PHẦN CUỐI: BÀI TOÁN VẬN DỤNG (8.9.10)

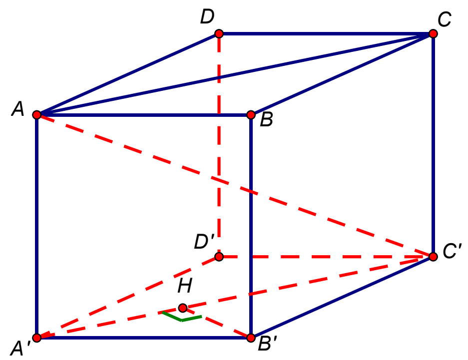
Chủ đề 5. KHỐI ĐA DIỆN

Câu 1: (SGD VĨNH PHÚC) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC'.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Ta có: $A'C' = \sqrt{(A'B')^2 + (B'C')^2} = 2a$. Kẻ $B'H \perp A'C'$.

$$B'H = \frac{A'B'.B'C'}{B'C'} = \frac{a.a\sqrt{3}}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vì $BB'//(ACC'A')$ nên $d(BB', AC') = d(BB', (ACC'A'))$

$$d(BB', (ACC'A')) = B'H = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

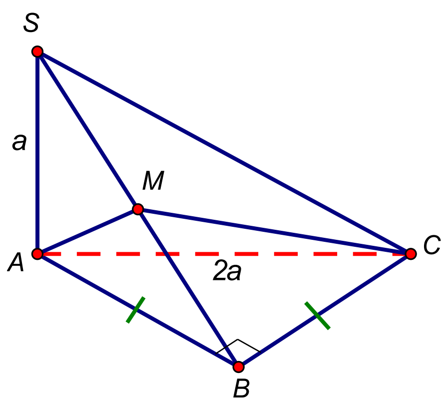
Nên $d(BB', AC') = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 2: (SGD VĨNH PHÚC) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông cân tại B, $AC = 2a$ và $SA = a$. Gọi M là trung điểm cạnh SB. Tính thể tích khối chóp $S.AMC$.

A. $\frac{a^3}{6}$. **B.** $\frac{a^3}{3}$. **C.** $\frac{a^3}{9}$. **D.** $\frac{a^3}{12}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Xét tam giác vuông cân ABC có: $AB = BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = a^2$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{ABC} = \frac{1}{3}.a.a^2 = \frac{a^3}{3}$$

Áp dụng định lí Sim-Son ta có:

$$\frac{V_{SAMC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SM}{SB}.\frac{SC}{SC} = \frac{1}{2}$$

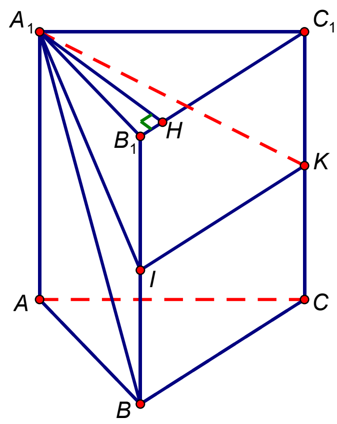
$\Rightarrow V_{S.AMC} = \frac{1}{2}V_{S.ABC} = \frac{a^3}{6}$

Câu 3: (SGD VĨNH PHÚC) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có $AB = a$, $AC = 2a$, $AA_1 = 2a\sqrt{5}$ và $BAC = 120°$. Gọi K, I lần lượt là trung điểm của các cạnh CC_1, BB_1. Tính khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (A_1BK).

A. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. **B.** $a\sqrt{15}$. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{6}$. **D.** $\frac{a\sqrt{15}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Ta có $IK = B_1C_1 = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 120^0} = a\sqrt{7}$

Kẻ $AH \perp B_1C_1$ khi đó AH là đường cao của tứ diện A_1BIK

Vì $A_1H.B_1C_1 = A_1B_1.A_1C_1.\sin 120^0 \Rightarrow A_1H = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

$S_{IKB} = \frac{1}{2}IK.KB = \frac{1}{2}a^2\sqrt{35} \Rightarrow V_{A_1.IBK} = \frac{1}{6}a^3\sqrt{15}(dvtt)$

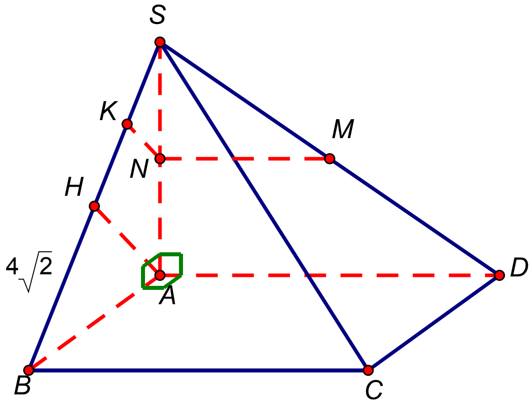
Mặt khác áp dụng định lý Pitago và công thức Hê-rông ta tính đc $S_{\Delta A_1BK} = 3a\sqrt{3}\left(dvdt\right)$

Do đó $d\left(I,\left(A_1BK\right)\right) = \frac{3V_{A_1IBK}}{S_{\Delta A_1BK}} = \frac{a\sqrt{5}}{6}$.

Câu 4: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật. Tam giác SAB vuông cân tại A và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy và $SB = 4\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh SD. Tính khoảng cách l từ điểm M đến mặt phẳng (SBC).

A. $l = 2$ **B.** $l = 2\sqrt{2}$ **C.** $l = \sqrt{2}$ **D.** $l = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải



Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} (SAB)\perp(ABCD),(SAB)\cap(ABCD)=AB \\ SA\perp AB \end{cases} \Rightarrow SA\perp(ABCD)$.

Gọi N,H,K lần lượt là trung điểm các cạnh SA,SB và đoạn SH.

Ta có $\begin{cases} BC\perp SA \\ BC\perp AB \end{cases} \Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AH$.

Mà $AH\perp SB$ ($\triangle ABC$ cân tại A có AH là trung tuyến).

Suy ra $AH\perp(SBC)$, do đó $KN\perp(SBC)$ (vì $KN \parallel AH$, đường trung bình).

Mặt khác $MN \parallel BC \Rightarrow MN \parallel (SBC)$.

Nên $d\left(M,(SBC)\right)=d\left(N,(SBC)\right)=NK=\dfrac{1}{2}AH=2\sqrt{2}$.

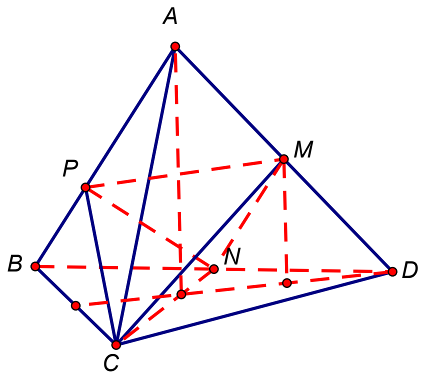
Đáp án: **B.**

Câu 5: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 3. Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh AD,BD. Lấy điểm không đổi P trên cạnh AB (khác A,B). Thể tích khối chóp $PMNC$ bằng

A. $\dfrac{9\sqrt{2}}{16}$ **B.** $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ **C.** $3\sqrt{3}$ **D.** $\dfrac{27\sqrt{2}}{12}$

Hướng dẫn giải

Chọn A



Do $AB \parallel (CMN)$ nên $d\left(P,(CMN)\right)=d\left(\mathrm{A},(CMN)\right)=d\left(\mathrm{D},(CMN)\right)$

Vậy $V_{PCMN}=V_{DPMN}=V_{MCND}=\dfrac{1}{4}V_{ABCD}$

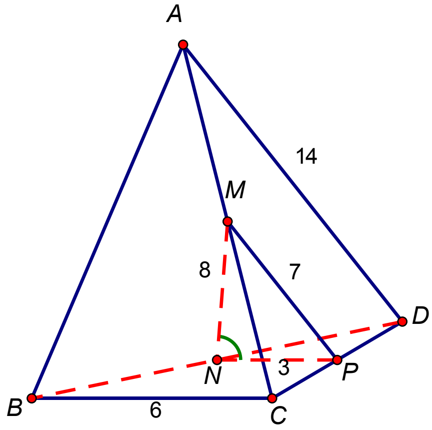
(Do diện tích đáy và chiều cao đều bằng một nửa).

