình mặt phẳng là : $\frac{x}{12}+\frac{y}{6}+\frac{z}{6}=1$ hay $x+2y+2z-12=0$.

Câu 12: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{4}$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=2$. Hai mặt phẳng (P) và (Q) chứa d và tiếp xúc với (S). Gọi M,N là tiếp điểm. Tính độ dài đoạn thẳng MN.

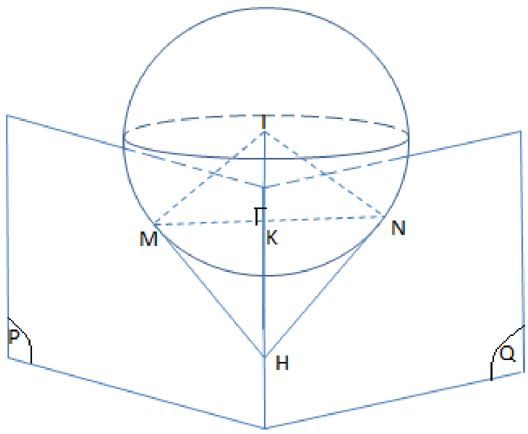
A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\frac{4}{\sqrt{3}}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B .

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1),R=\sqrt{2}$

Đường thẳng d nhận $\vec{u}=(2;-1;4)$ làm vecto chỉ phương



Gọi H là hình chiếu của I lên đường thẳng d .

$H\in d\Leftrightarrow H(2t+2;-t;4t)$

Lại có :

$\overrightarrow{IH}.\vec{u}=0\Leftrightarrow(2t+1;-t-2;4t-1).(2;-1;4)=0$

$\Leftrightarrow2(2t+1)+t+2+4(4t-1)=0\Leftrightarrow t=0$

Suy ra tọa độ điểm $H(2;0;0)$.

Vậy $IH=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$

Suy ra: $HM=\sqrt{6-2}=2$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng HI.

Suy ra: $\frac{1}{MK^2}=\frac{1}{MH^2}+\frac{1}{MI^2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$.

Suy ra: $MK=\frac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow MN=\frac{4}{\sqrt{3}}$.

Câu 13: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;1)$. Mặt phẳng (P) thay đổi đi qua M lần lượt cắt các tia Ox,Oy,Oz tại A,B,C khác O. Tính giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $OABC$.

A. 54. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 18.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0,0,c)$ với $a,b,c>0$.

Phương trình mặt phẳng (P) : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Vì : $M\in(P)\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=1$.

Thể tích khối tứ diện $OABC$ là : $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có : $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{2}{b}\cdot\frac{1}{c}}$

Hay $1\geq 3\sqrt[3]{\frac{2}{abc}}\Leftrightarrow 1\geq\frac{54}{abc}$

Suy ra : $abc\geq 54\Leftrightarrow\frac{1}{6}abc\geq 9$

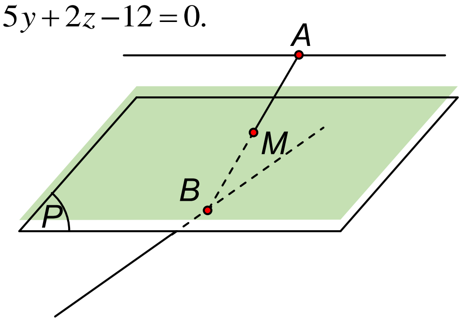
Vậy : $V_{OABC}\geq 9$.

Câu 14: (THTT – 477) Cho hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\\z=2t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=2-2t'\\y=3\\z=t'\end{cases}$. Mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình là

A. $x+5y+2z+12=0.$ **B.** $x+5y-2z+12=0.$

C. $x-5y+2z-12=0.$ **D.** $x+5y+2z-12=0.$

Hướng dẫn giải



Chọn D.

d_1 qua $A(2;1;0)$ và có VTCP là $\vec{u}_1=(1;-1;2)$;

d_2 qua $B(2;3;0)$ và có VTCP là $\vec{u}_2=(-2;0;1)$.

Có $[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(-1;-5;-2)$; $\overrightarrow{AB}=(0;2;0)$, suy ra $[\vec{u}_1,\vec{u}_2].\overrightarrow{AB}=-10$, nên $d_1;d_2$ là chéo nhau.

Vậy mặt phẳng (P) cách đều hai đường thẳng d_1,d_2 là đường thẳng song song với d_1,d_2 và đi qua trung điểm $I(2;2;0)$ của đoạn thẳng AB.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) cần lập là: $x+5y+2z-12=0$.

Câu 15: (THTT – 477) Cho hai điểm $A(3;3;1)$, $B(0;2;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-7=0$. Đường thẳng d nằm trên (α) sao cho mọi điểm của d cách đều 2 điểm A, B có phương trình là

A. $\begin{cases}x=t\\y=7-3t\\z=2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=t\\y=7+3t\\z=2t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-t\\y=7-3t\\z=2t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=2t\\y=7-3t\\z=t\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Mọi điểm trên d cách đều hai điểm A,B nên d nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

Có $\overrightarrow{AB}=(-3;-1;0)$ và trung điểm AB là $I\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2};1\right)$ nên mặt phẳng trung trực của AB là:

$-3\left(x-\frac{3}{2}\right)-\left(y-\frac{5}{2}\right)=0\Leftrightarrow 3x+y-7=0$.

Mặt khác $d\subset(\alpha)$ nên d là giao tuyến của hai mặt phẳng: $\begin{cases}3x+y-7=0\\x+y+z-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=7-3x\\z=2x\end{cases}$.

Vậy phương trình $d:\begin{cases}x=t\\y=7-3t\,(t\in\mathbb{R}).\\z=2t\end{cases}$

Câu 16: (SỞ GD HÀ NỘI) Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(-2;0;3)$, $M(0;0;1)$ và $N(0;3;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua các điểm M, N sao cho khoảng cách từ điểm B đến (P) gấp hai lần khoảng cách từ điểm A đến (P). Có bao mặt phẳng (P) thỏa mãn đầu bài ?

A. Có vô số mặt phẳng (P).
B. Chỉ có một mặt phẳng (P).

C. Không có mặt phẳng (P) nào.
D. Có hai mặt phẳng (P).

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Giả sử (P) có phương trình là: $ax+by+cz+d=0\left(a^2+b^2+c^2\neq 0\right)$

Vì $M\in(P)\Rightarrow c+d=0\Leftrightarrow d=-c$.

Vì $N\in(P)\Rightarrow 3b+c+d=0$ hay $b=0$ vì $c+d=0$.

$\Rightarrow(P): ax+cz-c=0$.

Theo bài ra: $d(B,(P))=2d(A,(P))\Leftrightarrow\frac{|-2a+3c-c|}{\sqrt{a^2+c^2}}=2\frac{|a-c|}{\sqrt{a^2+c^2}}\Leftrightarrow|c-a|=|a-c|$

Vậy có vô số mặt phẳng (P).

Câu 17: (SỞ GD HÀ NỘI) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=8$. Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M, cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A,B phân biệt. Tính diện tích lớn nhất S của tam giác OAB.

A. $S=\sqrt{7}$.
B. $S=4$.
C. $S=2\sqrt{7}$.
D. $S=2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Cách 1: Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R=2\sqrt{2}$.

Có $OM=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ nên M nằm trong mặt cầu

Khi đó diện tích AOB lớn nhất khi OM $\perp$ AB. Khi đó $AB=2\sqrt{R^2-OM^2}=2\sqrt{7}$ và $S_{AOB}=\frac{1}{2}OM.AB=\sqrt{7}$

Cách 2: gọi H là hình chiếu của O xuống đường thẳng d, đặt $OH=x$ $\left(0<x\le 1\right)$ Khi đó $AB=2\sqrt{R^2-OH^2}=2\sqrt{8-x^2}$ và $S_{AOB}=\frac{1}{2}OH.AB=x\sqrt{8-x^2}$.

Khảo sát hàm số $f\left(x\right)=x\sqrt{8-x^2}$ trên $\left(0;1\right]$ thu được giá trị lớn nhất của hàm số là $\sqrt{7}$ Đạt được tại $x=1$

Câu 18: (BẮC YÊN THÀNH) Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua điểm $M(1;9;4)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C (khác gốc tọa độ) sao cho $OA=OB=OC$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Giả sử mặt phẳng (α) cắt các trục tọa độ tại các điểm khác gốc tọa độ là $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ với $a,b,c\neq 0$.

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;9;4)$ nên $\frac{1}{a}+\frac{9}{b}+\frac{4}{c}=1$ (1).

Vì $OA=OB=OC$ nên $|a|=|b|=|c|$, do đó xảy ra 4 trường hợp sau:

+) TH1: $a=b=c$.

Từ (1) suy ra $\frac{1}{a}+\frac{9}{a}+\frac{4}{a}=1\Leftrightarrow a=14$, nên phương trình mp (α) là $x+y+z-14=0$.

+) TH2: $a=b=-c$. Từ (1) suy ra $\frac{1}{a}+\frac{9}{a}-\frac{4}{a}=1\Leftrightarrow a=6$, nên pt mp (α) là $x+y-z-6=0$.

+) TH3: $a=-b=c$. Từ (1) suy ra $\frac{1}{a}-\frac{9}{a}+\frac{4}{a}=1\Leftrightarrow a=-4$, nên pt mp (α) là $x-y+z+4=0$.

+) TH4: $a=-b=-c$. Từ (1) có $\frac{1}{a}-\frac{9}{a}-\frac{4}{a}=1\Leftrightarrow a=-12$, nên pt mp (α) là $x-y-z+12=0$.

Vậy có 4 mặt phẳng thỏa mãn.

Câu 19: (BIÊN HÒA – HÀ NAM) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c dương. Biết A, B, C di động trên các tia Ox, Oy, Oz sao cho $a+b+c=2$. Biết rằng khi a, b, c thay đổi thì quỹ tích tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ thuộc mặt phẳng (P) cố định. Tính khoảng cách từ $M(2016;0;0)$ tới mặt phẳng (P).

A. 2017. **B.** $\frac{2014}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{2016}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{2015}{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn OA

$\Rightarrow (\alpha)$ đi qua điểm $D\left(\frac{a}{2};0;0\right)$ và có VTPT $\overrightarrow{OA}=(a;0;0)=a(1;0;0)$

$\Rightarrow (\alpha): x-\frac{a}{2}=0$.

Gọi (β) là mặt phẳng trung trực của đoạn OB

$\Rightarrow (\beta)$ đi qua điểm $E\left(0;\frac{a}{2};0\right)$ và có VTPT $\overrightarrow{OB}=(0;a;0)=a(0;1;0)$

$\Rightarrow (\beta): y-\frac{a}{2}=0$.

Gọi (γ) là mặt phẳng trung trực của đoạn OC

$\Rightarrow (\gamma)$ đi qua điểm $F\left(0;0;\frac{a}{2}\right)$ và có VTPT $\overrightarrow{OC}=(0;0;a)=a(0;0;1)$

$\Rightarrow (\gamma): z-\frac{a}{2}=0$.

Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ $\Rightarrow I=(\alpha)\cap(\beta)\cap(\gamma) \Rightarrow I\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$.

Mà theo giả thiết, $a+b+c=2 \Leftrightarrow \frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}=1 \Rightarrow I\in(P): x+y+z=1$.

Vậy, $d(M,(P))=\frac{|2016-1|}{\sqrt{3}}=\frac{2015}{\sqrt{3}}$.

Câu 20: (SỞ BÌNH PHƯỚC) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, trong đó $a>0$, $b>0$, $c>0$ và $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=7$. Biết mặt phẳng (ABC) tiếp xúc với mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{72}{7}$. Thể tích của khối tứ diện $OABC$ là

A. $\frac{2}{9}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Cách 1: Ta có $(ABC):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{\frac{72}{7}}$.

Mặt phẳng (ABC) tiếp xúc **với** $(S)\Leftrightarrow d\left(I;(ABC)\right)=R\Leftrightarrow\frac{\left|\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\sqrt{\frac{72}{7}}$.

Mà $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=7\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{7}{2}$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có

$$\left(1^2+2^2+3^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\ge\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right)^2=7^2\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{7}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\frac{1}{1}}{a}=\frac{\frac{2}{1}}{b}=\frac{\frac{3}{1}}{c}\\ \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=7\end{cases}\Leftrightarrow a=2,\ b=1,\ c=\frac{2}{3}$, khi đó $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc=\frac{2}{9}$.

Cách 2: Ta có $(ABC):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3),R=\sqrt{\frac{72}{7}}$.

Ta có (ABC) tiếp xúc với mặt cầu $(S)\Leftrightarrow d\left(I,(P)\right)=R\Leftrightarrow\frac{\left|\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\sqrt{\frac{72}{7}}$

$$\Leftrightarrow\frac{|7-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\sqrt{\frac{72}{7}}\Leftrightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{7}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=7-\frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}-\frac{7}{2}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-1\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{3}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\\ c=\frac{2}{3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{OABC}=\frac{1}{6}abc=\frac{2}{9}.$$

Cách 3: Giống **Cách 2** khi đến $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{7}{2}$.

