CHƯƠNG 06 (tiếp theo)
BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO HÌNH HỌC OXYZ
CHỦ ĐỀ 3.
ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN
1. Định nghĩa

Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và có vec tơ chỉ phương $\vec{a}=\left(a_1;a_2;a_3\right),\vec{a}\neq\vec{0}$: $\begin{cases}x=x_0+a_1t\\y=y_0+a_2t\\z=z_0+a_3t\end{cases}$

Nếu $a_1;a_2;a_3$ đều khác không. Phương trình đường thẳng Δ viết dưới dạng chính tắc như sau:

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$$

Ngoài ra đường thẳng còn có dạng tổng quát là: $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

với $\forall A_1,B_1,C_1,A_2,B_2,C_2$ thỏa $A_1{}^2+B_1{}^2+C_1{}^2>0,A_2{}^2+B_2{}^2+C_2{}^2>0.$

2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Chương trình cơ bản	Chương trình nâng cao
1)Vị trí tương đối của hai đường thẳng Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=x_0+a_1t\\y=y_0+a_2t\\z=z_0+a_3t\end{cases};d':\begin{cases}x=x_0'+a_1't'\\y=y_0'+a_2't'\\z=z_0'+a_3't'\end{cases}$ Vtcp $\vec{u}$ đi qua M_0 và d' có vtcp $\overrightarrow{u'}$ đi qua M_0' ➢ $\vec{u},\vec{u}'$ ***cùng phương:*** $d//d'\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u}=k\overrightarrow{u'}\\M_0\notin d'\end{cases};d\equiv d'\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u}=k\overrightarrow{u'}\\M_0\in d'\end{cases}$ ➢ $\vec{u},\vec{u}'$ ***không cùng phương:*** $\begin{cases}x_0+a_1t=x_0'+a_1't'\\y_0+a_2t=y_0'+a_2't'\\z_0+a_3t=y_0'+a_3't'\end{cases}\ (I)$ • d chéo d' $\Leftrightarrow$ hệ phương trình (1) vô nghiệm • d cắt d' $\Leftrightarrow$ hệ phương trình (1) có 1 nghiệm	***1) Vị trí tương đối của hai đường thẳng*** Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=x_0+a_1t\\y=y_0+a_2t\\z=z_0+a_3t\end{cases};d':\begin{cases}x=x_0'+a_1't'\\y=y_0'+a_2't'\\z=z_0'+a_3't'\end{cases}$ Vtcp $\vec{u}$ đi qua M_0 và d' có vtcp $\overrightarrow{u'}$ đi qua M_0' ➢ $(d)//(d')\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right]=\vec{0}\\M_0\notin d'\end{cases}$ ➢ $(d)\equiv(d')\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right]=\vec{0}\\M_0\in d'\end{cases}$ ➢ (d) cat $(d')\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right]\neq\vec{0}\\\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right].\overrightarrow{MM_0}=0\end{cases}$ ➢ (d) *cheo* $(d')\Leftrightarrow\left[\vec{u},\overrightarrow{u'}\right].\overrightarrow{MM_0}\neq0$

3 . Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp 1	Phương pháp 2
Trong không gian $Oxyz$ cho: (α):Ax+By+Cz+D=0 và $d:\begin{cases}x=x_0+a_1t\\y=y_0+a_2t\\z=z_0+a_3t\end{cases}$ **Pt**: $A\left(x_0+a_1t\right)+B\left(y_0+a_2t\right)+C\left(z_0+a_3t\right)+D=0(1)$	Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng d qua $M\left(x_0;y_0;z_0\right)$ có vtcp: $\vec{a}=\left(a_1;a_2;a_3\right)$ và (α):Ax+By+Cz+D=0 có vtpt $\vec{n}=(A;B;C)$ ➢ (d) cắt $(\alpha)\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{n}\neq0$

➢ Phương trình (1) vô nghiệm thì $d//(\alpha)$ ➢ Phương trình (1) có 1 nghiệm thì d cắt (α) ➢ Phương trình (1) có vô số nghiệm thì $d \in (\alpha)$ Đặc biệt: $d \perp (\alpha) \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{n}$ cùng phương	➢ $(d)//(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}.\vec{n} = 0 \\ M \notin (\alpha) \end{cases}$ ➢ (d) nằm trên mp (α) $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}.\vec{n} = 0 \\ M \in (\alpha) \end{cases}$

4. Khoảng cách

Khoảng cách từ $M(x_0;y_0;z_0)$ **đến mặt phẳng** (α):Ax+By+Cz+D=0 **cho bởi công thức** $d(M_0,\alpha) = \dfrac{\left\|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right\|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$	
Khoảng cách từ M đến đường thẳng (d) Phương pháp 1: • Lập ptmp (α) đi qua M và vuông góc với d. • Tìm tọa độ giao điểm H của mp (α) và d • $d(M,d) = MH$ ➢ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau <u>Phương pháp 1:</u> d đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$; có vtpt $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ d' đi qua $M'(x_0';y_0';z_0')$; vtpt $\vec{a'} = (a_1';a_2';a_3')$ Lập phương trình mp (α) chứa d và song song với d': $d(d,d') = d(M',(\alpha))$	➢ Khoảng cách từ M đến đường thẳng (d) Phương pháp 2: (d đi qua M_0 có vtcp $\vec{u}$) $d(M,\Delta) = \dfrac{\left\|\left[\overrightarrow{M_0M}, \vec{u}\right]\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$ ➢ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau <u>*Phương pháp 2:*</u> d đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$; có vtpt $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ d' đi qua $M'(x_0';y_0';z_0')$; vtpt $\vec{a'} = (a_1';a_2';a_3')$ $d(\Delta,\Delta') = \dfrac{\left\|\left[\vec{a}, \vec{a'}\right].\overrightarrow{MM'}\right\|}{\left\|\left[\vec{a}, \vec{a'}\right]\right\|} = \dfrac{V_{hop}}{S_{day}}$

5 . Góc giữa hai đường thẳng

➢ Góc giữa hai đường thẳng

(Δ) đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$ có VTCP $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$

(Δ') đi qua $M'(x_0';y_0';z_0')$ có VTCP $\vec{a'} = (a_1';a_2';a_3')$

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\vec{a}, \vec{a'}\right)\right| = \frac{\left|\vec{a}.\vec{a'}\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{a'}\right|} = \frac{\left|a_1.a'_1 + a_2.a'_2 + a_3.a'_3\right|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{a'^2_1+a'^2_2+a'^2_3}}$$

6 . Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng (Δ) đi qua M_0 có VTCP $\vec{a}$, mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n} = (A;B;C)$.