Mặt khác $V_{ABCD} = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{27\sqrt{2}}{12}$ nên $V_{MCND} = \frac{1}{4}.\frac{27\sqrt{2}}{12} = \frac{9\sqrt{2}}{16}$

Câu 6: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Cho tứ diện $ABCD$ có $AD = 14, BC = 6$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BD và $MN = 8$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng BC và MN. Tính $\sin\alpha$.

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

Hướng dẫn giải



Gọi P là trung điểm của cạnh CD, ta có $\alpha = (MN, BC) = (MN, NP)$.

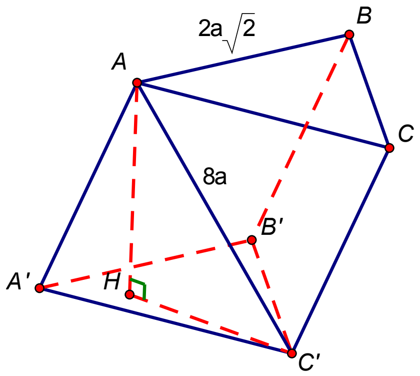
Trong tam giác MNP, ta có $\cos MNP = \frac{MN^2 + PN^2 - MP^2}{2MN.NP} = \frac{1}{2}$. Suy ra $MNP = 60°$.

Suy ra $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 7: (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM) Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là đều cạnh $AB = 2a\sqrt{2}$. Biết $AC' = 8a$ và tạo với mặt đáy một góc 45^0 . Thể tích khối đa diện $ABCC'B'$ bằng

A. $\frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{8a^3\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{16a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{16a^3\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải



Gọi H là hình chiếu của A lên $mp(A'B'C')$

$\Rightarrow HC'A = 45^0$

$\Rightarrow \Delta AHC'$ vuông cân tại H.

$\Rightarrow AH = \frac{AC'}{\sqrt{2}} = \frac{8a}{\sqrt{2}} = 4a\sqrt{2}.$

NX:

$$V_{A.BCC'B'} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3}AH.S_{ABC} = \frac{2}{3}.4a\sqrt{2}.\frac{\left(2a\sqrt{2}\right)^2.\sqrt{3}}{4} = \frac{16a^3\sqrt{6}}{3}.$$

Chọn **D.**

Gọi H là hình chiếu của A lên $mp(A'B'C')$

$\Rightarrow HC'A = 45^0$

$\Rightarrow \Delta AHC'$ vuông cân tại H.

$$\Rightarrow AH = \frac{AC'}{\sqrt{2}} = \frac{8a}{\sqrt{2}} = 4a\sqrt{2}.$$

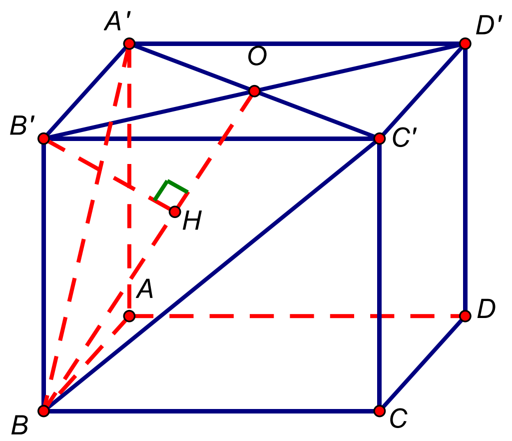
NX: $V_{A.BCC'B'} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2}{3}AH.S_{ABC} = \frac{2}{3}.4a\sqrt{2}.\frac{\left(2a\sqrt{2}\right)^2.\sqrt{3}}{4} = \frac{16a^3\sqrt{6}}{3}.$

Câu 8: (T.T DIỆU HIỀN) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $2a$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Gọi $O = A'C' \cap B'D'$ và từ B' kẽ $B'H \perp BO$

Ta có $CD' // (BA'C')$ nên

$$d(BC';CD') = d(D';(BA'C')) = d(B';(BA'C')) = B'H = \frac{BB'.B'O}{BO} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

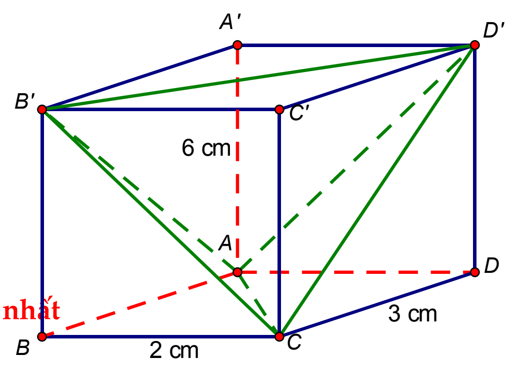
Câu 9: (T.T DIỆU HIỀN) Một hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước là $2cm$, $3cm$ và $6cm$. Thể tích của khối tứ diện $A.CB'D'$ bằng

A. $8\ cm^3$. **B.** $12\ cm^3$. **C.** $6\ cm^3$. **D.** $4\ cm^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có :



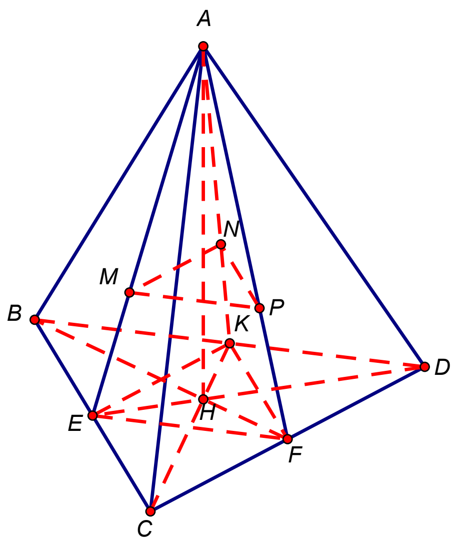
$$V_{ABCD.A'B'C'D'}=V_{B.AB'C}+V_{D.ACD'}+V_{A'.B'AD'}+V_{C.B'C'D'}+V_{A.CB'D'}$$
$$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'}=4V_{B.AB'C}+V_{A.CB'D'}$$
$$\Rightarrow V_{A.CB'D'}=V_{ABCD.A'B'C'D'}-4V_{B.AB'C}$$
$$\Rightarrow V_{A.CB'D'}=V_{ABCD.A'B'C'D'}-4.\frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'}$$
$$\Rightarrow V_{A.CB'D'}=\frac{1}{3}V_{ABCD.A'B'C'D'}=\frac{1}{3}.2.3.6=12\,cm^3$$

Câu 10: (LẠNG GIANG SỐ 1) Cho khối tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng $2cm$. Gọi M,N,P lần lượt là trọng tâm của ba tam giác ABC, ABD, ACD. Tính thể tích V của khối chóp $AMNP$.