Đến đây ta có thể tìm a, b, c bằng bất đẳng thức như sau:

Ta có $7^2=\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right)^2=\left(1.\frac{1}{a}+2.\frac{1}{b}+3.\frac{1}{c}\right)^2\le\left(1^2+2^2+3^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{7}{2}$

Mà $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{7}{2}\Rightarrow$ Dấu "=" của BĐT xảy ra $\frac{\frac{1}{a}}{1}=\frac{\frac{1}{b}}{2}=\frac{\frac{1}{c}}{3}$, kết hợp với giả thiết $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=7$ ta được $a=2$, $b=1$, $c=\frac{2}{3}$. Vậy: $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc=\frac{2}{9}$.

Ta có $\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\\c=\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow V_{OABC}=\frac{1}{6}abc=\frac{2}{9}$.

Cách 4: Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{\frac{72}{7}}$.

Phương trình mặt phẳng $(ABC):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=7\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{7}}{a}+\frac{\frac{2}{7}}{b}+\frac{\frac{3}{7}}{c}=1$ nên $M\left(\frac{1}{7};\frac{2}{7};\frac{3}{7}\right)\in(ABC)$

Thay tọa độ $M\left(\frac{1}{7};\frac{2}{7};\frac{3}{7}\right)$ vào phương trình mặt cầu (S) ta thấy đúng nên $M\in(S)$.

Suy ra: (ABC) tiếp xúc với (S) thì M là tiếp điểm.

Do đó: (ABC) qua $M\left(\frac{1}{7};\frac{2}{7};\frac{3}{7}\right)$, có VTPT là $\overrightarrow{MI}=\left(\frac{6}{7};\frac{12}{7};\frac{18}{7}\right)\to\vec{n}=(1;2;3)$

(ABC) có phương trình: $x+2y+3z-2=0\Leftrightarrow\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{\frac{2}{3}}=1\Rightarrow a=2$, $b=1$, $c=\frac{2}{3}$.

Vậy $V=\frac{1}{6}abc=\frac{2}{9}$

Câu 21: (LƯƠNG TÂM) Phương trình của mặt phẳng nào sau đây đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho thể tích tứ diện $OABC$ nhỏ nhất?

A. $6x+3y+2z+18=0$.
B. $6x+3y+3z-21=0$.
C. $6x+3y+3z+21=0$.
D. $6x+3y+2z-18=0$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ $(a,b,c>0)$

(ABC): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (1)

M(1;2;3) thuộc (ABC): $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$.

Thể tích tứ diện OABC: $V=\frac{1}{6}abc$

Áp dụng BDT Côsi ta có: $1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}}\Rightarrow 1\geq\frac{27.6}{abc}\Rightarrow\frac{1}{6}abc\geq 27\Rightarrow V\geq 27$

Ta có: V đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow V=27\Leftrightarrow\frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=6\\c=9\end{cases}$

Vậy (ABC): $6x+3y+2z-18=0$. **Chọn (D)**

Câu 22: (PHAN ĐÌNH PHÙNG – HN) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):3x+y-z+5=0$ và hai điểm $A(1;0;2)$, $B(2;-1;4)$. Tìm tập hợp các điểm $M(x;y;z)$ nằm trên mặt phẳng (P) sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất.

A. $\begin{cases}x-7y-4z+7=0\\3x-y+z-5=0\end{cases}$.

B. $\begin{cases}x-7y-4z+14=0\\3x+y-z+5=0\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x-7y-4z+7=0\\3x+y-z+5=0\end{cases}$.

D. $\begin{cases}3x-7y-4z+5=0\\3x+y-z+5=0\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta thấy hai điểm A,B nằm cùng 1 phía với mặt phẳng (P) và AB song song với (P). Điểm $M\in(P)$ sao cho tam giác ABM có diện tích nhỏ nhất

$\Leftrightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{AB.d(M;AB)}{2}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(M;AB)$ nhỏ nhất, hay $M\in\Delta=(P)\cap(Q),(Q)$ là mặt phẳng đi qua AB và vuông góc với (P).

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2)$, vtpt của (P) $\overrightarrow{n_{(P)}}=(3;1;-1)$

Suy ra vtpt của (Q): $\overrightarrow{n_{(Q)}}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_{(P)}}\right]=(-1;7;4)$

PTTQ $(Q):-1(x-1)+7y+4(z-2)=0$

$\Leftrightarrow x-7y-4z+7=0$

Quỹ tích M là $\begin{cases}x-7y-4z+7=0\\3x+y-z+5=0\end{cases}$.

Câu 23: (CHUYÊN ĐH VINH) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;-2;1)$, $A(1;2;-3)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{-1}$. Tìm véctơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M, vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng bé nhất.

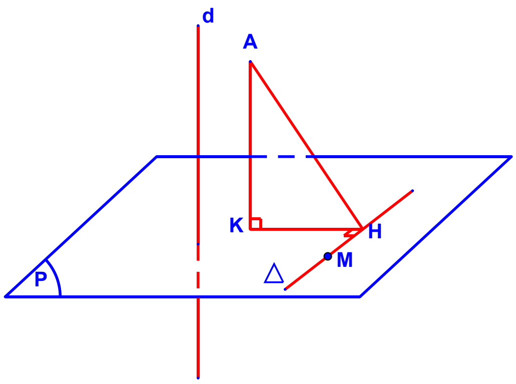
A. $\vec{u}=(2;1;6)$. **B.** $\vec{u}=(1;0;2)$. **C.** $\vec{u}=(3;4;-4)$. **D.** $\vec{u}=(2;2;-1)$.

Hướng dẫn giải

Đáp án: B.

Gọi (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với d.

Phương trình của $(P): 2x+2y-z+9=0$.



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên $\Delta, (P)$.

Ta có $K(-3;-2;-1)$

$d(A,\Delta) = AH \ge AK$

Vậy khoảng cách từ A đến Δ bé nhất khi Δ đi qua M, K. Δ có véctơ chỉ phương $\vec{u}=(1;0;2)$

Câu 24: (MINH HỌA L2) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét các điểm $A(0;0;1)$, $B(m;0;0)$, $C(0;n;0)$, $D(1;1;1)$ với $m>0; n>0$ và $m+n=1$. Biết rằng khi m, n thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) và đi qua d. Tính bán kính R của mặt cầu đó?

A. $R=1$. **B.** $R=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $R=\dfrac{3}{2}$. **D.** $R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi $I(1;1;0)$ là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (Oxy)

Ta có: Phương trình theo đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là: $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}+z=1$

Suy ra phương trình tổng quát của (ABC) là $nx+my+mnz-mn=0$

Mặt khác $d(I;(ABC))=\dfrac{|1-mn|}{\sqrt{m^2+n^2+m^2n^2}}=1$ (vì $m+n=1$) và $ID=1=d((I;(ABC)))$.

Nên tồn tại mặt cầu tâm I (là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng Oxy) tiếp xúc với (ABC) và đi qua D. Khi đó $R=1$.

Câu 25: Cho ba điểm $A(3;1;0), B(0;-1;0), C(0;0;-6)$. Nếu tam giác $A'B'C'$ thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{C'C}=\vec{0}$ thì có tọa độ trọng tâm là:

A. $(1;0;-2)$. **B.** $(2;-3;0)$. **C.** $(3;-2;0)$. **D.** $(3;-2;1)$.

Hướng dẫn giải

Đáp án A

* Cách diễn đạt thứ nhất:

Gọi G, G' theo thứ tự lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, A'B'C'. Với mọi điểm T trong không gian có:

$(1): \overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{C'C}=\vec{0} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{TA}-\overrightarrow{TA'}\right)+\left(\overrightarrow{TB}-\overrightarrow{TB'}\right)+\left(\overrightarrow{TC}-\overrightarrow{TC'}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\overrightarrow{TA'}+\overrightarrow{TB'}+\overrightarrow{TC'} \qquad (2)$

Hệ thức (2) chứng tỏ . Nếu $T \equiv G$ tức là $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\vec{0}$ thì ta cũng có $\overrightarrow{TA'}+\overrightarrow{TB'}+\overrightarrow{TC'}=\vec{0}$ hay $T \equiv G'$ hay (1) là hệ thức cần và đủ để hai tam giác ABC, A'B'C' có cùng trọng tâm.

Ta có tọa độ của G là: $G=\left(\dfrac{3+0+0}{3};\dfrac{1-1+0}{3};\dfrac{0+0-6}{3}\right)=(1;0;-2)$

Đó cũng là tọa độ trọng tâm G' của $\Delta A'B'C'$

* Cách diễn đạt thứ hai:

Ta có: $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$

(1)

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{A'G'}+\overrightarrow{G'G}+\overrightarrow{GA}\right)+\left(\overrightarrow{B'G'}+\overrightarrow{G'G}+\overrightarrow{GB}\right)+\left(\overrightarrow{C'G'}+\overrightarrow{G'G}+\overrightarrow{GC}\right)=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+\left(\overrightarrow{A'G'}+\overrightarrow{B'G'}+\overrightarrow{C'G'}\right)+3\overrightarrow{G'G}=\vec{0} \qquad (2)$$

Nếu G, G' theo thứ tự lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, A'B'C' nghĩa là

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{A'G'}+\overrightarrow{B'G'}+\overrightarrow{C'G'}$ thì $(2) \Leftrightarrow \overrightarrow{G'G}=\vec{0} \Leftrightarrow G' \equiv G$

Tóm lại (1) là hệ thức cần và đủ để hai tam giác ABC, A'B'C' có cùng trọng tâm.

Ta có tọa độ của G là: $G=\left(\dfrac{3+0+0}{3};\dfrac{1-1+0}{3};\dfrac{0+0-6}{3}\right)=(1;0;-2)$. Đó cũng là tọa độ trọng tâm G' của $\Delta A'B'C'$

Câu 26: (AN LÃO)Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(-2;-2;1)$, $B(1;2;-3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z}{-1}$. Tìm vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ qua *A*, vuông góc với d đồng thời cách điểm B một khoảng bé nhất.

A. $\vec{u}=(2;1;6)$ B. $\vec{u}=(2;2;-1)$ C. $\vec{u}=(25;-29;-6)$ D. $\vec{u}=(1;0;2)$

Hướng dẫn giải

Cách 1 (Tự luận)

Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với d, B' là hình chiếu của B lên (P)

Khi đó đường thẳng Δ chính là đường thẳng AB' và $\vec{u}=\overrightarrow{B'A}$

Ta có $(P):\begin{cases}\text{Qua } A(-2;-2;1)\\ \text{VTPT } \overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{u_d}=(2;2;-1)\end{cases} \Rightarrow (P):2x+2y-z+9=0$

Gọi d' là đường thẳng qua B và song song d' $\Rightarrow d'\begin{cases}x=1+2t\\ y=2+2t\\ z=-3-t\end{cases}$

B' là giao điểm của d' và (P) $\Rightarrow B'(-3;-2;-1) \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{B'A} = (1;0;2) \Rightarrow$ ***Chọn D***

Cách 2: Không cần viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với d.

Gọi d' là đường thẳng qua B và song song d' $\Rightarrow d'\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+2t \\ z = -3-t \end{cases}$

B'$\in$ d'$\Rightarrow \overrightarrow{B'A} = (-2t-3;-2t-4;t+4)$

AB'$\perp$ d $\Rightarrow \overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{B'A} = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{B'A} = (1;0;2) \Rightarrow$ ***Chọn D***

Câu 27: (AN LÃO)Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho đường thẳng AB vuông góc với d.

<u>A.</u> $(P): x+2y+5z-4=0.$

B. $(P): x+2y+5z-5=0.$

C. $(P): x+2y-z-4=0.$

D. $(P): 2x-y-3=0.$

Hướng dẫn giải

Cách 1 (Tự luận)

Đường thẳng d qua M(2;1;0) và có VTCP $\overrightarrow{u_d} = (1;2;-1)$

Ta có: AB$\perp$d và AB$\perp$Oz nên AB có VTCP là: $\overrightarrow{u_{AB}} = \left[\overrightarrow{u_d}, \vec{k}\right] = (2;-1;0)$

(P) chứa d và AB nên (P) đi qua M(2;1; 0), có VTPT là: $\vec{n} = \left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{u_{AB}}\right] = (1;2;5)$

$\Rightarrow (P): x+2y+5z-4=0 \Rightarrow$ ***Chọn A***

Cách 2: Dùng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.