Gọi φ là góc hợp bởi (Δ) và mặt phẳng (α): $\sin\varphi = \left|\cos\left(\vec{a}, \vec{n}\right)\right| = \dfrac{\left|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y-z-3=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P) sao cho Δ vuông góc với d và khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và d bằng $\sqrt{2}$.

A . $\left[\begin{array}{l}\Delta:\frac{x-7}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-4}{-1}\\ \Delta:\frac{x-3}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-1}\end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l}\Delta:\frac{x+7}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{-1}\\ \Delta:\frac{x+3}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}\end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l}\Delta:\frac{x-7}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{-1}\\ \Delta:\frac{x-3}{1}=\frac{y}{4}=\frac{z}{1}\end{array}\right.$

D. $\left[\begin{array}{l}\Delta:\frac{x-7}{1}=\frac{-y}{-1}=\frac{z-4}{-1}\\ \Delta:\frac{x-3}{1}=\frac{-y}{-1}=\frac{z-1}{-1}\end{array}\right.$

Lời giải

Đường thẳng d có VTCP $\overrightarrow{u_d}=(2;1;1)$. Mặt phẳng (P) có VTPT $\overrightarrow{n_p}=(1;2;-1)$, ta có $\left[\overrightarrow{n_p},\overrightarrow{u_d}\right]=(3;-3;-3)$

Vì $\Delta\subset(P),\Delta\perp d\Rightarrow VTPT\,\overrightarrow{u_\Delta}=\frac{1}{3}\left[\overrightarrow{u_\Delta};\overrightarrow{u_d}\right]=(0;-1;1)$

Khi đó, phương trình mặt phẳng $(Q): y-z+m=0$

Chọn $A(1;-2;0)\in d$, ta có:

$d(A;(Q))=d(\Delta;d)=\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{|-2+m|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\\ m=0\end{array}\right.$

Với $m=4\Rightarrow(Q): y-z+4=0$

Vì $\Delta=(P)\cap(Q)\Rightarrow\Delta$ đi qua $B(7;0;4)\Rightarrow\Delta:\frac{x-7}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-4}{-1}$

Với $m=0\Rightarrow(Q): y-z=0$

Vì $\Delta=(P)\cap(Q)\Rightarrow\Delta$ đi qua $C(3;0;0)\Rightarrow\Delta:\frac{x-3}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-1}$

Chọn A.

Bài 2: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$. Gọi I là giao điểm của $d,(P)$. Tìm $M\in(P)$ sao cho MI vuông góc với d và $MI=4\sqrt{14}$.

A . $\left[\begin{array}{l}M(5;9;-11)\\ M(-3;-7;13)\end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l}M(5;7;-11)\\ M(-3;-7;13)\end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l}M(-5;9;-11)\\ M(3;-7;13)\end{array}\right.$

D. $\left[\begin{array}{l}M(5;-7;11)\\ M(3;7;-13)\end{array}\right.$

Lời giải

Vì $I\in d$ nên $I(2+t;-1-2t;-t)$.

Hơn nữa $I\in(P)\Rightarrow 2+t-1-2t-3=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow I(1;1;1)$

Gọi $M(a;b;c)$. Do: $\begin{cases} M\in(P)\Rightarrow a+b+c=3 \\ MI\perp d\Rightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow a-2b-c+2=0 \end{cases}$ $\left(\overrightarrow{IM}=(a-1;b-1;c-1),\overrightarrow{u_d}=(1;-2;-1)\right)$

Do $MI=4\sqrt{14}\Rightarrow (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=224.$

Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ a-2b-c+2=0 \\ (a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=224 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2a-1 \\ c=4-3a \\ (a-1)^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=9 \\ c=-11 \end{cases} \cup \begin{cases} a=-3 \\ b=-7 \\ c=13 \end{cases}$$

Với $(a;b;c)=(5;9;-11)\Rightarrow M(5;9;-11)$

Với $(a;b;c)=(-3;-7;13)\Rightarrow M(-3;-7;13)$

Chọn A.

Bài 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x-2y+2z=0, (Q): 2x+2y+z-1=0.$ Viết phương trình của đường thẳng d đi qua $A(0;0;1)$, nằm trong mặt phẳng (Q) và tạo với mặt phẳng (P) một góc bằng 45^0.

A . $d_1: \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1-4t \end{cases}; d_2: \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=1 \end{cases}$

B. $d_1: \begin{cases} x=t \\ y=2t-1 \\ z=1-4t \end{cases}; d_2: \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=1 \end{cases}$

C. $d_1: \begin{cases} x=t \\ y=t-1 \\ z=1-4t \end{cases}; d_2: \begin{cases} x=3t \\ y=-t \\ z=1+4t \end{cases}$

D. $d_1: \begin{cases} x=1+4t \\ y=1-t \\ z=1-4t \end{cases}; d_2: \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=1 \end{cases}$

Lời giải

Ta có $\vec{n}=(2;2;1)$ là vecto pháp tuyến của $(Q), \vec{b}=(1;-2;2)$ là vec tơ pháp tuyến của (P) .

Gọi $\vec{a}=(a;b;c), a^2+b^2+c^2>0$ là một vecto chỉ phương của d.

Vì đường thẳng d đi qua $A(0;0;1)$ mà $A(0;0;1), A\in(Q)$

Do đó $d\subset(Q)\Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{n}\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{n}=0\Leftrightarrow 2a+2b+c=0\Leftrightarrow c=-2a-2b$

Góc hợp bởi d và (P) bằng 45^0 :

$$\Leftrightarrow \sin 45^0=\left|\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)\right|=\frac{\left|\vec{a}.\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|a-2b+2c|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\Leftrightarrow 18(a^2+b^2+c^2)=4(a-2b+2c)^2\Leftrightarrow a=\pm b$$

$a=b(b=1\Rightarrow a=1;c=-4)$

$a=-b(b=-1\Rightarrow a=1;c=0)$

Vậy $d_1: \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1-4t \end{cases}; d_2: \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=1 \end{cases}$ là các đường thẳng cần tìm.

Chọn A.