A. $V=\frac{\sqrt{2}}{162}cm^3$. **B.** $V=\frac{2\sqrt{2}}{81}cm^3$. **C.** $V=\frac{4\sqrt{2}}{81}cm^3$. **D.** $V=\frac{\sqrt{2}}{144}cm^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Tam giác BCD đều $\Rightarrow DE=\sqrt{3}\Rightarrow DH=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$AH=\sqrt{AD^2-DH^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$S_{\Delta EFK}=\frac{1}{2}.d_{(E,FK)}.FK=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}d_{(D,BC)}.\frac{1}{2}BC=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow V_{SKFE}=\frac{1}{3}AH.S_{\Delta EFK}=\frac{1}{3}.\frac{2\sqrt{6}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Mà $\frac{AM}{AE}=\frac{AN}{AK}=\frac{AP}{AF}=\frac{2}{3}$

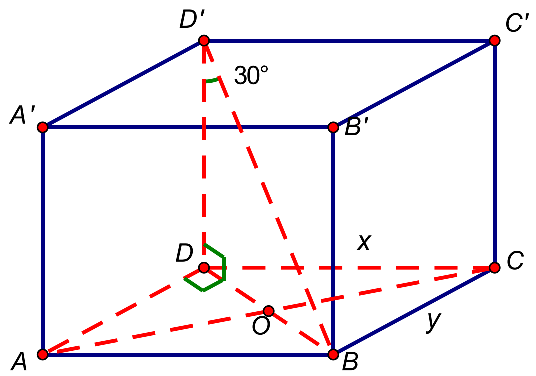
Lại có: $\frac{V_{AMNP}}{V_{AEKF}}=\frac{AM}{AE}.\frac{AN}{AK}.\frac{AP}{AF}=\frac{8}{27}\Rightarrow V_{AMNP}=\frac{8}{27}V_{AEKF}=\frac{4\sqrt{2}}{81}$.

Câu 11: (LÝ TỰ TRỌNG – TPHCM) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $BCD=60°, AC=a\sqrt{7}, BD=a\sqrt{3}, AB>AD$, đường chéo BD' hợp với mặt phẳng $(ADD'A')$ góc $30°$. Tính thể tích V của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $\sqrt{39}a^3$. **B.** $\frac{\sqrt{39}}{3}a^3$. **C.** $2\sqrt{3}a^3$. **D.** $3\sqrt{3}a^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn **D.**



- Đặt $x = CD; \mathrm{y} = BC \quad (x > y)$
- Áp dụng định lý hàm cos và phân giác trong tam giác BCD

$$3a^2 = x^2 + y^2 - xy \text{ và } x^2 + y^2 = 5a^2$$

$$\Rightarrow x = 2a; \quad y = a$$

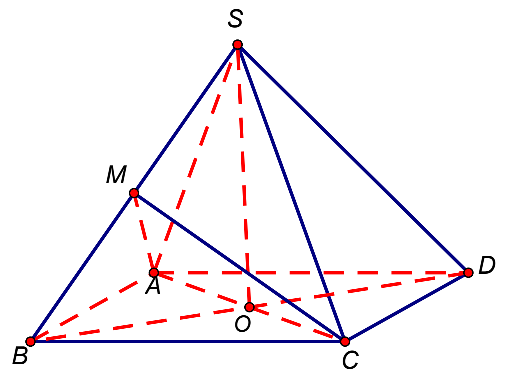
- Với $x = 2y = 2a$ và $C = 60$ $\rightarrow BD \perp AD$ $\rightarrow BD';(\mathrm{ADD'A'}) = 30 \rightarrow DD' = 3a$
- $S_{ABCD} = xy.\sin 60 = \mathrm{a}^2\sqrt{3}$
- Vậy V hình hộp = $a^3 3\sqrt{3}$

Câu 12: (NGÔ GIA TỰ - VP) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có thể tích $V = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$. Gọi M là trung điểm của cạnh SD. Nếu $SB \perp SD$ thì khoảng cách từ B đến mặt phẳng (MAC) bằng:

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Giả sử hình chóp có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Khi đó, $BD = a\sqrt{2}$.

Tam giác SBD vuông cân tại S nên $SD = SB = a$ và $SO = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra các tam giác SCD, SAD là các tam giác đều cạnh a và $SD \perp (MAC)$ tại M.

Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}.SO.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Mà $\frac{a^3\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{6} \Rightarrow a = 1$

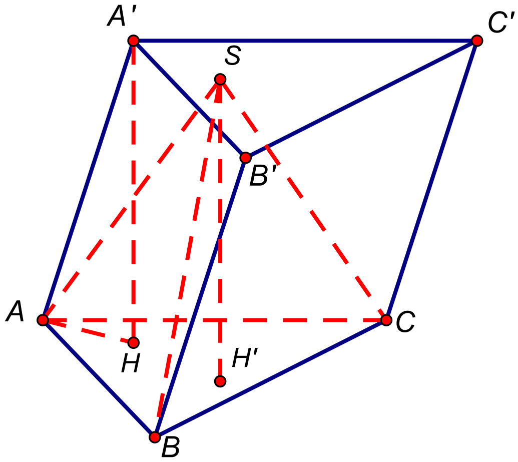
Vì O là trung điểm BD nên $d\left(B,(MAC)\right) = d\left(D,(MAC)\right) = DM = \frac{1}{2}$.

Câu 13: (THTT – 477) Một hình lăng trụ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh bên bằng b và tạo với mặt phẳng đáy một góc α. Thể tích của khối chóp có đáy là đáy của lăng trụ và đỉnh là một điểm bất kì trên đáy còn lại là

A. $\frac{\sqrt{3}}{12}a^2b\sin\alpha.$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2b\sin\alpha.$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{12}a^2b\cos\alpha.$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2b\cos\alpha.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Gọi H là hình chiếu của A' trên (ABC). Khi đó $\alpha = \widehat{A'AH}$.

Ta có $A'H = A'A.\sin\alpha = b\sin\alpha$ nên thể tích khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{\Delta ABC} = \frac{a^2b\sqrt{3}\sin\alpha}{4}$.

Lại có chiều cao của chóp theo yêu cầu đề bài chính là chiều cao của lăng trụ và bằng $A'H$ nên thể tích khối chóp là $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^2b\sqrt{3}\sin\alpha}{12}$.

Câu 14: (THTT – 477) Các đường chéo của các mặt của một hình hộp chữ nhật bằng $a,\ b,\ c$. Thể tích của khối hộp đó là

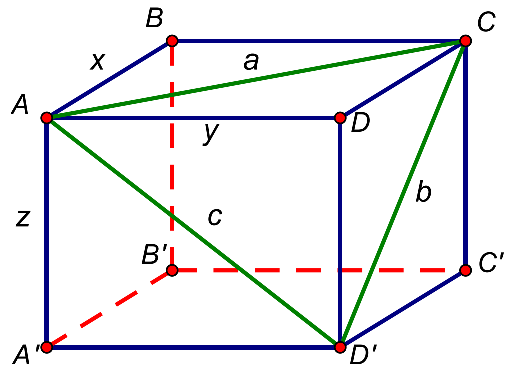
A. $V = \sqrt{\frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{8}}.$

B. $V = \frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{8}.$

C. $V = abc.$

D. $V = a + b + c$.

Hướng dẫn giải



Chọn A.

Giả sử hình hộp chữ nhật có ba kích thước: x, y, z.

Theo yêu cầu bài toán ta có $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ y^2+z^2=c^2 \\ x^2+z^2=b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=a^2-x^2 \\ y^2+z^2=c^2 \\ z^2=b^2-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=a^2-x^2 \\ a^2-x^2+b^2-x^2=c^2 \\ z^2=b^2-x^2 \end{cases}$

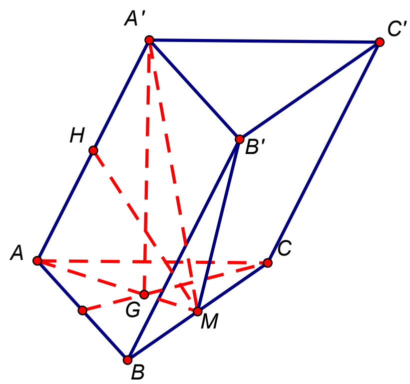
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2=\dfrac{a^2-b^2+c^2}{2} \\ x^2=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2} \\ z^2=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2} \end{cases} \Rightarrow V=\sqrt{\frac{\left(a^2+c^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)}{8}}$$

Câu 15: (SỞ GD HÀ NỘI) Cho hình lăng trụ $ABCA'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABCA'B'C'$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



M là trung điểm của BC thì $BC \perp \left(AA'M\right)$.

Gọi MH là đường cao của tam giác $A'AM$ thì $MH \perp A'A$ và $HM \perp BC$ nên HM là khoảng cách

AA' và BC.