Đường thẳng d qua 2 điểm M(2;1;0) và N(3;3;-1)

Giả sử mp(P) cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)

$\Rightarrow (P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

AB$\perp$d $\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_d} = 0 \Rightarrow a = 2b$ (1)

(P) chứa d nên d cũng đi qua M, N $\Rightarrow \frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1$ (2), $\frac{3}{a} + \frac{3}{b} + \frac{-1}{c} = 1$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow$ a = 4, b = 2, c = $\frac{4}{5}$ $\Rightarrow (P): x+2y+5z-4=0$ $\Rightarrow$ ***Chọn A***

Câu 28: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(3;0;0), N(m,n,0), P(0;0;p)$. Biết $MN=\sqrt{13}, MON=60^0$, thể tích tứ diện $OMNP$ bằng 3. Giá trị của biểu thức $A=m+2n^2+p^2$ bằng

A. 29. **B.** 27. **C.** 28. **D.** 30.

Hướng dẫn giải

$\overrightarrow{OM}=(3;0;0), \overrightarrow{ON}=(m;n;0) \Rightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=3m$

$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=\left|\overrightarrow{OM}\right|.\left|\overrightarrow{ON}\right|\cos 60^0 \Rightarrow \frac{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|.\left|\overrightarrow{ON}\right|}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{1}{2}$

$MN=\sqrt{(m-3)^2+n^2}=\sqrt{13}$

Suy ra $m=2; n=\pm 2\sqrt{3}$

$\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right].\overrightarrow{OP}=6\sqrt{3}p \Rightarrow V=\frac{1}{6}\left|6\sqrt{3}p\right|=3 \Rightarrow p=\pm\sqrt{3}$

Vậy $A=2+2.12+3=29$.

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$, $B(3;0;8)$, $D(-5;-4;0)$. Biết đỉnh A thuộc mặt phẳng (Oxy) và có tọa độ là những số nguyên, khi đó $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right|$ bằng:

A. $5\sqrt{10}$. **B.** $6\sqrt{10}$. **C.** $10\sqrt{6}$. **D.** $10\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Ta có trung điểm BD là $I(-1;-2;4)$, $BD=12$ và điểm A thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $A(a;b;0)$.

$ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow \begin{cases} AB^2=AD^2 \\ AI^2=\left(\frac{1}{2}BD\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)^2+b^2+8^2=(a+5)^2+(b+4)^2 \\ (a+1)^2+(b+2)^2+4^2=36 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=4-2a \\ (a+1)^2+(6-2a)^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=\frac{17}{5} \\ b=\frac{-14}{5} \end{cases}$ $\Rightarrow$ A(1; 2; 0) hoặc $A\left(\frac{17}{5};\frac{-14}{5};0\right)$ (loại).

Với $A(1;2;0) \Rightarrow C(-3;-6;8)$.

Câu 30: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1), B(1;4;-1)$, $C(2;4;3)$ $D(2;2;-1)$. Biết $M(x;y;z)$, để $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x+y+z$ bằng

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Gọi G là trọng tâm của $ABCD$ ta có: $G\left(\frac{7}{3};\frac{14}{3};0\right)$.

Ta có: $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=4MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+GD^2$

$\geq GA^2+GB^2+GC^2+GD^2$. Dấu bằng xảy ra khi $M\equiv G\left(\frac{7}{3};\frac{14}{3};0\right)\Rightarrow x+y+z=7$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ biết $A(-2;2;6),B(-3;1;8),C(-1;0;7),D(1;2;3)$. Gọi H là trung điểm của CD, $SH\perp(ABCD)$. Để khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $\frac{27}{2}$ (đvtt) thì có hai điểm S_1,S_2 thỏa mãn yêu cầu bài toán. Tìm tọa độ trung điểm I của S_1S_2

A. $I(0;-1;-3)$. **B.** $I(1;0;3)$ **C.** $I(0;1;3)$. **D.** $I(-1;0;-3)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-1;2),\overrightarrow{AC}=(1;-2;1)\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right\|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\overrightarrow{DC}=(-2;-2;4),\overrightarrow{AB}=(-1;-1;2)\Rightarrow\overrightarrow{DC}=2.\overrightarrow{AB}$ $\Rightarrow ABCD$ là hình thang và $S_{ABCD}=3S_{ABC}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$

Vì $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}\Rightarrow SH=3\sqrt{3}$

Lại có H là trung điểm của $CD\Rightarrow H(0;1;5)$

Gọi $S(a;b;c)\Rightarrow\overrightarrow{SH}=(-a;1-b;5-c)\Rightarrow\overrightarrow{SH}=k\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=k(3;3;3)=(3k;3k;3k)$

Suy ra $3\sqrt{3}=\sqrt{9k^2+9k^2+9k^2}\Rightarrow k=\pm1$

+) Với $k=1\Rightarrow\overrightarrow{SH}=(3;3;3)\Rightarrow S(-3;-2;2)$

+) Với $k=-1\Rightarrow\overrightarrow{SH}=(-3;-3;-3)\Rightarrow S(3;4;8)$

Suy ra $I(0;1;3)$

Câu 32: Cho điểm $I(1;7;5)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-6}{-1}=\frac{z}{3}$. Phương trình mặt cầu có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác diện tích tam giác IAB bằng $2\sqrt{6015}$ là:

A. $(x-1)^2+(y-7)^2+(z-5)^2=2018$. **B.** $(x-1)^2+(y-7)^2+(z-5)^2=2017$.

C. $(x-1)^2+(y-7)^2+(z-5)^2=2016$. **D.** $(x-1)^2+(y-7)^2+(z-5)^2=2019$.

Hướng dẫn giải

Gọi H là hình chiếu của $I(1;7;5)$ trên $d\Rightarrow H(0;0;-4)\Rightarrow IH=d(I;d)=2\sqrt{3}$

$S_{\Delta AIB}=\frac{IH.AB}{2}\Rightarrow AB=\frac{2S_{\Delta AIB}}{IH}=\sqrt{8020}\Rightarrow R^2=IH^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2=2017$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2+(y-7)^2+(z-5)^2=2017$.

Lựa chọn đáp án **B.**

Câu 33: Cho điểm $I(0;0;3)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1+t\\y=2t\\z=2+t\end{cases}$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm $A,\ B$ sao cho tam giác IAB vuông là:

A. $x^2+y^2+(z-3)^2=\frac{3}{2}$. **B.** $x^2+y^2+(z-3)^2=\frac{8}{3}$.

C. $x^2+y^2+(z-3)^2=\frac{2}{3}$. **D.** $x^2+y^2+(z-3)^2=\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

• Gọi $H(-1+t;2t;2+t)\in d$ là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng d $\Rightarrow \overrightarrow{IH}=(-1+t;2t;-1+t)$

• Ta có vectơ chỉ phương của d: $\overrightarrow{a_d}=(1;2;1)$ và $IH\perp d$

$\Rightarrow \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{a_d}=0\Leftrightarrow -1+t+4t-1+t=0\Leftrightarrow -2+6t=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}\Rightarrow H\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{7}{3}\right)$

$\Rightarrow IH=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

• Vì tam giác IAB vuông tại I và $IA=IB=R$. Suy ra tam giác IAB vuông cân tại I, do đó bán kính:

$R=IA=AB\cos 45^0=2IH.\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}IH=\sqrt{2}.\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

• Vậy phương trình mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-3)^2=\frac{8}{3}$.

Lựa chọn đáp án **B.**

Câu 34: Cho điểm $A(2;5;1)$ và mặt phẳng $(P):6x+3y-2z+24=0$, H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (P). Phương trình mặt cầu (S) có diện tích 784π và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại H, sao cho điểm A nằm trong mặt cầu là:

A. $(x-8)^2+(y-8)^2+(z+1)^2=196$. **B.** $(x+8)^2+(y+8)^2+(z-1)^2=196$.

C. $(x+16)^2+(y+4)^2+(z-7)^2=196$. **D.** $(x-16)^2+(y-4)^2+(z+7)^2=196$.

Hướng dẫn giải

• Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P). Suy ra $d:\begin{cases}x=2+6t\\y=5+3t\\z=1-2t\end{cases}$

• Vì H là hình chiếu vuông góc của A trên (P) nên $H=d\cap(P)$.

Vì $H\in d$ nên $H(2+6t;5+3t;1-2t)$.

• Mặt khác, $H\in(P)$ nên ta có: $6(2+6t)+3(5+3t)-2(1-2t)+24=0\Leftrightarrow t=-1$

Do đó, $H(-4;2;3)$.

• Gọi I,R lần lượt là tâm và bán kính mặt cầu.

Theo giả thiết diện tích mặt cầu bằng 784π, suy ra $4\pi R^2=784\pi \Rightarrow R=14$.

Vì mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại H nên $IH\perp(P)\Rightarrow I\in d$.

Do đó tọa độ điểm I có dạng $I(2+6t;5+3t;1-2t)$, với $t\neq -1$.

• Theo giả thiết, tọa độ điểm I thỏa mãn:

$$\begin{cases} d(I,(P))=14 \\ AI<14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|6(2+6t)+3(5+3t)-2(1-2t)+24|}{\sqrt{6^2+3^2+(-2)^2}}=14 \\ \sqrt{(6t)^2+(3t)^2+(-2t)^2}<14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3 \end{array}\right. \\ -2<t<2 \end{cases} \Leftrightarrow t=1$$

Do đó: $I(8;8;-1)$.

• Vậy phương trình mặt cầu $(S):(x-8)^2+(y-8)^2+(z+1)^2=196$.

Lựa chọn đáp án **A.**

Câu 35: Cho mặt phẳng $(P):x-2y-2z+10=0$ và hai đường thẳng $\Delta_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$, $\Delta_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+3}{4}$. Mặt cầu (S) có tâm thuộc Δ_1, tiếp xúc với Δ_2 và mặt phẳng (P), có phương trình:

A. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$ hoặc $\left(x-\dfrac{11}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(z+\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{81}{4}$.

B. $(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$ hoặc $\left(x+\dfrac{11}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{81}{4}$.

C. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$.

D. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=3$.

Hướng dẫn giải

• $\Delta_1:\begin{cases} x=2+t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$; Δ_2 đi qua điểm $A(2;0;-3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_2}=(1;1;4)$.

• Giả sử $I(2+t;t;1-t)\in\Delta_1$ là tâm và R là bán kính của mặt cầu (S).

• Ta có: $\overrightarrow{AI}=(t;t;4-t) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{a_2}\right]=(5t-4;4-5t;0) \Rightarrow d(I;\Delta_2)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{a_2}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{a_2}\right|}=\dfrac{|5t-4|}{3}$

$$d(I,(P))=\frac{|2+t-2t-2(1-t)+10|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{|t+10|}{3}.$$

• (S) tiếp xúc với Δ_2 và $(P)\Leftrightarrow d(I,\Delta_2)=d(I,(P))\Leftrightarrow |5t-4|=|t+10| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{7}{2} \\ t=-1 \end{array}\right.$.

• Với $t=\dfrac{7}{2}\Rightarrow I\left(\dfrac{11}{2};\dfrac{7}{2};-\dfrac{5}{2}\right)$, $R=\dfrac{9}{2}\Rightarrow (S):\left(x-\dfrac{11}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(z+\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{81}{4}$.

• Với $t=-1 \Rightarrow I(1;-1;2), R=3 \Rightarrow (S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$.

Lựa chọn đáp án **A.**

Câu 36: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$,cho $(P): x+4y-2z-6=0$, $(Q): x-2y+4z-6=0$. Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa giao tuyến của $(P),(Q)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A,B,C sao cho hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều.

A. $x+y+z+6=0$. **B.** $x+y+z-6=0$. **C.** $x+y-z-6=0$. **D.** $x+y+z-3=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn $M(6;0;0), N(2;2;2)$ thuộc giao tuyến của $(P),(Q)$

Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ lần lượt là giao điểm của (α) với các trục Ox, Oy, Oz

$\Rightarrow (\alpha): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \, (a,b,c \neq 0)$

(α) chứa $M,N \Rightarrow \begin{cases} \frac{6}{a}=1 \\ \frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}=1 \end{cases}$

Hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều $\Rightarrow OA=OB=OC \Rightarrow |a|=|b|=|c|$

Vậy phương trình $x+y+z-6=0$.

Câu 37: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$,cho tứ diện $ABCD$ có điểm $A(1;1;1), B(2;0;2), C(-1;-1;0), D(0;3;4)$. Trên các cạnh AB, AC, AD lần lượt lấy các điểm B',C',D' thỏa : $\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}=4$. Viết phương trình mặt phẳng $(B'C'D')$ biết tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích nhỏ nhất ?

A. $16x+40y-44z+39=0$. **B.** $16x+40y+44z-39=0$.

C. $16x-40y-44z+39=0$. **D.** $16x-40y-44z-39=0$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có : $4=\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'} \geq 3\sqrt[3]{\frac{AB.AC.AD}{AB'.AC'.AD'}}$

$\Rightarrow \frac{AB'.AC'.AD'}{AB.AC.AD} \geq \frac{27}{64} \Rightarrow \frac{V_{AB'C'D'}}{V_{ABCD}}=\frac{AB'.AC'.AD'}{AB.AC.AD} \geq \frac{27}{64} \Rightarrow V_{AB'C'D'} \geq \frac{27}{64}V_{ABCD}$

Để $V_{AB'C'D'}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=\frac{AD'}{AD}=\frac{3}{4} \Rightarrow \overrightarrow{AB'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \Rightarrow B'\left(\frac{7}{4};\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right)$

Lúc đó mặt phẳng $(B'C'D')$ song song với mặt phẳng (BCD) và đi qua $B'\left(\frac{7}{4};\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right)$

$\Rightarrow (B'C'D'): 16x + 40y - 44z + 39 = 0$.