Bài 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình thang cân $ABCD$ có hai đáy AB, CD thỏa mãn $CD = 2AB$ và diện tích bằng 27; đỉnh $A(-1;-1;0)$; phương trình đường thẳng chứa cạnh CD là $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{1}$. Tìm tọa độ các điểm D biết hoành độ điểm B lớn hơn hoành độ điểm A.

A . $D(-2;-5;1)$ **B.** $D(-3;-5;1)$ **C.** $D(2;-5;1)$ **D.** $D(3;-5;1)$

Lời giải

Đường thẳng CD qua $M(2;-1;3)$ có vec tơ chỉ phương $\vec{u} = (2;2;1)$

Gọi $H(2+2t;-1+2t;3+t)$ là hình chiếu của A lên CD, ta có:

$\overrightarrow{AH}.\vec{u} = 2(3+2t;2.2t+(3+t) \Rightarrow t = -1 \Rightarrow H(0;-3;2), d(A,CD) = AH = 3$

Từ giả thiết ta có:

$AB + CD = 3AB = \frac{2S_{ABCD}}{AH} = 18 \Rightarrow AB = 6; DH = 3; HC = 9$

Đặt $\overrightarrow{AB} = t\vec{u} = (2t;2t;t) \Rightarrow t > 0(x_B > x_A) \Rightarrow t = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\vec{u}|} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{AB}(4;4;2) \Rightarrow B(3;3;2)$

$\overrightarrow{HC} = \frac{9}{6}\overrightarrow{AB} = (6;6;3) \Rightarrow C(6;3;5)$

$\overrightarrow{HD} = -\frac{3}{6}\overrightarrow{AB} = (-2;-2;-1) \Rightarrow D(-2;-5;1)$

Chọn A.

Bài 5: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 5x - z - 4 = 0$ và hai đường thẳng $d_1; d_2$ lần lượt có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}; \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{1}$. Viết phương trình của mặt phẳng $(Q)//(P)$, theo thứ tự cắt d_1, d_2 tại A, B sao cho $AB = \frac{4\sqrt{5}}{3}$.

A. $(Q_1): 5x - z + \frac{-25+\sqrt{331}}{7} = 0; (Q_2): 5x - z + \frac{-25-\sqrt{331}}{7} = 0$

B. $(Q_1): 5x - z - 2 = 0; (Q_2): 55x + 11z + 14 = 0$

C. $(Q_1): -5x - z - 2 = 0; (Q_2): -55x - 11z + 14 = 0$

D. $(Q_1): 5x - z - 4 = 0; (Q_2): 55x - 11z + 7 = 0$

Lời giải

$$d_1: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = -1+2t \end{cases}, d_2: \begin{cases} x = 1+2t' \\ y = 2+t' \\ z = -1+t' \end{cases}; (Q): 5x - z + d = 0, d \neq -4$$

$$(Q) \cap d_1 = A\left(\frac{-3-d}{3}; \frac{6+d}{3}; \frac{-15-2d}{3}\right), (Q) \cap d_2 = B\left(\frac{-3-2d}{9}; \frac{12-d}{9}; \frac{30+5d}{9}\right)$$

Suy ra $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{6+d}{9}; \frac{-6-4d}{9}; \frac{30+5d}{9}\right) = \frac{1}{9}(6+d; -6-4d; 30+5d)$

Do $AB = \frac{4\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \frac{1}{8}\left((6+d)^2 + (-6-4d)^2 + (30+5d)^2\right) = \frac{80}{9} \Leftrightarrow 42d^2 + 300d + 252 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = \frac{-25+\sqrt{331}}{7} \\ d = \frac{-25-\sqrt{331}}{7} \end{array}\right.$

Vậy, tìm được hai mặt phẳng thỏa mãn:

$(Q_1): 5x - z + \frac{-25+\sqrt{331}}{7} = 0; (Q_2): 5x - z + \frac{-25-\sqrt{331}}{7} = 0$

Chọn A.

Bài 6: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1}$; $d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 5 = 0.$ Lập phương trình đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) và cắt d_1, d_2 lần lượt tại A, B sao cho độ dài đoạn AB đạt giá trị nhỏ nhất.

A . $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}$

B. $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{1}$

C. $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{1}$

D. $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}$

Lời giải

Vì $A \in d_1; B \in d_2 \Rightarrow A(-1+a; -2+2a; a), B(2+2b; 1+b; 1+b)$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-a+2b+3; -2a+b+3; -a+b+1)$

(P) có vec tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;1;-2), AB // (P) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \vec{n} \\ A \notin (P) \end{cases}$

$\overrightarrow{AB} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow -a + 2b + 3 - 2a + b + 3 + 2a - 2b - 2 = 0 \Leftrightarrow b = a - 4 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (a-5; -a-1; -3)$

Do đó: $AB = \sqrt{(a-5)^2 + (-a-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{2(a-2)^2 + 27} \geq 3\sqrt{3}$

$\Rightarrow \min AB = 3\sqrt{3}$ khi $a = 2 \Rightarrow A(1;2;2)$

$\overrightarrow{AB} = (-3;-3;-3), A(1;2;2) \notin (P)$

Vậy phương trình đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}$.

Chọn A.

Bài 7: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 2 = 0.$ Gọi M là giao điểm giữa d và (P). Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), vuông góc với d đồng thời khoảng cách từ M đến Δ bằng $\sqrt{42}.$

A . $\left[\begin{array}{l} \Delta: \frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+5}{1} \\ \Delta: \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-5}{1} \end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l} \Delta: \frac{x-5}{-2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+5}{1} \\ \Delta: \frac{x+3}{-2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-5}{1} \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} \Delta: \frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-5}{1} \\ \Delta: \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-5}{1} \end{array}\right.$

D. $\left[\begin{array}{l} \Delta: \frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+5}{1} \\ \Delta: \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-5}{1} \end{array}\right.$

Lời giải

Phương trình tham số của $d:\begin{cases}x=3+2t\\ y=-2+t\\ z=-1-t\end{cases}$

Mặt phẳng (P) có VTPT $\overrightarrow{n_P}=(1;1;1)$, d có VTCP $\overrightarrow{u_d}=(2;1;-1)$

Vì $M=d\cap(P)\Rightarrow M(1;-3;0)$

Vì Δ nằm trong (P) và vuông góc với d nên: $VTCP\ \overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{n_P}\right]=(2;-3;1)$

Gọi $N(x;y;z)$ là hình chiếu vuông góc của M trên Δ, khi đó: $\overrightarrow{MN}=(x-1;y+3;z)$

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{u_\Delta}\\ N\in(P)\\ MN=\sqrt{42}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z+2=0\\ 2x-3y+z-11=0\\ (x-1)^2+(y+3)^2+z^2=42\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}N(5;-2;-5)\\ N(-3;-4;5)\end{array}\right.$

Với $N(5;-2;-5)\Rightarrow\Delta:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z+5}{1}$

Với $N(-3;-4;5)\Rightarrow\Delta:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-5}{1}$

Chọn A.