Ta có $A'A.HM = A'G.AM \Leftrightarrow \dfrac{a\sqrt{3}}{4}.A'A = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{A'A^2 - \dfrac{a^2}{3}}$

$\Leftrightarrow A'A^2 = 4\left(A'A^2 - \dfrac{a^2}{3}\right) \Leftrightarrow 3A'A^2 = \dfrac{4a^2}{3} \Leftrightarrow A'A^2 = \dfrac{4a^2}{9} \Leftrightarrow A'A = \dfrac{2a}{3}$.

Đường cao của lăng trụ là $A'G = \sqrt{\dfrac{4a^2}{9} - \dfrac{3a^2}{9}} = \dfrac{a}{3}$.

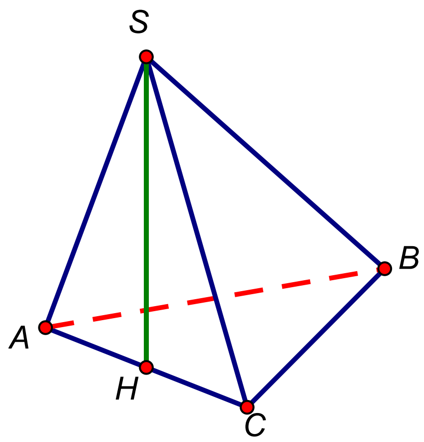
Thể tích $V_{LT} = \dfrac{a}{3}.\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 16: (SỞ GD HÀ NỘI) Cho hình chóp $S.ABC$ có $ASB = CSB = 60^0$, $ASC = 90^0$, $SA = SB = SC = a$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

A. $d = 2a\sqrt{6}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $d = a\sqrt{6}$. **D.** $d = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



+ Ta có: ΔSAB, ΔSBC là các đều cạnh a nên $AB = BC = a$

+ Ta có: ΔSAC vuông cân tại S nên $AC = a\sqrt{2}$

+ Ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2$ nên ΔABC vuông tại B có $S_{ABC} = \dfrac{a^2}{2}$

+ Gọi H là trung điểm của AC. Ta có: $HA = HB = HC$ và $SA = SB = SC$ nên $SH \perp (ABC)$ và $SH = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

+ Vậy $d\left[A;(SBC)\right]=\dfrac{3V_{S.ABC}}{S_{SBC}}=\dfrac{SH.S_{ABC}}{S_{SBC}}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{a^2}{2}}{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Câu 17: (CHUYÊN HÙNG VƯƠNG – GL) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng $2a\sqrt{3}$, góc BAD bằng 120^0. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc gữa mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 45^0. Tính khoảng cách h từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $h=2a\sqrt{2}$. **B.** $h=\dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $h=\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $h=a\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi H là chân đường cao hạ từ A của tam giác ABC.

Xét tam giác ABH :

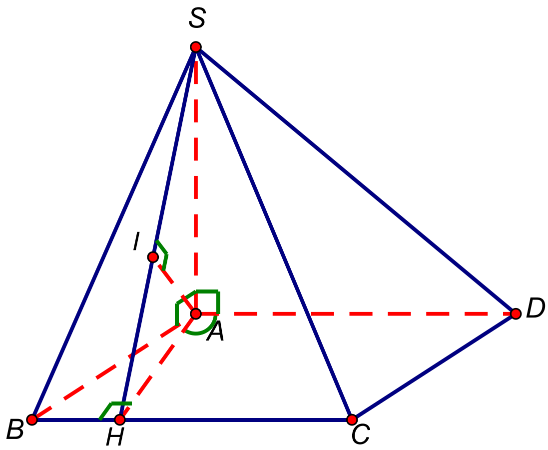
$\sin\angle B=\dfrac{AH}{AB}\Rightarrow AH=2a\sqrt{3}.\sin 60^0=3a.$

$\cos\angle B=\dfrac{BH}{AB}\Rightarrow BH=2a\sqrt{3}.\cos 60^0=a\sqrt{3}.$

Xét tam giác SAH vuông tại A:

$\tan\angle SHA=\dfrac{SA}{AH}\Rightarrow SA=3a\tan 45^0=3a.$

Trong tam giác SAH vuông tại A, kẻ $AI\perp SH$ tại I. Ta có $AI\perp(SBC)$ nên AI là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).



Xét tam giác SAH, ta có: $\dfrac{1}{AI^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{(3a)^2}+\dfrac{1}{(3a)^2}=\dfrac{2}{9a^2}.$

$\Rightarrow d\left(A,(SBC)\right)=AI=\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}.$

Câu 18: (CHUYÊN LƯƠNG VĂN CHÁNH) Khi chiều cao của một hình chóp đều tăng lên n lần nhưng mỗi cạnh đáy giảm đi n lần thì thể tích của nó.

A. Không thay đổi. **B.** Tăng lên n lần. **C.** Tăng lên $n-1$ lần. **D.** Giảm đi n lần.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $V=\dfrac{1}{3}.h.S$, với h là chiều cao, S là diện tích đáy

$S=\dfrac{x^2a}{4\tan\left(\dfrac{180^0}{a}\right)}$ với x là độ dài cạnh của đa giác đều, a là số đỉnh của đa giác đều.

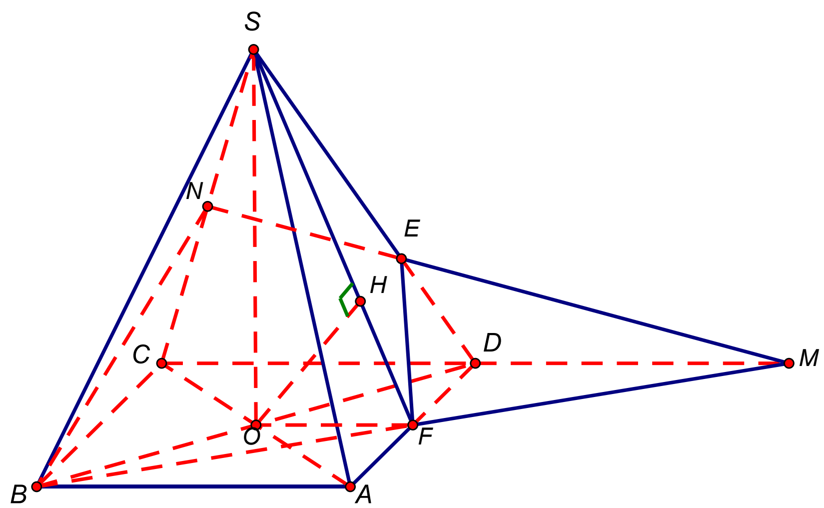
Ycbt $\Leftrightarrow V_1 = \frac{1}{3}.nh.\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2 a}{4\tan\left(\frac{180^0}{a}\right)} = \frac{1}{n}.\frac{1}{3}.h.S = \frac{1}{n}.V$.

Câu 19: (BIÊN HÒA – HÀ NAM) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên hợp với đáy một góc $60°$. Gọi M là điểm đối xứng của C qua D, N là trung điểm SC. Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần. Tỉ số thể tích giữa hai phần (phần lớn trên phần bé) bằng:

A. $\frac{7}{5}$. **B.** $\frac{1}{7}$. **C.** $\frac{7}{3}$. **D.** $\frac{6}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Giả sử các điểm như hình vẽ.

$E = SD \cap MN \Rightarrow E$ là trọng tâm tam giác SCM , $DF // BC \Rightarrow F$ là trung điểm BM .

Ta có: $\left(SD,(ABCD)\right) = SDO = 60° \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $SF = \sqrt{SO^2 + OF^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

$\Rightarrow d\left(O,(SAD)\right) = OH = h = \frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{7}}; S_{SAD} = \frac{1}{2}SF.AD = \frac{a^2\sqrt{7}}{4}$

$\frac{V_{MEFD}}{V_{MNBC}} = \frac{ME}{MN}\cdot\frac{MF}{MB}\cdot\frac{MD}{MC} = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow V_{BFDCNE} = \frac{5}{6}V_{MNBC} = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot d\left(M,(SAD)\right)\cdot\frac{1}{2}S_{SBC} = \frac{5}{18}\cdot 4h\cdot\frac{1}{2}S_{SAD} = \frac{5a^3\sqrt{6}}{72}$

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6} \Rightarrow V_{SABFEN} = V_{S.ABCD} - V_{BFDCNE} = \frac{7a^3\sqrt{6}}{36}$.