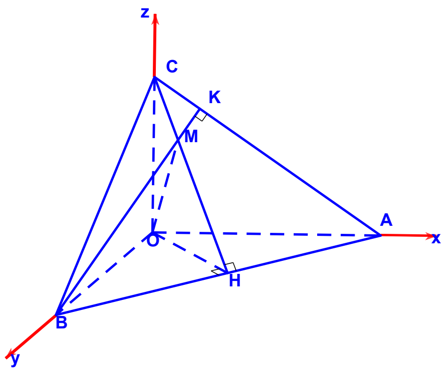
Câu 38: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C (khác gốc toạ độ O) sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Mặt phẳng (α) có phương trình là:

A. $x + 2y + 3z - 14 = 0$. **B.** $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} - 1 = 0$.

C. $3x + 2y + z - 10 = 0$. **D.** $x + 2y + 3z + 14 = 0$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB, K là hình chiếu vuông góc B trên AC. M là trực tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $M = BK \cap CH$



Ta có : $\left.\begin{array}{l} AB \perp CH \\ AB \perp CO \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp (COH) \Rightarrow AB \perp OM$ (1) (1)

Chứng minh tương tự, ta có: $AC \perp OM$ (2).

Từ (1) và (2), ta có: $OM \perp (ABC)$

Ta có: $\overrightarrow{OM}(1;2;3)$.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và có một $VTPT$ là $\overrightarrow{OM}(1;2;3)$ nên có phương trình là: $(x-1) + 2(y-2) + 3(z-3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 3z - 14 = 0$.

Cách 2:

+) Do A, B, C lần lượt thuộc các trục Ox, Oy, Oz nên $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ $(a, b, c \neq 0)$.

Phương trình đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

+) Do M là trực tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0 \\ M \in (ABC) \end{cases}$. Giải hệ điều kiện trên ta được a, b, c

Vậy phương trình mặt phẳng: $x + 2y + 3z - 14 = 0$.

Câu 39: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $N(1;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

A. $(P): x + y + z - 3 = 0$. **B.** $(P): x + y - z + 1 = 0$.

C. $(P): x - y - z + 1 = 0$. **D.** $(P): x + 2y + z - 4 = 0$.

Hướng dẫn giải

Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ lần lượt là giao điểm của (P) với các trục Ox, Oy, Oz

$\Rightarrow (P): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 (a,b,c\neq 0)$

Ta có: $\begin{cases} N\in(P) \\ NA=NB \\ NA=NC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \\ |a-1|=|b-1| \\ |a-1|=|c-1| \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=3 \Rightarrow x+y+z-3=0$

Câu 40: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$,cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương trình $d_1: \frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{3}$, $d_2: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{4}$. Phương trình mặt phẳng (α) cách đều hai đường thẳng d_1, d_2 là:

A. $7x-2y-4z=0$.

B. $7x-2y-4z+3=0$.

C. $2x+y+3z+3=0$.

D. $14x-4y-8z+3=0$.

Hướng dẫn giải

Ta có d_1 đi qua $A(2;2;3)$ và có $\overrightarrow{u_{d_1}}=(2;1;3)$, d_2 đi qua $B(1;2;1)$ và có $\overrightarrow{u_{d_2}}=(2;-1;4)$

$\overrightarrow{AB}=(-1;1;-2); \left[\overrightarrow{u_{d_1}};\overrightarrow{u_{d_2}}\right]=(7;-2;-4)$;

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{u_{d_1}};\overrightarrow{u_{d_2}}\right]\overrightarrow{AB}=-1\neq 0$ nên d_1, d_2 chéo nhau.

Do (α) cách đều d_1, d_2 nên (α) song song với $d_1, d_2 \Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{u_{d_1}};\overrightarrow{u_{d_2}}\right]=(7;-2;-4)$

$\Rightarrow (\alpha)$ có dạng $7x-2y-4z+d=0$

Theo giả thiết thì $d(A,(\alpha))=d(B,(\alpha)) \Leftrightarrow \frac{|d-2|}{\sqrt{69}}=\frac{|d-1|}{\sqrt{69}} \Leftrightarrow d=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow (\alpha): 14x-4y-8z+3=0$

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi d đi qua $A(3;-1;1)$, nằm trong mặt phẳng $(P): x-y+z-5=0$, đồng thời tạo với $\Delta: \frac{x}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{2}$ một góc 45^0. Phương trình đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x=3+7t \\ y=-1-8t \\ z=-1-15t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x=3+t \\ y=-1-t \\ z=1 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x=3+7t \\ y=-1-8t \\ z=1-15t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x=3+t \\ y=-1-t \\ z=1 \end{cases}$ **và** $\begin{cases} x=3+7t \\ y=-1-8t \\ z=1-15t \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_\Delta}=(1;2;2)$

d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d}=(a;b;c)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;-1;1)$

$d\subset(P)\Rightarrow \overrightarrow{a_d}\perp\overrightarrow{n_P}\Leftrightarrow b=a+c;\ (1)$

$(\Delta,d)=45^0 \Leftrightarrow \cos(\Delta,d)=\cos 45^0$

$$\Leftrightarrow \frac{|a+2b+2c|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(a+2b+2c)^2=9(a^2+b^2+c^2);\ (2)$$

Từ (1) và (2), ta có: $14c^2+30ac=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=0 \\ 15a+7c=0 \end{array}\right.$

Với $c=0$, chọn $a=b=1$, phương trình đường thẳng d là $\begin{cases} x=3+t \\ y=-1-t \\ z=1 \end{cases}$

Với $15a+7c=0$, chọn $a=7\Rightarrow c=-15;b=-8$, phương trình đường thẳng d là $\begin{cases} x=3+7t \\ y=-1-8t \\ z=1-15t \end{cases}$

Câu 42: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi d đi qua điểm $A(1;-1;2)$, song song với $(P): 2x-y-z+3=0$, đồng thời tạo với đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{2}$ một góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là.

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-2}{7}$.

B. $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z+2}{7}$.

C. $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{7}$.

D. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-2}{-7}$.

Hướng dẫn giải

Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_\Delta}=(1;-2;2)$

d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d}=(a;b;c)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(2;-1;-1)$

Vì $d//(P)$ nên $\overrightarrow{a_d}\perp\overrightarrow{n_P}\Leftrightarrow \overrightarrow{a_d}.\overrightarrow{n_P}=0\Leftrightarrow 2a-b-c=0\Leftrightarrow c=2a-b$

$$\cos(\Delta,d)=\frac{|5a-4b|}{3\sqrt{5a^2-4ab+2b^2}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{(5a-4b)^2}{5a^2-4ab+2b^2}}$$

Đặt $t=\frac{a}{b}$, ta có: $\cos(\Delta,d)=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{(5t-4)^2}{5t^2-4t+2}}$

Xét hàm số $f\left(t\right)=\frac{\left(5t-4\right)^2}{5t^2-4t+2}$, ta suy ra được: $\max f\left(t\right)=f\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

Do đó: $\max\left[\cos\left(\Delta,d\right)\right]=\sqrt{\frac{5\sqrt{3}}{27}}\Leftrightarrow t=-\frac{1}{5}\Rightarrow\frac{a}{b}=-\frac{1}{5}$

Chọn $a=1\Rightarrow b=-5,c=7$

Vậy phương trình đường thẳng d là $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-2}{7}$

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi d đi qua $A\left(-1;0;-1\right)$, cắt $\Delta_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{-1}$, sao cho góc giữa d và $\Delta_2:\frac{x-3}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{2}$ là nhỏ nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$. **B.** $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{-2}$. **C.** $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{-5}=\frac{z+1}{-2}$. **D.** $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M=d\cap\Delta_1\Rightarrow M\left(1+2t;2+t;-2-t\right)$

d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d}=\overrightarrow{AM}=\left(2t+2;t+2;-1-t\right)$

Δ_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_2}=\left(-1;2;2\right)$

$\cos\left(d;\Delta_2\right)=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{t^2}{6t^2+14t+9}}$

Xét hàm số $f\left(t\right)=\frac{t^2}{6t^2+14t+9}$, ta suy ra được $\min f\left(t\right)=f\left(0\right)=0\Leftrightarrow t=0$

Do đó $\min\left[\cos\left(\Delta,d\right)\right]=0\Leftrightarrow t=0\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\left(2;2-1\right)$

Vậy phương trình đường thẳng d là $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$

Câu 44: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-1}$ và $d_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-2}{-2}$. Gọi Δ là đường thẳng song song với $\left(P\right):x+y+z-7=0$ và cắt d_1, d_2 lần lượt tại hai điểm A,B sao cho AB ngắn nhất. Phương trình của đường thẳng Δ là.

A. $\begin{cases}x=12-t\\y=5\\z=-9+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=6-t\\y=\frac{5}{2}\\z=-\frac{9}{2}+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=6\\y=\frac{5}{2}-t\\z=-\frac{9}{2}+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=6-2t\\y=\frac{5}{2}+t\\z=-\frac{9}{2}+t\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

$A\in d_1\Rightarrow A\left(1+2a;a;-2-a\right)$

$B\in d_2\Rightarrow B\left(1+b;-2+3b;2-2b\right)$

Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=\left(b-2a;3b-a-2;-2b+a+4\right)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;1;1)$

Vì $\Delta // (P)$ nên $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{n_P}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_P}=0\Leftrightarrow b=a-1$.Khi đó $\overrightarrow{AB}=(-a-1;2a-5;6-a)$

$$\begin{aligned}AB&=\sqrt{(-a-1)^2+(2a-5)^2+(6-a)^2}\\&=\sqrt{6a^2-30a+62}\\&=\sqrt{6\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{49}{2}}\ge\frac{7\sqrt{2}}{2};\forall a\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=\frac{5}{2}\Rightarrow A\left(6;\frac{5}{2};-\frac{9}{2}\right)$, $\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{7}{2};0;\frac{7}{2}\right)$

Đường thẳng Δ đi qua điểm $A\left(6;\frac{5}{2};-\frac{9}{2}\right)$ và vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(-1;0;1)$

Vậy phương trình của Δ là $\begin{cases}x=6-t\\y=\frac{5}{2}\\z=-\frac{9}{2}+t\end{cases}$

Câu 45: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{1}$ và $d_2:\begin{cases}x=-1+2t\\y=1+t\\z=3\end{cases}$. Phương trình đường thẳng vuông góc với $(P):7x+y-4z=0$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 là:

A. $\frac{x-7}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+4}{1}$.

B. $\frac{x-2}{7}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-4}$.

C. $\frac{x+2}{-7}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{4}$.

D. $\frac{x-2}{7}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Gọi d là đường thẳng cần tìm

Gọi $A=d\cap d_1, B=d\cap d_2$

$$\begin{aligned}&A\in d_1\Rightarrow A(2a;1-a;-2+a)\\&B\in d_2\Rightarrow B(-1+2b;1+b;3)\\&\overrightarrow{AB}=(-2a+2b-1;a+b;-a+5)\end{aligned}$$

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(7;1;-4)$

$d\perp(P)\Leftrightarrow \overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_p}$ cùng phương

$\Leftrightarrow$ có một số k thỏa $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{n_p}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2a+2b-1=7k\\a+b=k\\-a+5=-4k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2a+2b-7k=1\\a+b-k=0\\-a+4k=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\\k=-1\end{cases}$$

d đi qua điểm $A(2;0;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d}=\overrightarrow{n_P}=(7;1-4)$

Vậy phương trình của d là $\dfrac{x-2}{7}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-4}$

Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ và $\Delta_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{3}$. Phương trình đường thẳng song song với $d:\begin{cases}x=3\\y=-1+t\\z=4+t\end{cases}$ và cắt hai đường thẳng $\Delta_1;\Delta_2$ là:

A. $\begin{cases}x=2\\y=3-t.\\z=3-t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=-2\\y=-3-t.\\z=-3-t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=-2\\y=-3+t.\\z=-3+t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=2\\y=-3+t.\\z=3+t\end{cases}$

Hướng dẫn giải

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm

Gọi $A=\Delta\cap\Delta_1, B=\Delta\cap\Delta_2$

$A\in\Delta_1\Rightarrow A(-1+3a;2+a;1+2a)$

$B\in\Delta_2\Rightarrow B(1+b;2b;-1+3b)$

$\overrightarrow{AB}=(-3a+b+2;-a+2b-2;-2a+3b-2)$

d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d}=(0;1;1)$

$\Delta//d\Leftrightarrow\overrightarrow{AB},\overrightarrow{a_d}$ cùng phương

$\Leftrightarrow$ có một số k thỏa $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{a_d}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-3a+b+2=0\\-a+2b-2=k\\-2a+3b-2=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3a+b=-2\\-a+2b-k=2\\-2a+3b-k=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\\k=-1\end{cases}$$