Bài 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;2;3)$, đường thẳng $d:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$ và mặt phẳng $(P):x+2y-z+1=0$. Gọi d' là đường thẳng đối xứng với d qua (P). Tìm tọa độ điểm B trên d' sao cho $AB=9$.

A. $\left[\begin{array}{l}B\left(\dfrac{62+16\sqrt{151}}{27};\dfrac{-26+2\sqrt{151}}{27};\dfrac{31+8\sqrt{151}}{27}\right)\\ B\left(\dfrac{62-16\sqrt{151}}{27};\dfrac{-26-2\sqrt{151}}{27};\dfrac{31-8\sqrt{151}}{27}\right)\end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l}B\left(\dfrac{62+\sqrt{151}}{27};\dfrac{-26+\sqrt{151}}{27};\dfrac{31+\sqrt{151}}{27}\right)\\ B\left(\dfrac{62-\sqrt{151}}{27};\dfrac{-26-\sqrt{151}}{27};\dfrac{31-\sqrt{151}}{27}\right)\end{array}\right.$

C . $\left[\begin{array}{l}B\left(\dfrac{16\sqrt{151}}{27};\dfrac{2\sqrt{151}}{27};\dfrac{8\sqrt{151}}{27}\right)\\ B\left(\dfrac{-16\sqrt{151}}{27};\dfrac{-2\sqrt{151}}{27};\dfrac{-8\sqrt{151}}{27}\right)\end{array}\right.$

D. $\left[\begin{array}{l}B\left(\dfrac{62+4\sqrt{151}}{27};\dfrac{-26+2\sqrt{151}}{27};\dfrac{31+8\sqrt{151}}{27}\right)\\ B\left(\dfrac{62-4\sqrt{151}}{27};\dfrac{-26-2\sqrt{151}}{27};\dfrac{31-8\sqrt{151}}{27}\right)\end{array}\right.$

Lời giải

Có d cắt (P) tại $I(2;-1;1)$. Chọn $M(0;0;-1)\in d$ và M' là điểm đối xứng của M qua (P). Khi đó $M'\in(d')$. Ta tìm M'.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua M và vuông góc với mặt phẳng (P)

$\Rightarrow VTCP\ \overrightarrow{u_\Delta}=VTPT\ \overrightarrow{n_P}=(1;2-1)\Rightarrow\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$

Gọi H là trung điểm MM' thì tọa độ H định:

$\begin{cases}\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-1}\\ x+2y-z+1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{3};y=-\dfrac{2}{3};z=-\dfrac{2}{3}\Rightarrow H\left(-\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right).$

Từ đó: $M'(2x_H-x_M;2y_H-y_M;2z_H-z_M)=\left(-\dfrac{2}{3};-\dfrac{4}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$

Suy ra d’ là đường thẳng đi qua $I(2;-1;1)$ nhận VTCP:

$\overrightarrow{M'I}=\left(\frac{8}{3};\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)\Rightarrow d':\frac{x-2}{8}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{4}$

$B\in d'\Rightarrow B(2+8t;-1+t;1+4t)$

Theo đề bài ta phải có: $AB=9\Leftrightarrow(1+8t)^2+(t-3)^2+(4t-2)^2=81\Leftrightarrow 81t^2-6t-67=0\Leftrightarrow t=\frac{1\pm2\sqrt{151}}{27}$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}B\left(\frac{62+16\sqrt{151}}{27};\frac{-26+2\sqrt{151}}{27};\frac{31+8\sqrt{151}}{27}\right)\\B\left(\frac{62-16\sqrt{151}}{27};\frac{-26-2\sqrt{151}}{27};\frac{31-8\sqrt{151}}{27}\right)\end{array}\right.$$

Chọn A.

Bài 9: Trong không gian với hệ tọa độ $\mathrm{O}xyz$, viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{1}$ và tạo với mặt phẳng $(P):x+2y-z+5=0$ một góc nhỏ nhất.

A . $(Q):y-z+4=0$ **B.** $(Q):y-z+6=0$

C. $(Q):y+2z+4=0$ **D.** $(Q):2y-z+4=0$

Lời giải

+ d có vtcp $\vec{u}=(2;1;1)$, (P) có vtpt $\vec{m}=(1;2;-1)$, (Q) có vtpt $\vec{n}=(a,b,c)$, $(a^2+b^2+c^2>0)$

+ do (Q) chứa d nên ta có: $\vec{n}\perp\vec{u}\Rightarrow\vec{n}.\vec{u}=0\Leftrightarrow 2a+b+c=0\Leftrightarrow c=-2a-b\Leftrightarrow\vec{n}=(a,b,-2a-b)$

+ Góc hợp bởi (P) và (Q) là α

$$\Rightarrow\cos\alpha=\left|\cos\left(\vec{m};\vec{n}\right)\right|=\frac{\left|\vec{m}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{m}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\frac{|a+2b+2z+b|}{\sqrt{6}.\sqrt{a^2+b^2+(2a+b)^2}}$$

$$\cos\alpha=\frac{3|a+b|}{\sqrt{6}.\sqrt{a^2+b^2+(2a+b)^2}}\le\frac{3|a+b|}{\sqrt{6}.\sqrt{2(a+b)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\alpha\ge30^0$$

Vậy $\alpha_{\min}=30^0$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=0$ lúc đó ta chọn $b=1;c=-1\Rightarrow\vec{n}=(0;1;-1)$

Mặt phẳng $(Q):\begin{cases}qua:A(-1;-1;3)\\vtpt:\vec{n}=(0;1;-1)\end{cases}$ từ đó $(Q):y-z+4=0$.

Chọn A.