Suy ra: $\frac{V_{SABFEN}}{V_{BFDCNE}} = \frac{7}{5}$.

Câu 20: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có tổng diện tích của tất cả các mặt là 36, độ dài đường chéo AC' bằng 6. Hỏi thể tích của khối hộp lớn nhất là bao nhiêu?

A. 8. **B.** $8\sqrt{2}$. **C.** $16\sqrt{2}$. **D.** $24\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi chiều dài 3 cạnh của hình hộp chữ nhật lần lượt là: a, b, $c>0$

Ta có $AC'^2=a^2+b^2+c^2=36; S=2ab+2bc+2ca=36 \Rightarrow (a+b+c)^2=72 \Rightarrow a+b+c=6\sqrt{2}$

$\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}\Rightarrow abc\le\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\left(\frac{6\sqrt{2}}{3}\right)^3=16\sqrt{2}$. Vậy $V_{Max}=16\sqrt{2}$

Câu 21: (CHUYÊN ĐHSP HN) Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy cạnh bằng a, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Gọi A', B', C' tương ứng là các điểm đối xứng của A, B, C qua S. Thể tích của khối bát diện có các mặt ABC, $A'B'C'$, $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$, $AB'C'$, $BA'C'$, $CA'B'$ là

A. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **B.** $2\sqrt{3}a^3$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Chọn A.

Cách 1: Ta tính thể tích khối chóp $S.ABC$:

Gọi H là tâm tam giác ABC đều cạnh a $\Rightarrow CH=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng *(ABC)* bằng 60^0 $\Rightarrow SCH=60^o\Rightarrow SH=a\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.SH.S_{ABC}=\frac{1}{3}a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

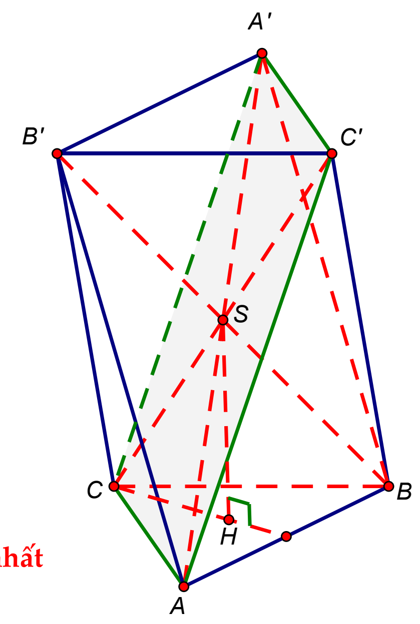
$V=2V_{B.ACA'C'}=2.4V_{B.ACS}=8V_{S.ABC}=\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Cách 2: Ta có thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Diện tích tam giác SBC là: $S_{\Delta SBC}=\frac{a^2\sqrt{39}}{12}$.

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là: $d(A,(SBC))=\frac{3a}{\sqrt{13}}$.

Tứ giác $BCB'C'$ là hình chữ nhật vì có hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.



Có $SB=\frac{2a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow BB'=\frac{2a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow B'C=\frac{a\sqrt{39}}{3}$.

Diện tích $BCB'C'$ là: $S_{BCB'C'}=\frac{a^2\sqrt{39}}{3}$.

Thể tích khối 8 mặt cần tìm là:

$$V=2.\frac{1}{3}d\left(A,(SBC)\right).S_{BCB'C'}=\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}.$$

Cách 3 (Tham khảo lời giải của Ngọc HuyềnLB).

Thể tích khối bát diện đã cho là $V=2V_{A'B'C'BC}=2.4V_{A'.SBC}=8V_{S.ABC}=8.\frac{1}{3}SG.S_{ABC}$

Ta có: $\left(SA;(ABC)\right)=SAG=60^0$. Xét ΔSGA vuông tại G: $\tan SAG=\frac{SG}{AG}\Leftrightarrow SG=AG.\tan SAG=a.$

Vậy $V=8.\frac{1}{3}SG.S_{ABC}=8.\frac{1}{3}.a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}.$

Câu 22: (CHUYÊN THÁI BÌNH) Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA=a$, $SB=a\sqrt{2}$, $SC=a\sqrt{3}$. Thể tích lớn nhất của khối chóp là

A. $a^3\sqrt{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Chọn D.

Gọi H là hình chiếu của A lên $(SBC)\Rightarrow V=\frac{1}{3}AH.S_{SBC}$.

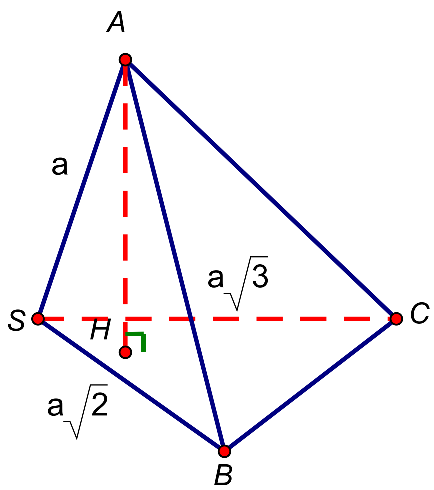
Ta có $AH\le SA$; dấu "=" xảy ra khi $AS\perp(SBC)$.

$S_{SBC}=\frac{1}{2}SB.SC.\sin SBC\le\frac{1}{2}SB.SC$, dấu "=" xảy ra khi $SB\perp SC$.

Khi đó, $V=\frac{1}{3}AH.S_{SBC}\le\frac{1}{3}AS\cdot\frac{1}{2}SB\cdot SC=\frac{1}{6}SA\cdot SB\cdot SC$.

Dấu "=" xảy ra khi SA,SB,SC đôi một vuông góc với nhau.

Suy ra thể tích lớn nhất của khối chóp là $V=\frac{1}{6}SA.SB.SC=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.



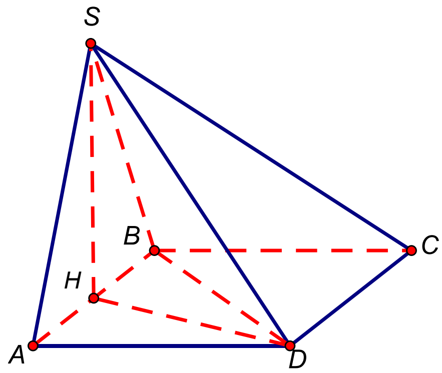
Câu 23: (CHUYÊN THÁI BÌNH) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SD=\frac{a\sqrt{17}}{2}$, hình chiếu vuông góc H của S lên mặt $(ABCD)$ là trung điểm của đoạn AB. Tính chiều cao của khối chóp $H.SBD$ theo a.

A. $\frac{\sqrt{3}a}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{5}$. **D.** $\frac{3a}{5}$.

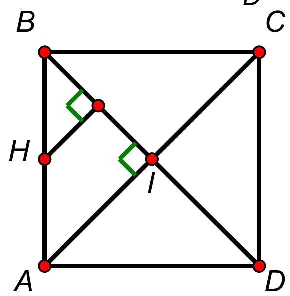
Chọn A.

Ta có ΔSHD vuông tại H

$$\Rightarrow SH=\sqrt{SD^2-HD^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{17}}{2}\right)^2-\left(a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)}=a\sqrt{3}.$$



Cách 1. Ta có $d(H,BD)=\frac{1}{2}d(A,BD)=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.



Chiều cao của chóp $H.SBD$ là

$$d(H,(SBD))=\frac{SH.d(H,BD)}{\sqrt{SH^2+\left[d(H,BD)\right]^2}}=$$

$$\frac{a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{3a^2+\frac{a^2}{8}}}=\frac{a^2\sqrt{6}.2\sqrt{2}}{4.5a}=\frac{a\sqrt{3}}{5}.$$

Cách 2. $S.ABCD=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{\sqrt{3}}{3}a^3 \Rightarrow V_{H.SBD}=\frac{1}{2}V_{A.SBD}=\frac{1}{2}V_{S.ABC}=\frac{1}{4}V_{S.ABCD}=\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$.