Ta có $A(2;3;3);B(2;2;2)$

Δ đi qua điểm $A(2;3;3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(0;-1;-1)$

Vậy phương trình của Δ là $\begin{cases}x=2\\y=3-t\\z=3-t\end{cases}$

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$, và mặt thẳng $(P): 3x+5y-z-2=0$. Gọi d' là hình chiếu của d lên (P). Phương trình tham số của d' là

A. $\begin{cases} x=-62t \\ y=25t \\ z=2-61t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=62t \\ y=-25t \\ z=2+61t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=62t \\ y=-25t \\ z=-2+61t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=62t \\ y=-25t \\ z=2+61t \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1:

Gọi $A=d\cap(P)$

$A\in d\Rightarrow A(12+4a;9+3a;1+a)$

$A\in(P)\Rightarrow a=-3\Rightarrow A(0;0;-2)$

d đi qua điểm $B(12;9;1)$

Gọi H là hình chiếu của B lên (P)

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(3;5;-1)$

BH đi qua $B(12;9;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_{BH}}=\overrightarrow{n_P}=(3;5;-1)$

$BH:\begin{cases} x=12+3t \\ y=9+5t \\ z=1-t \end{cases}$

$H\in BH\Rightarrow H(12+3t;9+5t;1-t)$

$H\in(P)\Rightarrow t=-\dfrac{78}{35}\Rightarrow H\left(\dfrac{186}{35};-\dfrac{15}{7};\dfrac{113}{35}\right)$

$\overrightarrow{AH}=\left(\dfrac{186}{35};-\dfrac{15}{7};\dfrac{183}{35}\right)$

d' đi qua $A(0;0;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_{d'}}=(62;-25;61)$

Vậy phương trình tham số của d' là $\begin{cases} x=62t \\ y=-25t \\ z=-2+61t \end{cases}$

Cách 2:

- Gọi (Q) qua d và vuông góc với (P)

  d đi qua điểm $B(12;9;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d}=(4;3;1)$

  (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(3;5;-1)$

  (Q) qua $B(12;9;1)$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}=\left[\overrightarrow{a_d},\overrightarrow{n_P}\right]=(-8;7;11)$

$(Q): 8x-7y-11z-22=0$

- d' là giao tuyến của (Q) và (P)

Tìm một điểm thuộc d', bằng cách cho $y=0$

Ta có hệ $\begin{cases} 3x-z=2 \\ 8x-11z=22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases} \Rightarrow M(0;0;-2) \in d'$

d' đi qua điểm $M(0;0;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d} = \left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q}\right] = (62;-25;61)$

Vậy phương trình tham số của d' là $\begin{cases} x=62t \\ y=-25t \\ z=-2+61t \end{cases}$

Câu 48: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+4t \\ z=3+t \end{cases}$. Hình chiếu song song của d lên mặt phẳng (Oxz) theo phương $\Delta: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z-2}{1}$ có phương trình là:

A. $\begin{cases} x=3+2t \\ y=0 \\ z=1-4t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=0 \\ z=1+2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-1-2t \\ y=0 \\ z=5-4t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3-2t \\ y=0 \\ z=1+t \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Giao điểm của d và mặt phẳng (Oxz) là : $M_0(5;0;5)$.

Trên $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+4t \\ z=3+t \end{cases}$ chọn M bất kỳ không trùng với $M_0(5;0;5)$; ví dụ: $M(1;-2;3)$. Gọi A là hình chiếu song song của M lên mặt phẳng (Oxz) theo phương $\Delta: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z-2}{1}$.

+/ Lập phương trình d' đi qua M và song song hoặc trùng với $\Delta: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z-2}{1}$.

+/ Điểm A chính là giao điểm của d' và (Oxz)

+/ Ta tìm được $A(3;0;1)$

Hình chiếu song song của $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2+4t \\ z=3+t \end{cases}$ lên mặt phẳng (Oxz) theo phương $\Delta: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z-2}{1}$ là đường thẳng đi qua $M_0(5;0;5)$ và $A(3;0;1)$.

Vậy phương trình là: $\begin{cases} x = 3+t \\ y = 0 \\ z = 1+2t \end{cases}$

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;0;2)$, $B(3;0;2)$ và mặt cầu $x^2+(y+2)^2+(z-1)^2=25$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn bán kính nhỏ nhất là:

A. $x-4y-5z+17=0$. **B.** $3x-2y+z-7=0$.

C. $x-4y+5z-13=0$. **D.** $3x+2y+z-11=0$.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$, bán kính $R=5$. Do $IA=\sqrt{17}<\text{R}$ nên AB luôn cắt (S). Do đó (α) luôn cắt (S) theo đường tròn (C) có bán kính $r=\sqrt{R^2-\left(d\left(I,(\alpha)\right)\right)^2}$. Để bán kính r nhỏ nhất $\Leftrightarrow d\left(I,(P)\right)$ lớn nhất.

Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mp(ABC).

Ta có $\overrightarrow{\text{AB}}=(1;-1;-1)$, $\overrightarrow{\text{AC}}=(-2;-3;-2)$ suy ra (ABC) có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-1;4;-5)$

(α) có véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\vec{n},\overrightarrow{AB}\right]=(-9-6;-3)=-3(3;2;1)$

Phương trình $(\alpha):3(x-2)+2(y-1)+1(z-3)=0 \Leftrightarrow 3x+2y+z-11=0$.

Câu 50: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha):2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S):(\text{x}-2)^2+(\text{y}-3)^2+(\text{z}-5)^2=100$. Đường thẳng Δ qua A, nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B. Để độ dài AB lớn nhất thì phương trình đường thẳng Δ là:

A. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$. **B.** $\dfrac{x+3}{16}=\dfrac{y-3}{11}=\dfrac{z+3}{-10}$.

C. $\begin{cases} x=-3+5t \\ y=3 \\ z=-3+8t \end{cases}$. **D.** $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+3}{3}$.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;5)$, bán kính $R=10$. Do $d(\text{I},(\alpha))<\text{R}$ nên Δ luôn cắt (S) tại A, B.

Khi đó $AB=\sqrt{R^2-\left(d(\mathrm{I},\Delta)\right)^2}$. Do đó, AB lớn nhất thì $d\left(I,(\Delta)\right)$ nhỏ nhất nên Δ qua H, với H là hình chiếu vuông góc của I lên (α). Phương trình $BH:\begin{cases}x=2+2t\\ y=3-2t\\ z=5+t\end{cases}$

$H\in(\alpha)\Rightarrow 2(2+2t)-2(3-2t)+5+t+15=0\Leftrightarrow t=-2\Rightarrow H(-2;\ 7;\ 3)$.

Do vậy $\overrightarrow{AH}=(1;4;6)$ là véc tơ chỉ phương của Δ. Phương trình của $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$

Câu 51: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $2x-2y-z+9=0$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$. Tọa độ điểm M nằm trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) đạt giá trị nhỏ nhất là:

A. $M\left(-\dfrac{11}{3};\dfrac{14}{3};\dfrac{13}{3}\right)$. **B.** $M\left(\dfrac{29}{3};-\dfrac{26}{3};-\dfrac{7}{3}\right)$.

C. $M\left(-\dfrac{29}{3};\dfrac{26}{3};-\dfrac{7}{3}\right)$. **D.** $M\left(\dfrac{11}{3};\dfrac{14}{3};-\dfrac{13}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-2;1)$.

Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) : $d(I;(P))=6<R$ nên (P) cắt (S).

Khoảng cách từ M thuộc (S) đến (P) lớn nhất $\Rightarrow$ $M\in(d)$ đi qua I và vuông góc với (P)

Phương trình $(d):\begin{cases}x=3+2t\\ y=-2-2t\\ z=1-t\end{cases}$.

Ta có : $M\in(d)\Rightarrow M(3+2t;-2-2t;1-t)$

Mà : $M\in(S)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{10}{3}\Rightarrow M_1\left(\dfrac{29}{3};-\dfrac{26}{3};-\dfrac{7}{3}\right)\\ t=-\dfrac{10}{3}\Rightarrow M_2\left(-\dfrac{11}{3};\dfrac{14}{3};\dfrac{13}{3}\right)\end{array}\right.$

Thử lại ta thấy : $d(M_1,(P))>d(M_2,(P))$ nên $M\left(-\dfrac{11}{3};\dfrac{14}{3};\dfrac{13}{3}\right)$ thỏa yêu cầu bài toán

Câu 52: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có điểm A trùng với gốc của hệ trục tọa độ, $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;b)$ $(a>0,b>0)$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Giá trị của tỉ số $\dfrac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau là:

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** -1. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow C\left(a;a;0\right)\Rightarrow C'\left(a;a;b\right)\Rightarrow M\left(a;a;\frac{b}{2}\right)$

Cách 1.

Ta có $\overrightarrow{MB}=\left(0;-a;-\frac{b}{2}\right)$; $\overrightarrow{BD}=\left(-a;a;0\right)$ và $\overrightarrow{A'B}=\left(a;0;-b\right)$

Ta có $\vec{u}=\left[\overrightarrow{MB};\overrightarrow{BD}\right]=\left(\frac{ab}{2};\frac{ab}{2};-a^2\right)$ và $\left[\overrightarrow{BD};\overrightarrow{A'B}\right]=\left(-a^2;-a^2;-a^2\right)$

Chọn $\vec{v}=\left(1;1;1\right)$ là VTPT của $\left(A'BD\right)$

$\left(A'BD\right)\perp\left(MBD\right)\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}-a^2=0\Leftrightarrow a=b\Rightarrow\frac{a}{b}=1$

Cách 2.

$AB=AD=BC=CD=a\Rightarrow\begin{cases}A'B=A'D\\MB=MD\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A'X\perp BD\\MX\perp BD\end{cases}$ với X là trung điểm BD

$\Rightarrow\left[\left(A'BD\right);\left(MBD\right)\right]=\left(A'X;MX\right)$

$X\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$ là trung điểm BD

$\overrightarrow{A'X}=\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};-b\right)$

$\overrightarrow{MX}=\left(-\frac{a}{2};-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$

$\left(A'BD\right)\perp\left(MBD\right)\Rightarrow A'X\perp MX$

$\Rightarrow\overrightarrow{A'X}.\overrightarrow{MX}=0$

$\Rightarrow-\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{b^2}{2}=0$

$\Rightarrow\frac{a}{b}=1$

Câu 53: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+2y+2z+4=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$.Giá trị của điểm M trên $\left(S\right)$ sao cho $d\left(M,\left(P\right)\right)$ đạt GTNN là:

A. $\left(1;1;3\right)$.

B. $\left(\frac{5}{3};\frac{7}{3};\frac{7}{3}\right)$.

C. $\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$. D. $(1;-2;1)$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $d(M,(P))=3>R=2\Rightarrow (P)\cap(S)=\varnothing$.

Đường thẳng *d* đi qua *I* và vuông góc với *(P)* có pt: $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t, t\in\mathbb{R} \\ z=1+2t \end{cases}$.

Tọa độ giao điểm của *d* và *(S)* là: $A\left(\frac{5}{3};\frac{7}{3};\frac{7}{3}\right)$, $B\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$

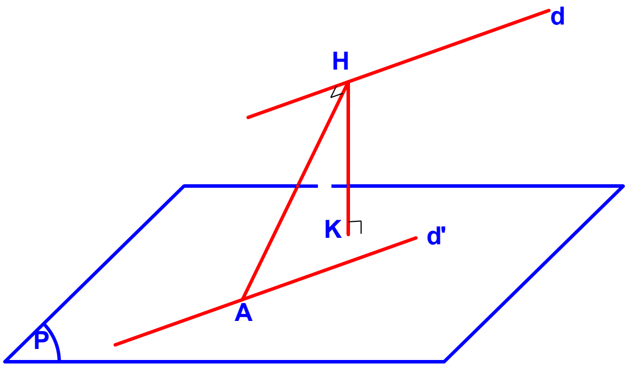
Ta có: $d(A,(P))=5\geq d(B,(P))=1.\ \Rightarrow d(A,(P))\geq d(M,(P))\geq d(B,(P))$.

Vậy: $\Rightarrow d(M,(P))_{\min}=1\Leftrightarrow M\equiv B$.

Câu 54: Trong không gian với hệ trục toạ độ *Oxyz,* cho điểm $A(10;2;1)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A, song song với đường thẳng d sao cho khoảng cách giữa d và (P) lớn nhất. Khoảng cách từ điểm $M(-1;2;3)$ đến mp(P) là

A. $\frac{97\sqrt{3}}{15}$. B. $\frac{76\sqrt{790}}{790}$. C. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$. D. $\frac{3\sqrt{29}}{29}$.

Hướng dẫn giải



(P) là mặt phẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng d nên (P) chứa đường thẳng d' đi qua điểm A và song song với đường thẳng d.
Gọi H là hình chiếu của A trên d, K là hình chiếu của H trên (P).