CHỦ ĐỀ 4.
MẶT CẦU

1. Định nghĩa mặt cầu

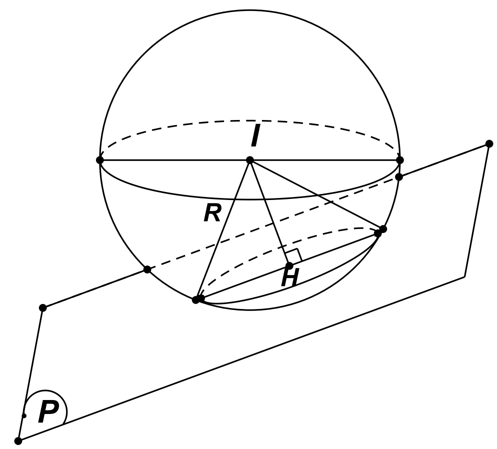
Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm O cố định một khoảng cách R cho trước là mặt cầu tâm O và bán kính R. Kí hiệu $S(O;R)$.

Trong không gian với hệ trục $Oxyz$:

- Mặt cầu (S) tâm $I(a,b,c)$ bán kính R có phương trình là: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.
- Phương trình: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$, với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

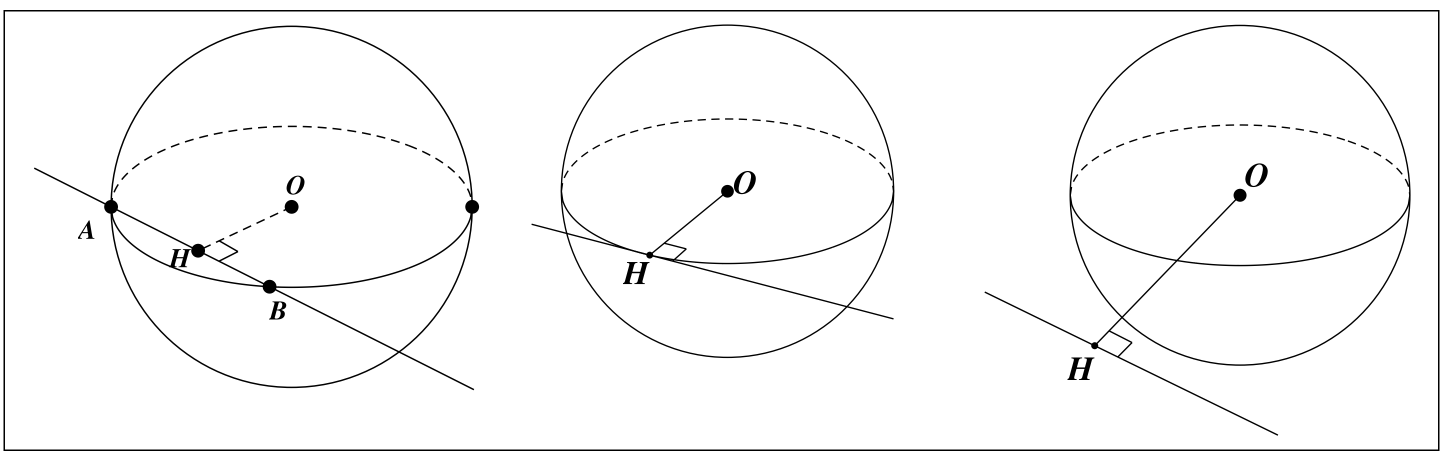
2 . Vị trí tương đối của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S)

- $d(I,(P))>R$ khi và chỉ khi (P) không cắt mặt cầu (S).
- $d(I,(P))=R$ khi và chỉ khi (P) tiếp xúc mặt cầu (S).
- $d(I,(P))<R$ khi và chỉ khi (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn nằm trên mặt phẳng (P) có tâm H và có bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2}$.



3 . Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

a) Cho mặt cầu $S(O;R)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của O lên Δ và $d=OH$ là khoảng cách từ O đến Δ



- Nếu $d<R$ thì Δ cắt mặt cầu tại 2 điểm phân biệt (H.3.1)
- Nếu $d=R$ thì Δ cắt mặt cầu tại 1 điểm duy nhất (H.3.2)
- Nếu $d>R$ thì Δ không cắt mặt cầu (H.3.3)

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;0;0), B(2;-1;2), C(-1;1;-3)$. Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc trục Oy, đi qua A và cắt mặt phẳng (ABC) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất.

A. $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{5}{4}$ **B**. $x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{5}{4}$

C . $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{9}{4}$ **D.** $x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+z^2=\frac{5}{4}$

Lời giải

Mặt phẳng (ABC) có phương trình: $x-y-z-1=0$

Gọi (S) là mặt cầu có tâm $I\in Oy$ và cắt (ABC) theo một đường tròn bán kính r nhỏ nhất.

Vì $I\in Oy$ nên $I(0;t;0)$, gọi H là hình chiếu của I lên (ABC) khi đó là có bán kính đường tròn giao của (ABC) và (S) là $r=AH=\sqrt{IA^2-IH^2}$.

Ta có $IA^2=t^2+1, IH=d\left(I,(ABC)\right)=\frac{|t+1|}{\sqrt{3}}\Rightarrow r=\sqrt{t^2+1-\frac{t^2+2t+1}{3}}=\sqrt{\frac{2t^2-2t+2}{3}}$.

Do đó, r nhỏ nhất khi và chỉ khi $t=\frac{1}{2}$. Khi đó $I\left(0;\frac{1}{2};0\right), IA^2=\frac{5}{4}$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là : $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{5}{4}$

Chọn A.

Bài 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm $I(1;2;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\frac{x}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{2}$.

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{233}{9}$ **B**. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{243}{9}$

C . $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{2223}{9}$ **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{333}{9}$

Lời giải

+ Đường thẳng d đi qua $M(0;-2;0)$ có vec tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;2)$. Tính được $\overrightarrow{MI}=(1;4;3)$.

+ Khẳng định và tính được $d(I,d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MI},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{233}}{3}$

+ Khẳng định mặt cầu cần tìm có bán kính bằng $d(I,d)$ và viết phương trình:

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{233}{9}$

Chọn A.