Tam giác ΔSHB vuông tại $H \Rightarrow SB=\sqrt{SH^2+HB^2}=\sqrt{3a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{13}}{2}$.

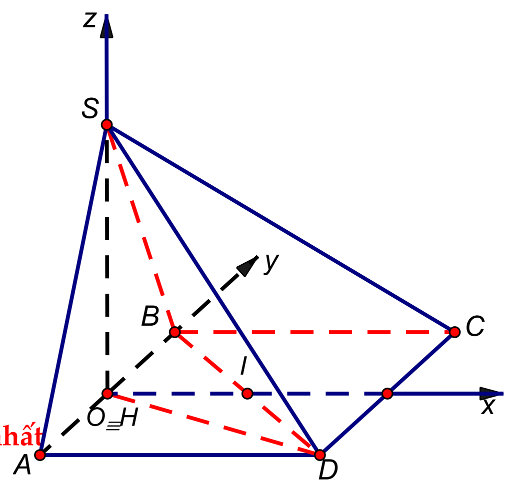
Tam giác ΔSBD có $SB=\frac{a\sqrt{13}}{2};BD=a\sqrt{2};SD=\frac{a\sqrt{17}}{2} \Rightarrow S_{\Delta SBD}=\frac{5a^2}{4}$.

$$\Rightarrow d(H,(SBD))=\frac{3V_{S.HBD}}{S_{\Delta SBD}}=\frac{a\sqrt{3}}{5}.$$

Cách 3. Gọi I là trung điểm BD. Chọn hệ trục $Oxyz$ với $O\equiv H$; $Ox\equiv HI$; $Oy\equiv HB$; $Oz\equiv HS$.

Ta có $H(0;0;0)$; $B\left(0;\frac{a}{2};0\right)$; $S\left(0;0;a\sqrt{3}\right)$; $I\left(\frac{a}{2};0;0\right)$

Vì $(SBD)\equiv(SBI)$



$$\Rightarrow (SBD):\frac{2x}{a}+\frac{2y}{a}+\frac{z}{a\sqrt{3}}=1 \Leftrightarrow 2x+2y+\frac{\sqrt{3}}{3}z-a=0.$$

Suy ra $d\left(H,(SBD)\right)=\dfrac{\left|2.0+2.0+\dfrac{\sqrt{3}}{3}.0-a\right|}{\sqrt{4+4+\dfrac{1}{3}}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{5}.$

Câu 24: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng a^3. Mặt bên SAB là tam giác đều cạnh a và đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tính theo a khoảng cách giữa SA và CD.

A. $2\sqrt{3}a$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Vì đáy $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow V_{SABD}=V_{SBCD}=\dfrac{1}{2}V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3}{2}$.

Ta có:

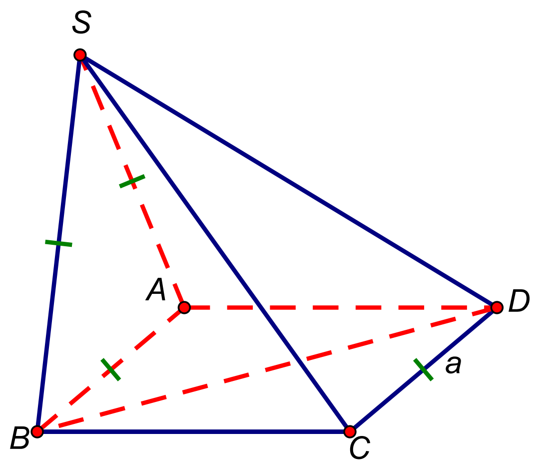
Vì tam giác SAB đều cạnh a

$$\Rightarrow S_{SAB}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Vì $CD \parallel AB \Rightarrow CD \parallel (SAB)$ nên

$$d(CD,SA)=d\left(CD,(SAB)\right)=d\left(D,(SAB)\right)$$

$$=\frac{3V_{SABD}}{S_{SBD}}=\frac{3.\dfrac{a^3}{2}}{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}=2\sqrt{3}a.$$



Câu 25: (LÝ TỰ TRỌNG – TPHCM) Tìm $V_{\max}$ là giá trị lớn nhất của thể tích các khối hộp chữ nhật có đường chéo bằng $3\sqrt{2}cm$ và diện tích toàn phần bằng $18cm^2$.

A. $V_{\max}=6cm^3$. **B.** $V_{\max}=5cm^3$.

C. $V_{\max}=4cm^3$. **D.** $V_{\max}=3cm^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn **C.**

Đặt a,b,c là kích thước của hình hộp thì ta có hệ $\begin{cases} a^2+b^2+c^2=18 \\ ab+bc+ac=9 \end{cases}$.

Suy ra $a+b+c=6$. Cần tìm GTLN của $V=abc$.

Ta có $b+c=6-a \Rightarrow bc=9-a(b+c)=9-a(6-a)$.

Do $(b+c)^2 \ge 4bc \Rightarrow (6-a)^2 \ge 4\left[9-a(6-a)\right] \Leftrightarrow 0<a\le 4.$

Tương tự $0 < b, c \leq 4$.

Ta lại có $V = a\left[9 - a(6 - a)\right]$. Khảo sát hàm số này tìm được GTLN của V là 4.

Câu 26: (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. $SA = SB = SC = a$, Cạnh SD thay đổi. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $\frac{a^3}{8}$. **B.** $\frac{a^3}{4}$. **C.** $\frac{3a^3}{8}$. **D.** $\frac{a^3}{2}$.

Hướng dẫn giải

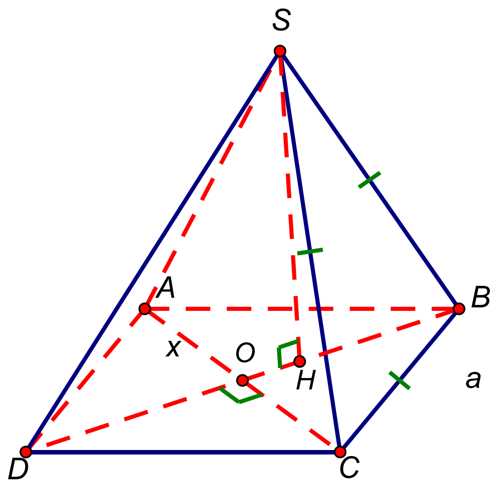
Chọn D.

Khi SD thay đổi thi AC thay đổi. Đặt $AC = x$.

Gọi $O = AC \cap BD$.

Vì $SA = SB = SC$ nên chân đường cao SH trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

$\Rightarrow H \in BO$.



Ta có $OB = \sqrt{a^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4a^2 - x^2}{4}} = \frac{\sqrt{4a^2 - x^2}}{2}$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}OB.AC = \frac{1}{2}x.\frac{\sqrt{4a^2 - x^2}}{2} = \frac{x\sqrt{4a^2 - x^2}}{4}$$

$$HB = R = \frac{a.a.x}{4S_{ABC}} = \frac{a^2x}{4.\frac{x\sqrt{4a^2 - x^2}}{4}} = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - x^2}}.$$

$$SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^4}{4a^2 - x^2}} = \frac{a\sqrt{3a^2 - x^2}}{\sqrt{4a^2 - x^2}}$$

$$V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABC} = 2.\frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3a^2 - x^2}}{\sqrt{4a^2 - x^2}}.\frac{x\sqrt{4a^2 - x^2}}{4}$$

$$= \frac{1}{3}a\left(x.\sqrt{3a^2 - x^2}\right) \leq \frac{1}{3}a\left(\frac{x^2 + 3a^2 - x^2}{2}\right) = \frac{a^3}{2}$$

Câu 27: (THTT – 477) Cho khối đa diện đều n mặt có thể tích V và diện tích mỗi mặt của nó bằng S. Khi đó, tổng các khoảng cách từ một điểm bất kì bên trong khối đa diện đó đến các mặt của nó bằng

A. $\frac{nV}{S}$. **B.** $\frac{V}{nS}$.

C. $\frac{3V}{S}$. **D.** $\frac{V}{3S}$.

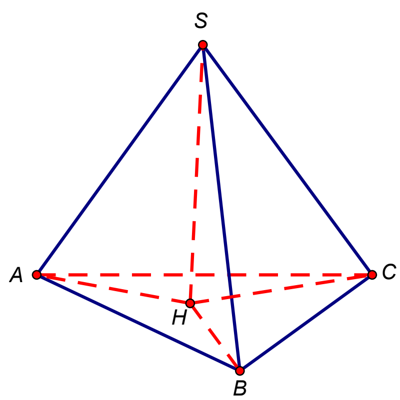
Hướng dẫn giải

Chọn C.