Ta có $d(d,(P))=HK\leq AH$ (AH không đổi)

$\Rightarrow$ GTLN của $d(d,(P))$ là AH

$\Rightarrow$ $d(d,(P))$ lớn nhất khi AH vuông góc với (P).

Khi đó, nếu gọi (Q) là mặt phẳng chứa A và d thì (P) vuông góc với (Q).

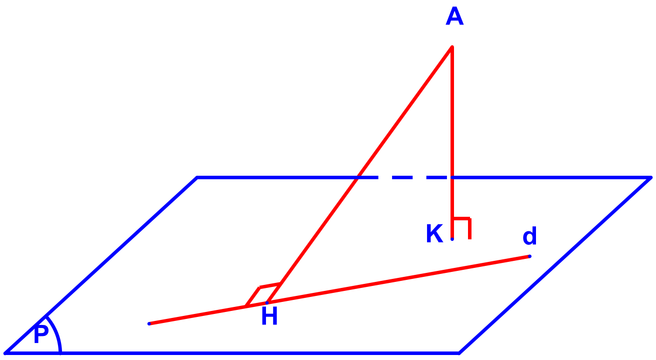
$\Rightarrow \vec{n}_P=\left[\vec{u}_d,\vec{n}_Q\right]=(98;14;-70)$

$\Rightarrow (P):7x+y-5z-77=0\Rightarrow d(M,(P))=\frac{97\sqrt{3}}{15}$.

Câu 55: Trong không gian với hệ trục toạ độ *Oxyz*, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Tính khoảng cách từ điểm $M(1;2;-1)$ đến mặt phẳng (P).

A. $\frac{11\sqrt{18}}{18}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{11}}{18}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải



Gọi H là hình chiếu của A trên d; K là hình chiếu của A trên (P).

Ta có $d\left(A,(P)\right)=AK\le AH$ (Không đổi)

$\Rightarrow$ GTLN của $d(d,(P))$ là AH

$\Longrightarrow d\left(A,(P)\right)$ lớn nhất khi $K\equiv H$.

Ta có $H(3;1;4)$, (P) qua H và $\perp AH$

$\Rightarrow (P): x-4y+z-3=0$

Vậy $d\left(M,(P)\right)=\frac{11\sqrt{18}}{18}$.

Câu 56: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z+2=0$ và hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\ y=t\\ z=2+2t\end{cases}$; $d':\begin{cases}x=3-t'\\ y=1+t'\\ z=1-2t'\end{cases}$.

Biết rằng có 2 đường thẳng có các đặc điểm: song song với (P); cắt d,d' và tạo với d góc 30^{O}. Tính cosin góc tạo bởi hai đường thẳng đó.

A. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm, $\overrightarrow{n_P}$ là VTPT của mặt phẳng (P).

Gọi $M(1+t;t;2+2t)$ là giao điểm của Δ và d; $M'(3-t';1+t';1-2t')$ là giao điểm của Δ và d'

Ta có: $\overrightarrow{MM'}(2-t'-t;1+t'-t;-1-2t'-2t)$

$$MM' \,//\, (P)\Leftrightarrow\begin{cases}M\notin(P)\\ \overrightarrow{MM'}\perp\overrightarrow{n_P}\end{cases}\Leftrightarrow t'=-2\Rightarrow\overrightarrow{MM'}(4-t;-1-t;3-2t)$$

Ta có $\cos 30^{\mathrm{O}}=\cos\left(\overrightarrow{MM'},\vec{u}_d\right)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{|-6t+9|}{\sqrt{36t^2-108t+156}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\\ t=-1\end{array}\right.$

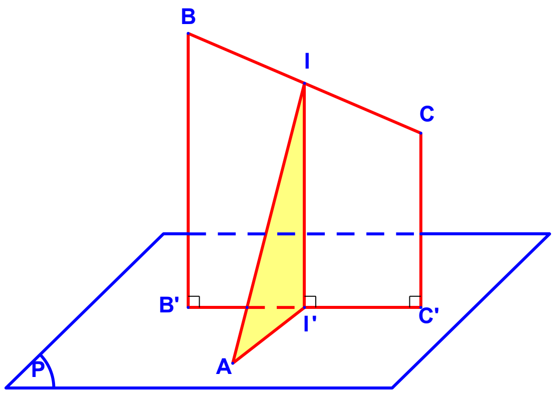
Vậy, có 2 đường thẳng thoả mãn là $\Delta_1:\begin{cases}x=5\\ y=4+t\\ z=10+t\end{cases}$; $\Delta_2:\begin{cases}x=t'\\ y=-1\\ z=t'\end{cases}$.

Khi đó, $\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\frac{1}{2}$.

Câu 57: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;1);B(3;-2;0);C(1;2;-2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A sao cho tổng khoảng cách từ B và C đến (P) lớn nhất biết rằng (P) không cắt đoạn BC. Khi đó, điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P)?

A. $G(-2;0;3)$. **B.** $F(3;0;-2)$. **C.** $E(1;3;1)$. **D.** $H(0;3;1)$.

Hướng dẫn giải



Gọi I là trung điểm đoạn BC; các điểm B',C',I' lần lượt là hình chiếu của B,C,I trên (P).

Ta có tứ giác $BCC'B'$ là hình thang và II' là đường trung bình.

$\Rightarrow d(B,(P))+d(C,(P))=BB'+CC'=2II'$.

Mà $II'\leq IA$ (với IA không đổi)

Do vậy, $d(B,(P))+d(C,(P))$ lớn nhất khi $I'\equiv A$

$\Rightarrow (P)$ đi qua A và vuông góc $\overrightarrow{IA}$ với $I(2;0;-1)$.

$\Rightarrow (P):-x+2z-1=0\Rightarrow E(1;3;1)\in(P)$.

Câu 58: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ trong đó b,c dương và mặt phẳng $(P):y-z+1=0$. Biết rằng $mp(ABC)$ vuông góc với $mp(P)$ và $d(O,(ABC))=\frac{1}{3}$, mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $b+c=1$. **B.** $2b+c=1$. **C.** $b-3c=1$. **D.** $3b+c=3$.

Hướng dẫn giải

Ta có phương trình mp(ABC) là $\frac{x}{1}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

$(ABC)\perp(P)\Rightarrow\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0\Rightarrow b=c\,(1)$

Ta có $d(O,(ABC))=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=8\,(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow b=c=\frac{1}{2}\Rightarrow b+c=1$.

Câu 59: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;2;3);B(0;1;1);C(1;0;-2)$. Điểm $M\in(P):x+y+z+2=0$ sao cho giá trị của biểu thức $T=MA^2+2MB^2+3MC^2$ nhỏ nhất. Khi đó, điểm M cách $(Q):2x-y-2z+3=0$ một khoảng bằng

A. $\frac{121}{54}$. **B.** 24. **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\frac{101}{54}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x;y;z)$. Ta có $T=6x^2+6y^2+6z^2-8x-8y+6z+31$

$$\Rightarrow T = 6\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{2}{3}\right)^2\left(z+\frac{1}{2}\right)^2\right] + \frac{145}{6}$$

$\Rightarrow T = 6MI^2 + \dfrac{145}{6}$ với $I\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow T$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất $\Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P)

$\Rightarrow M\left(-\dfrac{5}{18};-\dfrac{5}{18};-\dfrac{13}{9}\right)$.

Câu 60: ***(Đề minh họa L1)*** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-2;0)$, $B(0;-1;1)$, $C(2;1;-1)$ và $D(3;1;4)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng cách đều bốn điểm đó?

A. 1. **B.** 4. **C.** 7. D. Có vô số mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

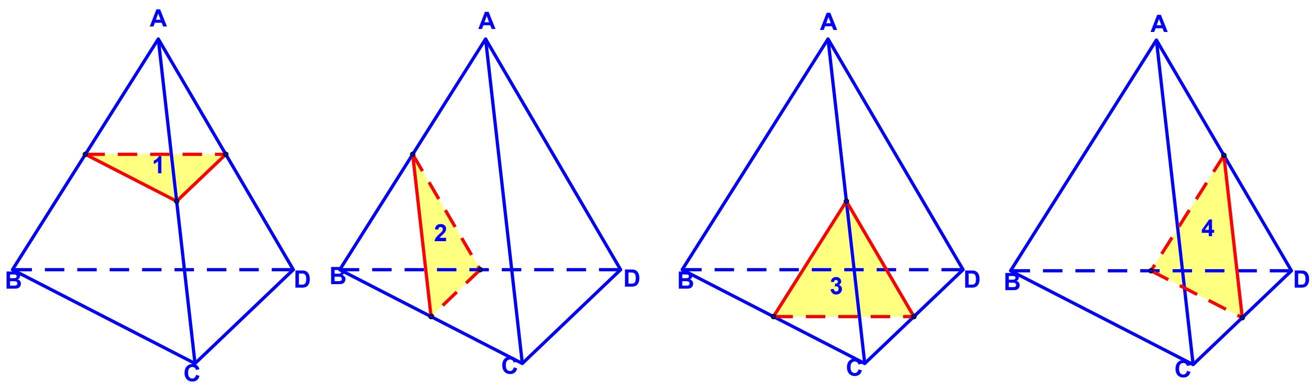
Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1;1;1)$; $\overrightarrow{AC} = (1;3;-1)$; $\overrightarrow{AD} = (2;3;4)$.

Suy ra: $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right] = (-4;0;-4) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = -24 \neq 0$

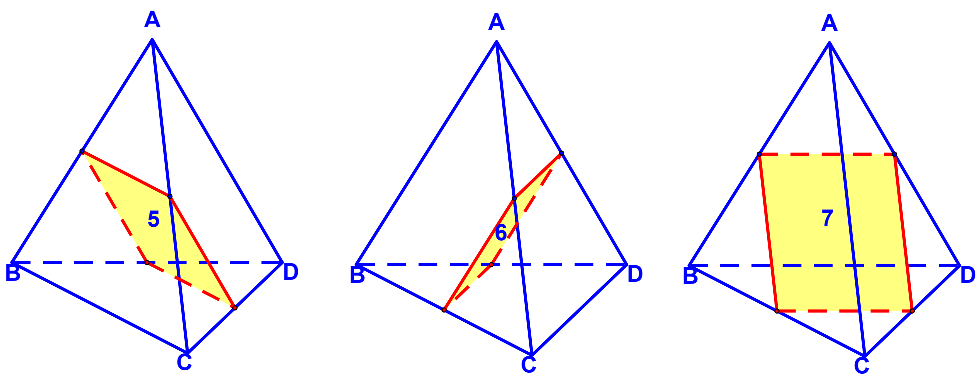
$\Rightarrow$ 4 điểm A, B, C, D không đồng phẳng.

Khi đó, mặt phẳng cách đều cả 4 điểm A, B, C, D sẽ có hai loại:

Loại 1: Có 1 điểm nằm khác phía với 3 điểm còn lại (đi qua các trung điểm của 3 cạnh chung đỉnh) $\Rightarrow$ có 4 mặt phẳng như thế).



Loại 2: Có 2 điểm nằm khác phía với 2 điểm còn lại (đi qua các trung điểm của 4 cạnh thuộc hai cặp cạnh chéo nhau) $\Rightarrow$ có 3 mặt phẳng như thế).



Vậy có tất cả 7 mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án C.***

Câu 61: (***Đề minh họa L1***)Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt d.

B. $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$.

D. $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z-2}{1}$.

Hướng dẫn giải

Do Δ cắt d nên tồn tại giao điểm giữa chúng. Gọi $B=\Delta\cap d\Leftrightarrow\begin{cases}B\in\Delta\\B\in d\end{cases}$.

Phương trình tham số của d: $\begin{cases}x=t+1\\y=t\quad,t\in\mathbb{R}\\z=t-1\end{cases}$. Do $B\in d$, suy ra $B(t+1;t;t-1)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(t;t;2t-3)$

Do $A,B\in\Delta$ nên $\overrightarrow{AB}$ là vectơ chỉ phương của Δ.

Theo đề bài, Δ vuông góc d nên $\overrightarrow{AB}\perp\vec{u}$ ($\vec{u}=(1;1;2)$ là vector chỉ phương của d). Suy ra $\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0$. Giải được $t=1\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(1;1;-1)$. Vậy $\Delta:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 62: (***Đề thử nghiệm 2017)*** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;\ 6;\ 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M. Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

A. $\frac{AM}{BM}=\frac{1}{2}$. B. $\frac{AM}{BM}=2$. C. $\frac{AM}{BM}=\frac{1}{3}$. D. $\frac{AM}{BM}=3$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $M\in(Oxz)\ \Rightarrow M(x;0;z)$; $\overrightarrow{AB}=(7;3;1)\Rightarrow AB=\sqrt{59}$; $\overrightarrow{AM}=(x+2;-3;z-1)$ và

Ta có: A,B,M thẳng hàng $\Rightarrow\overrightarrow{AM}=k.\overrightarrow{AB}\quad(k\in\mathbb{R})\Leftrightarrow\begin{cases}x+2=7k\\-3=3k\\z-1=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-9\\-1=k\\z=0\end{cases}\Rightarrow M(-9;0;0)$.

và $\overrightarrow{BM}=(-14;-6;-2)\ \Rightarrow BM=\sqrt{118}=2AB.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 63: (***Đề thử nghiệm 2017)*** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1:\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ và $d_2:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{-1}$.