Bài 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2y+6z-12=0$ và đường thẳng $d: x=5+2t; y=4; z=7+t$. Viết phương trình đường thẳng Δ tiếp xúc mặt cầu (S) tại điểm $M(5;0;1)$ biết đường thẳng Δ tạo với đường thẳng d một góc φ thỏa mãn $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

A. $\Delta:\begin{cases}x=5+3t\\y=-5t\\z=1-t\end{cases}\vee\Delta:\begin{cases}x=5+13t\\y=5t\\z=1-11t\end{cases}$

B. $\Delta:\begin{cases}x=5+3t\\y=-5t\\z=1-t\end{cases}\vee\Delta:\begin{cases}x=5+13t\\y=5t\\z=1+11t\end{cases}$

C . $\Delta:\begin{cases}x=5+3t\\y=5t\\z=1-t\end{cases}\vee\Delta:\begin{cases}x=5+13t\\y=5t\\z=1-11t\end{cases}$

D. $\Delta:\begin{cases}x=5+3t\\y=-5t\\z=1-t\end{cases}\vee\Delta:\begin{cases}x=5+13t\\y=5t\\z=1-21t\end{cases}$

Lời giải

$(S):(x-2)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=26\Rightarrow(S)$ có tâm $I(2;-1;-3)$ và bán kính $R=\sqrt{26}$.

$\overrightarrow{IM}=(3;1;4),\overrightarrow{u_1}=(2;0;1)$ là 1 VTVP của (d)

Giả sử $\overrightarrow{u_2}=(a;b;c)$ là 1 VTCP của đường thẳng $\Delta\left(a^2+b^2+c^2\neq0\right)$

Do tiếp xúc mặt cầu (S) tại $M\Rightarrow\overrightarrow{IM}\perp\overrightarrow{u_2}\Leftrightarrow 3a+b+4c=0\Leftrightarrow b=-3a-4c$ (1)

Mà góc giữa đường thẳng Δ và đường thẳng d bằng φ.

$$\Rightarrow\left|\cos\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)\right|=\cos\varphi\Leftrightarrow\frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}=\frac{1}{\sqrt{7}}\Leftrightarrow\frac{|2a+c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{7}}\quad(2)$$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$\sqrt{7}|2a+c|=\sqrt{5}.\sqrt{a^2+(3a+4c)^2+c^2}\Leftrightarrow7\left(4a^2+4ac+c^2\right)=5\left(a^2+9a^2+24ac+16c^2+c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow22a^2+92ac+78c^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-3c\\a=-\dfrac{13}{11}c\end{array}\right.$$

Với $a=-3c$ do $a^2+b^2+c^2\neq0$ nên chọn $c=-1\Rightarrow a=3;b=-5$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng là: $\Delta:\begin{cases}x=5+3t\\y=-5t\\z=1-t\end{cases}$

Với $a=-\dfrac{13}{11}c$ do $a^2+b^2+c^2\neq0$ nên chọn $c=-11\Rightarrow a=13;b=5$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng là: $\Delta:\begin{cases}x=5+13t\\y=5t\\z=1-11t\end{cases}$

Chọn A.

Bài 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-2}$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho mặt cầu (S) tâm M tiếp xúc với trục Oz có bán kính bằng 2.

A. $M\left(2;0;-2\right)\vee M\left(\frac{6}{5};-\frac{8}{5};\frac{2}{5}\right)$

B. $M\left(2;0;2\right)\vee M\left(\frac{6}{5};\frac{8}{5};\frac{2}{5}\right)$

C . $M\left(2;0;-2\right)\vee M\left(\frac{7}{5};-\frac{8}{5};\frac{4}{5}\right)$

D. $M\left(4;0;-2\right)\vee M\left(\frac{6}{5};-\frac{8}{5};\frac{2}{5}\right)$

Lời giải

Vì $M\in d\Rightarrow M\left(1+t;-2+2t;-2t\right)$. Trục Oz đi qua điểm $\mathrm{O}(0;0;0)$ và có vtcp $\vec{k}=(0;0;1)$;

$\overrightarrow{OM}=\left(1+t;-2+2t;-2t\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{OM};\vec{k}\right]=\left(-2+2t;-1-t;0\right)$

$\Rightarrow\left\|\left[\overrightarrow{OM};\vec{k}\right]\right\|=\sqrt{5t^2-6t+5}$

Gọi R là bán kính mặt cầu (S) , ta có : $R=d\left(M;Oz\right)=\sqrt{5t^2-6t+5}$

$$R=2\Rightarrow\sqrt{5t^2-6t+5}=2\Rightarrow5t^2-6t+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=\frac{1}{5}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}M\left(2;-2;0\right)\\M\left(\frac{6}{5};-\frac{8}{5};\frac{2}{5}\right)\end{array}\right.$$

Chọn A.

Bài 5: Trong không gian với hệ tọa độ $\mathrm{O}xyz,$ cho hai đường thẳng Δ_1,Δ_2 có phương trình: $\Delta_1:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{2};\Delta_2:\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-1}$. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất và tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1,Δ_2 ?

A. $x^2+\left(y-2\right)^2+z^2=6$

B. $x^2+\left(y-2\right)^2-z^2=6$

C . $x^2-\left(y-2\right)^2+z^2=6$

D. $x^2+\left(y+2\right)^2+z^2=6$

Lời giải

Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất và tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1,Δ_2 là mặt cầu nhận đoạn vuông góc chung của Δ_1,Δ_2 làm đường kính. Giả sử mặt cầu cần lập là (S) và A,B lần lượt là tiếp điểm của (S) với Δ_1,Δ_2. Viết phương trình Δ_1,Δ_2 dưới dang tham số thì ta có:

$A\left(2+m;1+4m;1+2m\right),B\left(-2+n;3+n;-1-n\right)$

Do AB là đoạn vuông góc chung của Δ_1,Δ_2 nên:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{U_{\Delta_1}}=0\\\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{U_{\Delta_2}}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3n-21m=0\\3n-m=0\end{cases}\Leftrightarrow m=n=0\Rightarrow A\left(2;1;1\right),B\left(-2;3;-1\right)$$

Trung điểm I của AB có tọa độ là $I\left(0;2;0\right)$nên phương trình mặt cầu cần lập là:

$x^2+\left(y-2\right)^2+z^2=6$

Chọn A.

Bài 6: Trong không gian với hệ tọa độ $\mathrm{O}xyz,$ cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0.$ Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Ox và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 3.

A. $(P):y-2z=0$

B. $(P):x-2z=0$

C . $(P):y+2z=0$

D. $(P):x+2z=0$

Lời giải

(S) có tâm $I(1;-2;-1)$ và bán kính $R=3.$

(P) chứa trục Ox và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 3 nên (P) chứa Ox và đi qua tâm I của mặt cầu.