Xét trong trường hợp khối tứ diện đều.

Các trường hợp khác hoàn toàn tương tự.

$$V_{H.ABC} = \frac{1}{3}h_1.S;\ V_{H.SBC} = \frac{1}{3}h_2.S;\ V_{H.SAB} = \frac{1}{3}h_3.S;\ V_{H.SAC} = \frac{1}{3}h_4.S$$



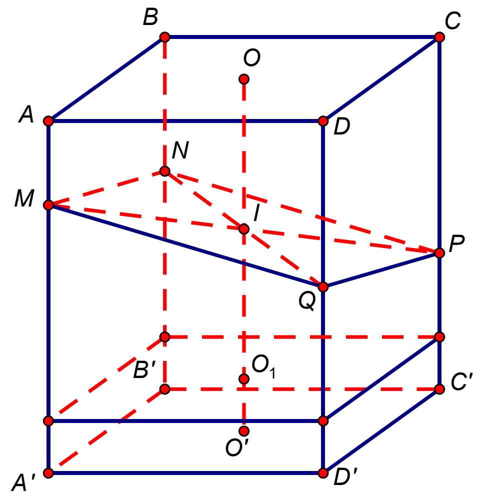
$h_1 = \frac{3V_1}{S}; h_2 = \frac{3V_2}{S}; h_3 = \frac{3V_3}{S}; h_4 = \frac{3V_4}{S}$

$\Rightarrow h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = \frac{3(V_1 + V_2 + V_3 + V_4)}{S} = \frac{3V}{S}$

Câu 28: (LƯƠNG ĐẮC BẰNG) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a, một mặt phẳng (α) cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P, Q. Biết $AM = \frac{1}{3}a$, $CP = \frac{2}{5}a$. Thể tích khối đa diện $ABCD.MNPQ$ là:

A. $\frac{11}{30}a^3$. **B.** $\frac{a^3}{3}$. **C.** $\frac{2a^3}{3}$. **D.** $\frac{11}{15}a^3$.

HD: Tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành có tâm là I thuộc đoạn OO'.



Ta có: $OI = \frac{AM + CP}{2} = \frac{11}{30}a < \frac{a}{2}$

Gọi O_1 là điểm đối xứng O qua I thì :

$OO_1 = 2OI = \frac{11}{15}a < a$. Vậy O_1 nằm trong đoạn OO'.

Vẽ mặt phẳng qua O_1 song song với (ABCD) cắt các cạnh *AA'; BB';CC'; DD'* lần lượt tại *A_1, B_1, C_1, D_1*. Khi đó I là tâm của hình hộp *ABCD.A $B_1C_1D_1$*.

Vậy V(ABCD. MNPQ)=V(MNPQ.A_1 $B_1C_1D_1$)

$= \frac{1}{2}V(ABCD.A_1B_1C_1D_1) = \frac{1}{2}a^2OO_1 = \frac{11}{30}a^3$

Câu 29: (CHUYÊN VĨNH PHÚC) Người ta gọt một khối lập phương gỗ để lấy khối tám mặt đều nội tiếp nó (tức là khối có các đỉnh là các tâm của các mặt khối lập phương). Biết các cạnh của khối lập phương bằng a. Hãy tính thể tích của khối tám mặt đều đó:

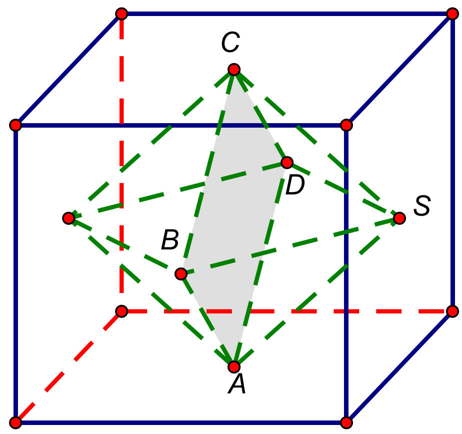
A. $\frac{a^3}{4}$ **B.** $\frac{a^3}{6}$ **C.** $\frac{a^3}{12}$ **D.** $\frac{a^3}{8}$

Đáp án B

Dựng được hình như hình bên

+ Thấy được thể tích khối cần tính bằng 2 lần thể tích của hình chóp S.ABCD

+ Nhiệm vụ bây giờ đi tìm thể tích của S.ABCD



+ ABCD là hình vuông có tâm O đồng thời chính là hình chiếu của S lên mặt đáy

$SO=\frac{a}{2}$; $BD=$ cạnh của hình lập phương $=a$. Suy ra các cạnh của hình vuông $ABCD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)a^3=\frac{a^3}{12}$. $V_{\text{khối đa diện}}=2.V_{S.ABCD}=\frac{a^3}{6}$.

Câu 30: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm tam giác BCD. Tính thể tích V của khối chóp $A.GBC$.

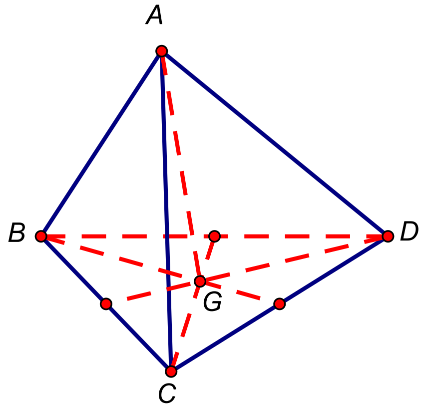
A. $V=3$. **B.** $V=4$. **C.** $V=6$. **D.** $V=5$.

Chọn B.

- ***Cách 1:***

Phân tích: tứ diện $ABCD$ và khối chóp $A.GBC$ có cùng đường cao là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD). Do G là trọng tâm tam giác BCD nên ta có $S_{\Delta BGC}=S_{\Delta BGD}=S_{\Delta CGD}\Rightarrow S_{\Delta BCD}=3S_{\Delta BGC}$ (xem phần chứng minh).

Áp dụng công thức thể tích hình chóp ta có:

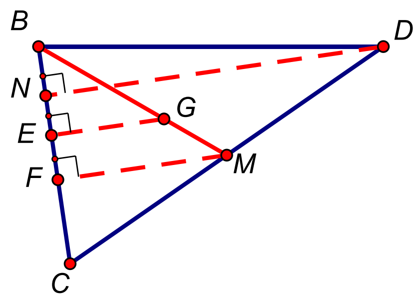


$$\left.\begin{array}{l}V_{ABCD}=\frac{1}{3}h.S_{\Delta BCD}\\ V_{A.GBC}=\frac{1}{3}h.S_{\Delta GBC}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{V_{ABCD}}{V_{A.GBC}}=\frac{\frac{1}{3}h.S_{\Delta BCD}}{\frac{1}{3}h.S_{\Delta GBC}}=\frac{S_{\Delta BCD}}{S_{\Delta GBC}}=3$$

$$\Rightarrow V_{A.GBC}=\frac{1}{3}V_{ABCD}=\frac{1}{3}.12=4.$$

Chứng minh: Đặt $DN=h; BC=a$.