A. $(P):2x-2z+1=0$. B. $(P):2y-2z+1=0$.

C. $(P): 2x-2y+1=0$. D. $(P): 2y-2z-1=0$.

Hướng dẫn giải

Ta có: d_1 đi qua điểm $A(2;0;0)$ và có VTCP $\vec{u}_1=(-1;1;1)$.

và d_2 đi qua điểm $B(0;1;2)$ và có VTCP $\vec{u}_2=(2;-1;-1)$. Vì (P) song songvới hai đường thẳng d_1 và d_2 nên VTPT của (P) là $\vec{n}=[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(0;1;-1)$

Khi đó (P) có dạng $y-z+D=0 \Rightarrow$ loại đáp án A và C.

Lại có (P) cách đều d_1 và d_2 nên (P) đi qua trung điểm $M\left(0;\frac{1}{2};1\right)$ của AB. Do đó $(P): 2y-2z+1=0$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án B.***

Câu 64: (***Tạp chí THTT Lần 5***) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;-1)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ $O(0;0;0)$ và cách M một khoảng lớn nhất.

A. $x+2y-z=0$. B. $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{-1}=1$. C. $x-y-z=0$. D. $x+y+z-2=0$.

Hướng dẫn giải

Gọi H là hình chiếu của M trên (P) $\Rightarrow \Delta MHO$ vuông tại H $\Rightarrow MH \le MO$

$\Rightarrow MH_{\max}=MO$. Khi đó (P) đi qua M và vuông góc với MO $\Rightarrow \overrightarrow{MO}(1;2;-1)$ là vecto pháp tuyến của $(P) \Rightarrow$ phương trình của mặt phẳng (P) là $1(x-0)+2(y-0)-1(z-0)=0$

hay $x+2y-z=0$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 65: (***THPT Hai Bà Trưng Lần 1***) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;-2), B(3;-1;-4), C(-2;2;0)$. Tìm điểm D trong mặt phẳng (Oyz) có cao độ âm sao cho thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng 2 và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (Oxy) bằng 1. Khi đó có tọa độ điểm D thỏa mãn bài toán là:

A. $D(0;3;-1)$. B. $D(0;-3;-1)$. C. $D(0;1;-1)$. D. $D(0;2;-1)$.

Hướng dẫn giải

Vì $D\in(Oyz) \Rightarrow D(0;b;c)$, do cao độ âm nên $c<0$.

Khoảng cách từ $D(0;b;c)$ đến mặt phẳng $(Oxy): z=0$ bằng 1 $\Leftrightarrow \frac{|c|}{1}=1 \Rightarrow c=-1$ (do $c<0$).

Suy ra tọa độ $D(0;b;-1)$. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(-4;2;2)$; $\overrightarrow{AD}=(-2;b;1)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(2;6;-2) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=-4+6b-2=6b-6=6(b-1)$

$\Rightarrow V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|=|b-1|$

Mà $V_{ABCD}=2\Leftrightarrow |b-1|=2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=3 \\ b=-1 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D(0;3;-1) \\ D(0;-1;-1) \end{array}\right.$. Chọn đáp án $D(0;3;-1)$.

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

Câu 66: (***THPT Hai Bà Trưng Lần 1***) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;3)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm H, cắt Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC. Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. $(P): 3x+y+2z-11=0.$ **B.** $(P): 3x+2y+z-10=0.$

C. $(P): x+3y+2z-13=0.$ **D.** $(P): x+2y+3z-14=0.$

Hướng dẫn giải

Do tứ diện $OABC$ có ba cạnh $OA,\ OB,\ OC$ đôi một vuông góc nên nếu H là trực tâm của tam giác ABC dễ dàng chứng minh được $OH\perp(ABC)$ hay $OH\perp(P)$.

Vậy mặt phẳng (P) đi qua điểm $H(1;2;3)$ và có VTPT $\overrightarrow{OH}(1;2;3)$ nên phương trình (P) là $(x-1)+2(y-2)+3(z-3)=0\Leftrightarrow x+2y+3z-14=0.$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án D.***

Câu 67: (***THPT Chuyên ĐHKH Huế Lần 1***) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;4)$, điểm M nằm trên mặt phẳng (Oxy) và $M\neq O$. Gọi D là hình chiếu vuông góc của O lên AM và E là trung điểm của OM. Biết đường thẳng DE luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định. Tính bán kính mặt cầu đó.

A. $R=2$. **B.** $R=1$. **C.** $R=4$. **D.** $R=\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có tam giác OAM luôn vuông tại O. Gọi I là trung điểm của OA (Điểm I cố định).

Ta có tam giác ADO vuông tại D có ID là đường trung tuyến nên $ID=\dfrac{1}{2}OA=2\ \ (1)$

Ta có IE là đường trung bình của tam giác OAM nên IE song song với AM mà $OD\perp AM\Rightarrow OD\perp IE$ Mặt khác tam giác EOD cân tại E. Từ đó suy ra IE là đường trung trực của OD

Nên $DOE=ODE; IOD=IDO\Rightarrow IDE=IOE=90^\circ\Rightarrow ID\perp DE\ \ (2)$

Vậy DE luôn tiếp xúc với mặt cầu tâm I bán kính $R=\dfrac{OA}{2}=2$

$\Rightarrow$ ***Chọn đáp án A.***

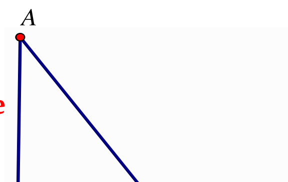
Câu 68: (CHUYÊN ĐHKHTN HUẾ) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;4)$, điểm M nằm trên mặt phẳng (Oxy) và $M\neq O$. Gọi D là hình chiếu vuông góc của O lên AM và E là trung điểm của OM. Biết đường thẳng DE luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định. Tính bán kính mặt cầu đó.

A. $R=2$. **B.** $R=1$. **C.** $R=4$. **D.** $R=\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có tam giác OAM luôn vuông tại O.



Gọi I là trung điểm của OA (Điểm I cố định)
Ta có tam giác ADO vuông tại D có ID là
đường trung tuyến nên $ID = \frac{1}{2}OA = 2$ (1)
Ta có IE là đường trung bình của tam giác OAM
nên IE song song với AM mà $OD \perp AM \Rightarrow OD \perp IE$
Mặt khác tam giác EOD cân tại E. Từ đó suy ra
IE là đường trung trực của OD
Nên $DOE = ODE; IOD = IDO \Rightarrow IDE = IOE = 90° \Rightarrow ID \perp DE$ (2)
Vậy DE luôn tiếp xúc với mặt cầu tâm I bán kính $R = \frac{OA}{2} = 2$

Câu 69: (CHUYÊN ĐHKHTN HUẾ) Cho điểm $A(0;8;2)$ và mặt cầu (S) có phương trình $(S):(x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=72$ và điểm $B(9;-7;23)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A tiếp xúc với (S) sao cho khoảng cách từ B đến (P) là lớn nhất. Giả sử $\vec{n}=(1;m;n)$ là một vectơ pháp tuyến của (P). Lúc đó

A. $m.n=2.$ **B.** $m.n=-2.$ **C.** $m.n=4.$ **D.** $m.n=-4.$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Mặt phẳng (P) qua A có dạng

$a(x-0)+b(y-8)+c(z-2)=0 \Leftrightarrow ax+by+cz-8b-2c=0$.

Điều kiện tiếp xúc:

$$d(I;(P)) = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|5a-3b+7c-8b-2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|5a-11b+5c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 6\sqrt{2}.\ (*)$$

Mà $$d(B;(P)) = \frac{|9a-7b+23c-8b-2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|9a-15b+21c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{|5a-11b+5c+4(a-b+4c)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \le$$

$$\le \frac{|5a-11b+5c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} + 4\frac{|a-b+4c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \le 6\sqrt{2} + 4\frac{\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 18\sqrt{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a}{1} = \frac{b}{-1} = \frac{c}{4}$. Chọn $a=1; b=-1; c=4$ thỏa mãn (*).

Khi đó $(P): x-y+4z=0$. Suy ra $m=-1; n=4$. Suy ra: $m.n=-4$.

Câu 70: (CHUYÊN ĐHKHTN HUẾ) Trong không gian cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3}$ và đường thẳng $d: \frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua Δ và tạo với đường thẳng d một góc lớn nhất.

A. $19x-17y-20z-77=0.$ **B.** $19x-17y-20z+34=0.$

C. $31x-8y-5z+91=0.$ **D.** $31x-8y-5z-98=0.$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đường thẳng d có VTCP là $\overrightarrow{u_1}=(3;1;2)$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3;0;-1)$ và có VTCP là $\vec{u}=(1;2;3)$.

Do $\Delta\subset(P)$ nên $M\in(P)$. Giả sử VTPT của (P) là $\vec{n}=(A;B;C),\left(A^2+B^2+C^2\neq 0\right)$.

Phương trình (P) có dạng $A(x-3)+By+C(z+1)=0$.

Do $\Delta\subset(P)$ nên $\vec{u}.\vec{n}=0\Leftrightarrow A+2B+3C=0\Leftrightarrow A=-2B-3C$.

Gọi α là góc giữa d và (P). Ta có

$$sin\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\frac{|3A+B+2C|}{\sqrt{14}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|3(-2B-3C)+B+2C|}{\sqrt{14}.\sqrt{(-2B-3C)^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{|5B+7C|}{\sqrt{14}.\sqrt{5B^2 12BC+10C^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}}\sqrt{\frac{(5B+7C)^2}{5B^2+12BC+10C^2}}.$$

TH1: Với $C=0$ thì $sin\alpha=\sqrt{\frac{5}{14}}=\frac{\sqrt{70}}{14}$.

TH2: Với $C\neq 0$ đặt $t=\frac{B}{C}$ ta có $sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{14}}\sqrt{\frac{(5t+7)^2}{5t^2+12t+10}}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{(5t+7)^2}{5t^2+12t+10}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=\frac{-50t^2+10t+112}{\left(5t^2+12t+10\right)^2}$.

$$f'(t)=0\Leftrightarrow -50t^2+10t+112=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\frac{8}{5}\Rightarrow f\left(\frac{8}{5}\right)=\frac{75}{14}\\ t=-\frac{7}{5}\Rightarrow f\left(-\frac{7}{5}\right)=0\end{array}\right..$$

Và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(t)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{(5t+7)^2}{5t^2+12t+10}=5$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		$-\dfrac{7}{5}$		$\dfrac{8}{5}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{75}{14}$	$\searrow$	5

Từ đó ta có $Maxf(t)=\dfrac{75}{14}$ khi $t=\dfrac{8}{5}\Rightarrow\dfrac{B}{C}=\dfrac{8}{5}$. Khi đó $sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{14}}.\sqrt{f\left(\dfrac{8}{5}\right)}=\dfrac{\sqrt{75}}{14}$.

So sánh TH1 và Th2 ta có $sin\alpha$ lớn nhất là $sin\alpha=\dfrac{\sqrt{75}}{14}$ khi $\dfrac{B}{C}=\dfrac{8}{5}$.

Chọn $B=-8\Rightarrow C=-5\Rightarrow A=31$.

Phương trình (P) là $31(x-3)-8y-5(z+1)=0\Leftrightarrow 31x-8y-5z-98=0$.

Câu 71: (CHUYÊN ĐHKHTN HUẾ) Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ và mặt phẳng $(P):2x-2y+z+3=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) là lớn nhất. Khi đó

A. $a+b+c=5$. **B.** $a+b+c=6$. **C.** $a+b+c=7$. **D.** $a+b+c=8$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=3$.

Gọi d là đường thẳng đi qua $I(1;2;3)$ và vuông góc (P)

Suy ra phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases}x=1+2t\\y=2-2t\\z=3+t\end{cases}$.

Gọi A,B lần lượt là giao của d và (S), khi đó tọa độ A,B ứng với t là nghiệm của phương trình $(1+2t-1)^2+(2-2t-2)^2+(3+t-3)^2=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-1\end{array}\right.$

Với $t=1\Rightarrow A(3;0;4)\Rightarrow d(A;(P))=\dfrac{13}{3}$.

Với $t=-1\Rightarrow B(-1;4;2)\Rightarrow d(B;(P))=\dfrac{5}{3}$.

Với mọi điểm $M(a;b;c)$ trên (S) ta luôn có $d(B;(P)) \le d(M;(P)) \le d(A;(P))$.

Vậy khoảng cách từ M đến (P) là lớn nhất bằng $\dfrac{13}{3}$ khi $M(3;0;4)$

Do đó $a+b+c=7$.

Câu 72: (LÊ HỒNG PHONG) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+3}{-1}$ và mặt cầu (S) tâm I có phương trình $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=18$. Đường thẳng d cắt (S) tại hai điểm A, B. Tính diện tích tam giác IAB.