Ta có: $\overrightarrow{OI}(1;-2;-1),(P)$ có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\vec{i},\overrightarrow{OI}\right]=(0;-1;-2)$ và (P) qua $O.$

Vậy $(P): y-2z=0.$

Chọn A.

Bài 7: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$ và cắt mặt phẳng $(P): x+2y+z-6=0$ tại điểm M. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm $A,$ biết diện tích tam giác IAM bằng $3\sqrt{3}$ và tâm I có hoành độ âm.

A. $(S):(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=6$

B. $(S):(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=36$

C . $(S):(x+1)^2-y^2-(z-1)^2=6$

D. $(S):(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=6$

Lời giải

Một vec tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}(2;1;-1)$. Một vec tơ pháp tuyến của đường thẳng và mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(1;2;1)$. Gọi δ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P).

Ta có $\sin\delta=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{n}\right)\right|=\frac{|2+2-1|}{\sqrt{6}.\sqrt{6}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\delta=\widehat{IMA}=30^0$

Gọi R bán kính mặt cầu $(S)\Rightarrow IA=R.$ Tam giác IAM vuông tại A có

$\widehat{IMA}=30^0\Rightarrow AM=R\sqrt{3}.S_{IMA}=3\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{1}{2}IA.AM=3\sqrt{3}\Rightarrow R=\sqrt{6}$

Giả sử: $I(1+2t;1+t;-t),t<\frac{1}{2}$

Từ giả thuyết ta có khoảng cách: $d(I,(P))=R\Leftrightarrow\frac{|3t-3|}{\sqrt{6}}\Leftrightarrow t=-1\cup t=3$ (loại) $\Rightarrow I(-1;0;1)$

Phương trình mặt cầu $(S):(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=6.$

Chọn A.

Bài 8: Trong không gian tọa độ Oxyz, viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $A(1;-1;2),B(2;1;-1)$ $C(-1;2;-3)$ biết tâm của mặt cầu nằm trên mặt phẳng $Oxz.$

A. $(S):\left(x+\frac{12}{11}\right)^2+y^2+\left(z-\frac{4}{11}\right)^2=\frac{1326}{121}$

B. $(S):\left(x+\frac{12}{11}\right)^2-y^2-\left(z+\frac{4}{11}\right)^2=\frac{1327}{121}$

C . $(S):\left(x-\frac{12}{11}\right)^2+y^2+\left(z-\frac{4}{11}\right)^2=\frac{1328}{121}$

D. $(S):\left(x-\frac{12}{11}\right)^2-y^2-\left(z-\frac{4}{11}\right)^2=\frac{1329}{121}$

Lời giải

$I\in(\text{Oxz})$ nên $I(x;0;z),IA=IB=IC$ nên: $\begin{cases}(x-1)^2+1+(z-2)^2=(x-2)^2+1+(z+1)^2\\(x-1)^2+1+(z-2)^2=(x+1)^2+4+(z+3)^2\end{cases}$

Giải hệ ta được $x=-\frac{12}{11}; z=-\frac{4}{11} \Rightarrow I\left(-\frac{12}{11};0;-\frac{4}{11}\right)$

Bán kính $R=\sqrt{\frac{1326}{121}}$

Phương trình mặt cầu $(S):\left(x+\frac{12}{11}\right)^2+y^2+\left(z-\frac{4}{11}\right)^2=\frac{1326}{121}$

Chọn A.

Bài 9: Trong không gian $Oxyz$ cho 3 điểm $A(-13;-1;0), B(2;1;-2), C(1;2;2)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-67=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua qua A, song song với BC và tiếp xúc với mặt cầu (S).(S) có tâm $I(1;2;3)$ và có bán kính $R=9$.

A. $(P): -2x+2y-z+28=0$ hoặc $(P): 8x+4y+z-100=0$

B. $(P): -2x+2y+z+28=0$ hoặc $(P): 8x+4y+z+100=0$

C. $(P): -2x+2y-z-28=0$ hoặc $(P): 8x+4y+z+100=0$

D. $(P): -2x+2y-2z+28=0$ hoặc $(P): 8x+4y+z-1000=0$

Lời giải

Giả sử (P) có vtpt $\vec{n}=(A;B;C),(A^2+B^2+C^2\neq 0),(P)//BC$ nên:

$\vec{n}\perp\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC}=(-1;1;4)\Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow A=B+4C\Rightarrow \vec{n}=(B+4C;B;C)$

(P) đi qua $A(13;-1;0)\Rightarrow$ phương trình: $(P):(B+4C)x+By+Cz-12B-52C=0$

(P) tiếp xúc với $(S)\Leftrightarrow d\left[I,(P)\right]=R\Leftrightarrow \frac{|B+4C+2B+3C-12B-52C|}{\sqrt{(B+4C)^2+B^2+C^2}}=9$

$\Leftrightarrow B^2-2BC-8C^2=0\Leftrightarrow (B+2C)(B-4C)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}B+2C=0\\B-4C=0\end{array}\right.$

Với $B+2C=0$ chọn $\begin{cases}B=2\\C=-1\end{cases}$, ta được phương trình: $(P): -2x+2y-z+28=0$

Với $B-4C=0$ chọn $\begin{cases}B=4\\C=1\end{cases}$, ta được phương trình: $(P): 8x+4y+z-100=0$

Chọn A.

Bài 10: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-3=0$, mặt phẳng $(P): x-y+z+1=0$ và hai điểm $A(-1;1;0), B(2;2;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) song song với AB, vuông góc với mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C) có bán kính bằng $\sqrt{3}$.

A. $(\alpha): x-y-2z+1=0$ và mp $(\alpha): x-y-2z-11=0$

B. $(\alpha): x-5y-2z+1=0$ và mp $(\alpha): x-y-2z-11=0$

C. $(\alpha): x-y-2z+1=0$ và mp $(\alpha): x-5y-2z-11=0$

D. $(\alpha): x-5y-2z+1=0$ và mp $(\alpha): x-5y-2z-11=0$

Lời giải

Pt (S) viết dưới dạng $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=9$

Suy ra (S) có tâm $I(2;-1;-1)$, bán kính $R=3$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;1;1)$ một VTPT của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(1;-1;1)$

Do đó $\left[\overrightarrow{AB}.\vec{n}\right]=(2;-2;4)\neq\vec{0}$

Gọi vec tơ là một VTPT của mặt phẳng (α). Ta có:

$\begin{cases}(\alpha)//AB\\(\alpha)\perp(P)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}\\\vec{u}\perp\vec{n}\end{cases}\Rightarrow\vec{u}$ cùng phương với $\left[\overrightarrow{AB}.\vec{n}\right]$.