A. $\dfrac{8\sqrt{11}}{3}$. **B.** $\dfrac{16\sqrt{11}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{11}}{6}$. **D.** $\dfrac{8\sqrt{11}}{9}$.

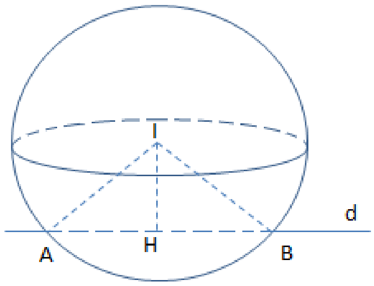
Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đường thẳng d đi qua điểm $C(1;0;-3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-1;2;-1)$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$, bán kính $R=3\sqrt{2}$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng d.



Khi đó: $IH=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IC},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$, với $\overrightarrow{IC}=(0;-2;-2)$;

$\left[\overrightarrow{IC},\vec{u}\right]=(6;2;-2)$

Vậy $IH=\dfrac{\sqrt{6^2+2^2+2^2}}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{\sqrt{66}}{3}$

Suy ra $HB=\sqrt{18-\dfrac{22}{3}}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

Vậy, $S_{\Delta IAB}=\dfrac{1}{2}IH\cdot AB=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{66}}{3}\cdot\dfrac{8\sqrt{6}}{3}=\dfrac{8\sqrt{11}}{3}$.

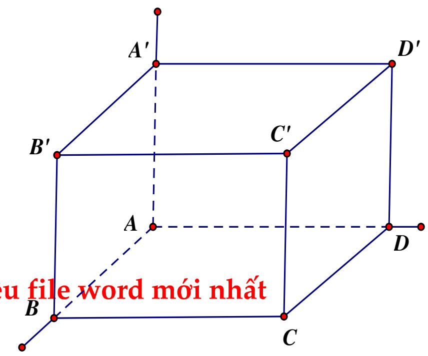
Câu 73: (HAI BÀ TRƯNG – HUẾ) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(BC'D)$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta chọn hệ trục tọa độ sao cho các đỉnh của hình lập phương có tọa độ như sau:



$A(0;0;0)$ $B(2;0;0)$ $C(2;2;0)$ $D(0;2;0)$

$A'(0;0;2)$ $B'(2;0;2)$ $C'(2;2;2)$ $D'(0;2;2)$

$\overrightarrow{AB'}=(2;0;2)$, $\overrightarrow{AD'}=(0;2;2)$,

$\overrightarrow{BD}=(-2;2;0)$, $\overrightarrow{BC'}=(0;2;2)$

* Mặt phẳng $(AB'D')$ qua $A(0;0;0)$ và nhận véctơ $\vec{n}=\frac{1}{4}\left[\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{AD'}\right]=(-1;-1;1)$ làm véctơ pháp tuyến. Phương trình $(AB'D')$ là : $x+y-z=0$.

* Mặt phẳng $(BC'D)$ qua $B(2;0;0)$ và nhận véctơ $\vec{m}=\frac{1}{4}\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC'}\right]=(1;1;-1)$ làm véctơ pháp tuyến.

Phương trình $(BC'D)$ là : $x+y-z-2=0$.

Suy ra hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(BC'D)$ song song với nhau nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng chính là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BC'D)$: $d\left(A,(BC'D)\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Cách khác: Thấy khoảng cách cần tìm $d\left((AB'D'),(BC'D)\right)=\frac{1}{3}AC'=\frac{1}{3}.2\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 74: (HAI BÀ TRƯNG – HUẾ) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;-2),B(3;-1;-4),C(-2;2;0)$. Điểm D trong mặt phẳng (Oyz) có cao độ âm sao cho thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng 2 và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (Oxy) bằng 1. Khi đó có tọa độ điểm D thỏa mãn bài toán là:

A. $D(0;3;-1)$. **B.** $D(0;-3;-1)$. **C.** $D(0;1;-1)$. **D.** $D(0;2;-1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Vì $D\in(Oyz)\Rightarrow D(0;b;c)$, do cao độ âm nên $c<0$.

Khoảng cách từ $D(0;b;c)$ đến mặt phẳng $(Oxy):z=0$ bằng 1 $\Leftrightarrow\frac{|c|}{1}=1\Rightarrow c=-1$ (do $c<0$).

Suy ra tọa độ $D(0;b;-1)$. Ta có:

$\overrightarrow{AB}=(1;-1;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(-4;2;2)$; $\overrightarrow{AD}=(-2;b;1)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(2;6;-2)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=-4+6b-2=6b-6=6(b-1)$

$\Rightarrow V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|=|b-1|$

Mà $V_{ABCD}=2\Leftrightarrow|b-1|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=3\\b=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D(0;3;-1)\\D(0;-1;-1)\end{array}\right.$. Chọn đáp án $D(0;3;-1)$.

Câu 75: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;11;-5)$ và mặt phẳng

$(P): 2mx + (m^2+1)y + (m^2-1)z - 10 = 0$. Biết rằng khi m thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và cùng đi qua A. Tìm tổng bán kính của hai mặt cầu đó.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $7\sqrt{2}$. **D.** $12\sqrt{2}$.

Lời giải tham khảo:

Gọi $I(a;b;c), r$ lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu . Do mặt cầu tiếp xúc với (P)nên ta có

$$r = d(I,(P)) = \frac{\left|2ma + (m^2+1)b + (m^2-1)c - 10\right|}{(m^2+1)\sqrt{2}} = \frac{\left|(b-c)m^2 + 2ma + b - c - 10\right|}{(m^2+1)\sqrt{2}}$$

$$\left|(b+c)m^2 + 2ma + b - c - 10\right| = r(m^2+1)\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (b+c-r\sqrt{2})m^2 + 2ma + b - c - r\sqrt{2} - 10 = 0 & (1) \\ (b+c+r\sqrt{2})m^2 + 2ma + b - c + r\sqrt{2} - 10 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

TH1: $(b+c-r\sqrt{2})m^2 + 2ma + b - c - r\sqrt{2} - 10 = 0 \quad (1)$

Do m thay đổi vẫn có mặt cầu cố định tiếp xúc với (P) nên yêu cầu bài toán trờ thành tìm điều kiện a,b,c sao cho (1)không phụ thuộc vào m. Do đó (1)luôn đúng với mọi $\Leftrightarrow \begin{cases} b + c - r\sqrt{2} = 0 \\ a = 0 \\ b - c - r\sqrt{2} - 10 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = r\sqrt{2} + 5 = 0 \\ a = 0 \\ c = -5 \end{cases}$ Suy ra $I(0;5+r\sqrt{2};-5) => (S): x^2 + (y - 5 - r\sqrt{2})^2 + (z+5)^2 = r^2$.

Lại có $A \in (S)$ nên suy ra : $4 + (-11 - 5 - r\sqrt{2})^2 = r^2 \Leftrightarrow r^2 - 12\sqrt{2}r + 40 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r = 2\sqrt{2} \\ r = 10\sqrt{2} \end{array}\right.$

TH2: $(b+c+r\sqrt{2})m^2 + 2ma + b - c + r\sqrt{2} - 10 = 0$ làm tương tự TH1 (trường hợp này không thỏa đề bài)

Tóm lại : Khi m thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và cùng đi qua A và có tổng bán kính là : $12\sqrt{2}$ suy ra chọn D

Câu 76: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;0;0), B(0;2;0), C(0;0;6)$ và $D(1;1;1)$. Kí hiệu d là đường thẳng đi qua D sao cho tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến d lớn nhất. Hỏi đường thẳng d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M(-1;-2;1)$. **B.** $N(5;7;3)$. **C.** $P(3;4;3)$. **D.** $Q(7;13;5)$.

Lời giải tham khảo:

Ta có phương trình mặt phẳng qua A,B,C là : $(ABC): \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow 2x + 3y + z - 6 = 0$.

Dễ thấy $D \in (ABC)$ .Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên d.

Suy ra $d(A,d)+d(B,d)+d(C,d)=AA'+BB'+CC'\le AD+BD+CD$. Dấu bằng xảy ra khi $A'\equiv B'\equiv C'\equiv D$. Hay tổng khoảng cách từ các điểm $A,\ B,\ C$ đến d lớn nhất khi d là đường thẳng qua D và vuông góc với mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow d:\begin{cases}x=1+2t\\ y=1+3t\\ z=1+t\end{cases}; N\in d$ suy ra chọn B

Câu 77: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(5;5;0),\ B(1;2;3),\ C(3;5;-1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z+5=0$. Tính thể tích V của khối tứ diện $SABC$ biết đỉnh S thuộc mặt phẳng (P) và $SA=SB=SC$.

A. $V=\dfrac{145}{6}$. **B.** $V=145$. **C.** $V=\dfrac{45}{6}$. **D.** $V=\dfrac{127}{3}$.

Lời giải tham khảo:

Gọi $S(a;b;c)\in(P) \Rightarrow a+b+c+5=0 (1)$.

Ta có : $AS=\sqrt{(a-5)^2+(b-5)^2+c^2},\ BS=\sqrt{(a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2}, CS=\sqrt{(a-3)^2+(b-5)^2+(c+1)^2}$

Do $SA=SB=SC \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{(a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2}=\sqrt{(a-3)^2+(b-5)^2+(c+1)^2}\\ \sqrt{(a-5)^2+(b-5)^2+c^2}=\sqrt{(a-3)^2+(b-5)^2+(c+1)^2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4a+6b-8c-21=0\\ 4a+2c-15=0\end{cases}$

Ta có hệ : $\begin{cases}4a+6b-8c-21=0\\ 4a+2c-15=0\\ a+b+c+5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=6\\ b=-\dfrac{23}{2}\\ c=-\dfrac{9}{2}\end{cases} \Rightarrow S=\left(6;-\dfrac{13}{2};-\dfrac{9}{2}\right)$. Lại có : $\overrightarrow{AB}(-4;-3;3), \overrightarrow{AC}(-2;0;-1)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(3;-10;-6); \overrightarrow{AS}=\left(1;-\dfrac{23}{2};-\dfrac{9}{2}\right) \Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{AS}\right|=145 \Rightarrow V_{S.ABC}=\dfrac{145}{6}$

Câu 78: Cho hình chóp SABC có đáy là tam giác đều cạnh bằng $6cm$ và $SA=SB=SC=4\sqrt{3}(cm)$. Gọi D là điểm đối xứng của B qua C. Khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABD bằng ?

A. $5cm$ **B.** $3\sqrt{2}cm$ **C.** $\sqrt{26}cm$ **D.** $\sqrt{37}cm$

Lời giải tham khảo :

Cách 1 : Dựng CG vuông góc với (ABC), Qua E dựng mặt phẳng vuông góc với SB, mặt phẳng này cắt CG tại F . Suy ra F là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABD .Đặt $SF=R$

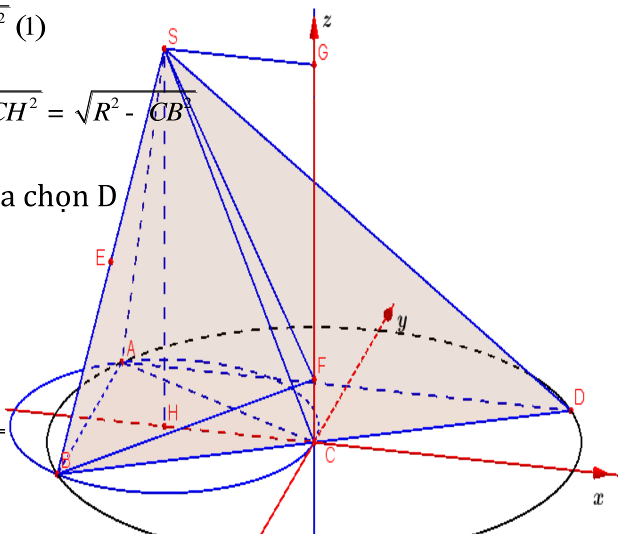
Xét hình chữ nhật : $FGSH \Rightarrow FC=SH-FG=SH-\sqrt{R^2-CH^2}$ (1)

Lại có : $FC=\sqrt{R^2-CB^2}$ (2).Từ (1) và (2) suy ra $SH-\sqrt{R^2-CH^2}=\sqrt{R^2-CB^2}$

$6-\sqrt{R^2-12}=\sqrt{R^2-36} \Rightarrow 5-\sqrt{R^2-12}=0 \Rightarrow R=\sqrt{37}(cm)$ Suy ra chọn D

Cách 2 :

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ .



Ta có : $C(0;0;0), A\left(-3\sqrt{3};-3;0\right), B\left(-3\sqrt{3};3;0\right), S\left(-2\sqrt{3};0;6\right)$

$F \in CG => F(0;0;t) \Rightarrow FA = FS \Leftrightarrow \sqrt{36+t^2} = \sqrt{12+(t-6)^2}$

$\Leftrightarrow t = 1 => SC = \sqrt{37}\,(cm)$ suy ra chọn D