Chọn $\vec{u}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB}.\vec{n}\right]\Rightarrow\vec{u}=(1;-1;-2)$

Mặt phẳng (α) có một VTPT $\vec{u}$ nên phương trình có dạng $x-y-2z+D=0$

Gọi d là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (α) cắt (S) theo một đường tròn (C) có bán kính $r=\sqrt{3}$.

Nên $d=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{9-3}=\sqrt{6}$

Ta có: $d=\sqrt{6}\Leftrightarrow\frac{|2-(-1)-2(-1)+D|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}\Leftrightarrow|5+D|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D=1\\D=-11\end{array}\right.$

Với $D=1$ thì $(\alpha):x-y-2z+1=0$ không qua $A(-1;1;0)$ (vì $-1-1-2.0+1\neq0$)

Nên $(\alpha)//AB.$ Tương tự, mặt phẳng cũng song song với $AB.$

Vậy có hai mặt phẳng (α) thỏa mãn yêu cầu bài toán có phương trình:

$(\alpha):x-y-2z+1=0$ và mp $(\alpha):x-y-2z-11=0$.

Chọn A.

Bài 11: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;0;0),B(0;2;0)$. Điểm C thuộc trục Ox sao cho tam giác ABC là tam giác đều, viết phương trình mặt cầu (S) có tâm O tiếp xúc với ba cạnh của tam giác ABC.

A. $(S):x^2+y^2+z^2=2$ | **B**. $(S):x^2+y^2+z^2=-2$

C . $(S):x^2+y^2+z^2=\sqrt{2}$ | **D.** $(S):x^2+y^2+z^2=-\sqrt{2}$

Lời giải

Vì $C\in Oz\Rightarrow C(0;0;c)$ và tam giác ABC đều khi và chỉ khi:

$AB=AC=BC\Rightarrow AB^2=AC^2=BC^2\Leftrightarrow2^2+2^2=2^2+c\Rightarrow c=\pm2$

Vậy $C(0;0;2)$ hoặc $C(0;0;-2)$

Lập luận được tứ diện $OABC$ đều vì $OA=OB=OC=2$ và tam giác ABC đều.

Gọi I là trung điểm của AB thì $IO\perp AB$ tại $I\Rightarrow OI=\frac{1}{2}AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{2}$

(Tam giác OAB vuông tại O)

Lập luận được mặt cầu (S) có tâm O tiếp xúc với 3 cạnh của tam giác ABC có bán kính

$R=d(O,AB)=IO=\sqrt{2}$.

Do đó phương trình có mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=2$.

Chọn A.

Bài 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{1}$ và mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-1;-1;-2)$, cắt đường thẳng d và mặt cầu (S) tại hai điểm A,B sao cho $AB=8$.

A. $\Delta:\begin{cases}x=-1+6t\\y=-1+2t\\z=-2+9t\end{cases}$

B. $\Delta:\begin{cases}x=-1-6t\\y=-1-2t\\z=-2+9t\end{cases}$

C . $\Delta:\begin{cases}x=-1+6t\\y=1+2t\\z=2-9t\end{cases}$

D. $\Delta:\begin{cases}x=-2+6t\\y=-3+2t\\z=-2+9t\end{cases}$

Lời giải

Gọi: $M_1=d\cap\Delta\Rightarrow M_1(2-t;1-2t;1+t)\Rightarrow\overrightarrow{MM_1}=(3-t;2-2t;3+t)$

Mặt cầu có tâm $I(-1;2;1)$

Mặt phẳng $(P):\begin{cases}qua\ I(-1;2;1)\\(P)\perp\Delta\end{cases}\Rightarrow(P):\begin{cases}qua\ I(-1;2;1)\\VTPT\ \overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{MM_1}\end{cases}$

$\Rightarrow(P):(3-t)(x+1)+(2-2t)(y-2)+(3+t)(z-1)=0$

Gọi H là trung điểm AB thì $IH\perp AB, IH=3$

Do $IM=3\sqrt{2}\Rightarrow MH=3=d(M,(P))=\dfrac{|3t-15|}{\sqrt{6t^2-8t+22}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=\dfrac{3}{5}\end{array}\right.$

Với $t=-1\Rightarrow\Delta:\begin{cases}x=-1+2t\\y=-1+2t\\z=-2+t\end{cases}$. Với $t=\dfrac{3}{5}\Rightarrow\Delta:\begin{cases}x=-1+6t\\y=-1+2t\\z=-2+9t\end{cases}$.

Chọn A.

Bài 13: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(Q):2x+y+2z+1=0$ tại $M(1;-1;-1)$ và tiếp xúc mặt phẳng $(P):x+2y-2z+8=0$

A. $\left[\begin{array}{l}(c):(x-3)^2+y^2+(z-1)^2=9\\(c):(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=9\end{array}\right.$

B. $\left[\begin{array}{l}(c):(x+3)^2+y^2+(z+1)^2=9\\(c):(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=9\end{array}\right.$

C . $\left[\begin{array}{l}(c):(x-3)^2+y^2+(z-1)^2=9\\(c):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9\end{array}\right.$

D. $\left[\begin{array}{l}(c):(x-3)^2+y^2+(z-1)^2=81\\(c):(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=81\end{array}\right.$

Lời giải

Mặt phẳng (Q) có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;1;2)$. Đường thẳng d đi qua M và vuông góc với (Q) có phương trình là $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=-1+2t\end{cases}$.

Lấy $I(1+2t;-1+t;-1+2t)\in d$

$MI=d(I,(P))\Leftrightarrow\sqrt{4t^2+t^2+4t^2}=\left|\dfrac{1+2t-2+2t+2-4t+8}{\sqrt{1+4+4}}\right|\Leftrightarrow t=\pm$

$t=1\Rightarrow I(3;0;1), R=3\Rightarrow(S):(x-3)^2+y^2+(z-1)^2=9$

$t=-1\Rightarrow I(-1;-2;-3), R=3\Rightarrow(S):(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=9$

Chọn A.