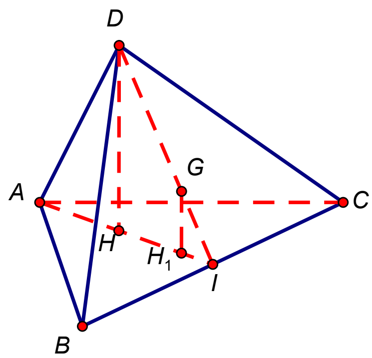
Từ hình vẽ có:



$$+)\ MF//ND\Rightarrow\frac{MF}{DN}=\frac{CM}{CD}=\frac{1}{2}\Rightarrow MF=\frac{1}{2}DN\Rightarrow MF=\frac{h}{2}.$$

$$+)\ GE//MF\Rightarrow\frac{GE}{MF}=\frac{BG}{BM}=\frac{2}{3}\Rightarrow GE=\frac{2}{3}MF=\frac{2}{3}.\frac{h}{2}=\frac{h}{3}$$

$$+)\ \frac{S_{\Delta BCD}}{S_{\Delta GBC}}=\frac{\frac{1}{2}DN.BC}{\frac{1}{2}GE.BC}=\frac{\frac{1}{2}ha}{\frac{1}{2}\frac{h}{3}a}=3\Rightarrow S_{\Delta BCD}=3S_{\Delta GBC}$$



+) Chứng minh tương tự có $S_{\Delta BCD}=3S_{\Delta GBD}=3S_{\Delta GCD}$

$$\Rightarrow S_{\Delta BGC}=S_{\Delta BGD}=S_{\Delta CGD}\ .$$

- ***Cách 2:***

☑ $\dfrac{d\left(G;\left(ABC\right)\right)}{d\left(D;\left(ABC\right)\right)}=\dfrac{GI}{DI}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow d\left(G;\left(ABC\right)\right)=\dfrac{1}{3}d\left(D;\left(ABC\right)\right)$.

Nên $V_{G.ABC}=\dfrac{1}{3}d\left(G;\left(ABC\right)\right).S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3}.V_{DABC}=4$.

Câu 31: Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 4, diện tích đáy bằng diện tích của mặt cầu có bán kính bằng 1. Tính thể tích V khối trụ đó.

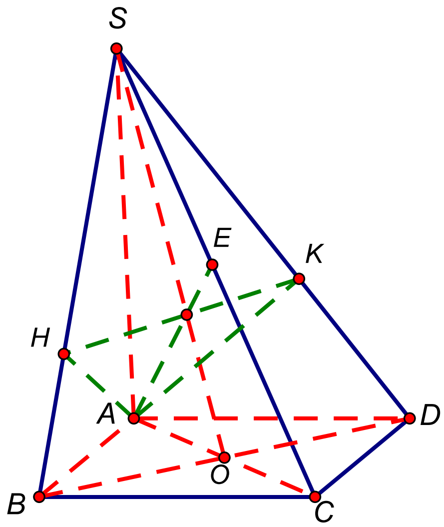
A. $V = 4$. **B.** $V = 6$. **C.** $V = 8$. **D.** $V = 10$.

Đáp án B

B, D nhìn AC dưới một góc $90°$.

$SD = a\sqrt{5}; KD = \dfrac{AD^2}{SD} = \dfrac{a^2}{a\sqrt{5}} = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$; $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{6}$

Ta có: $\dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{AK^2}$ Þ $AK = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}\left(1\right)$



$SC^2 = SD^2 + CD^2$ Þ tam giác SCD vuông tại D.

Khi đó tam giác KDC vuông tại D.

Þ $KC = \sqrt{CD^2 + KD^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$

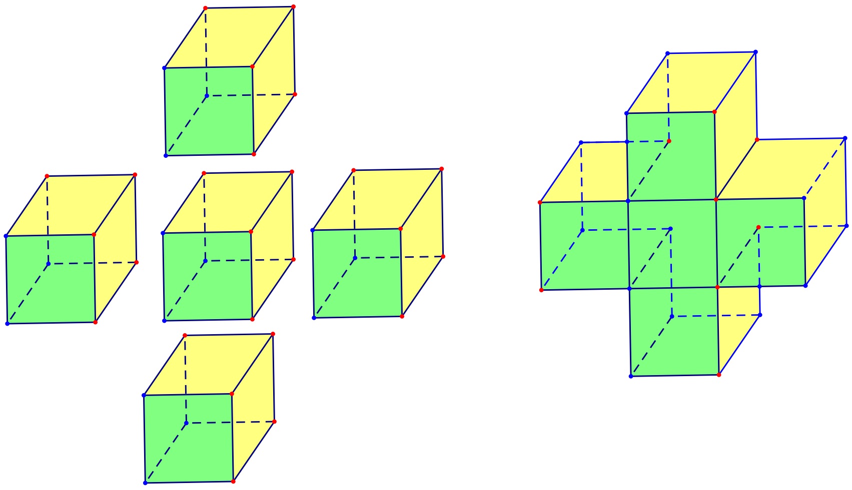
Ta có: $AK^2 + KC^2 = AC^2$. Vậy $\widehat{AKC} = 90°$. Tương tự $\widehat{AHC} = 90^0$

Vậy AC chính là đường kính mặt cầu ngoại tiếp khối $ABCDEHK$.

$AC = a\sqrt{2}$ Þ $OA = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. $V = \dfrac{4}{3}pOA^3 = \dfrac{4}{3}p\dfrac{a^3}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}pa^3$

Câu 32: Ghép 5 khối lập phương cạnh a để được khối hộp chữ thập như hình vẽ. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của khối chữ thập

A. $S_{tp} = 20a^2$. **B.** $S_{tp} = 30a^2$. **C.** $S_{tp} = 12a^2$. **D.** $S_{tp} = 22a^2$.



Diện tích mỗi mặt khối lập phương: $S_1 = a^2$

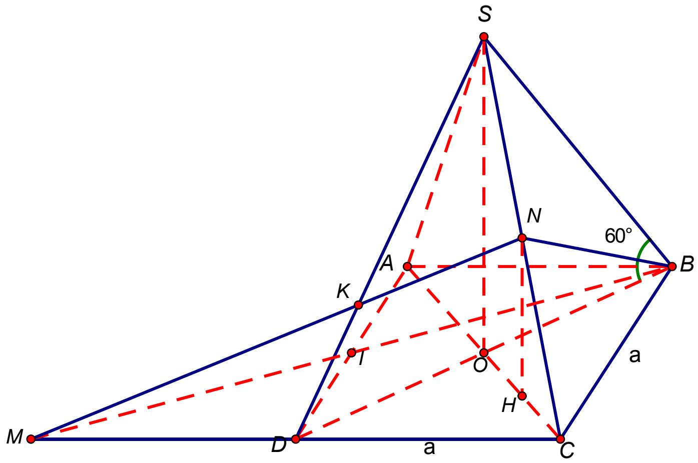
Diện tích toàn phần các khối lập phương: $S_2 = 6a^2$

Diện tích toàn phần khối chữ thập: $S = 5S_2 - 8S_1 = 22a^2$

Câu 33: Cho hình chóp tứ giác đều $SABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với đáy một góc $60°$. Gọi M là điểm đối xứng với C qua D; N là trung điểm của SC, mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $SABCD$ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích giữa hai phần đó.

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\frac{7}{3}$. **C.** $\frac{1}{7}$. **D.** $\frac{7}{5}$.

Đáp án D



Đặt $\begin{cases} V_1 = V_{SABIKN} \\ V_2 = V_{NBCDIK} \end{cases}$ ® $\frac{V_1}{V_2} = ?$

$* \; V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{2}a^2 = \frac{\sqrt{6}}{6}a^3$

*

$V_{N.BMC} = \frac{1}{3}.NH.S_{DBMC} = \frac{1}{3}.\frac{SO}{2}.S_{DBMC}$

$= \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{4}.\frac{1}{2}a.2a = \frac{\sqrt{6}}{12}a^3$

* Nhận thấy K là trọng tâm của tam giác SMC ® $\frac{MK}{MN} = \frac{2}{3}$

$* \; \frac{V_{M.DIK}}{V_{M.CBN}} = \frac{MD}{MC}.\frac{MI}{MB}.\frac{MK}{MN} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

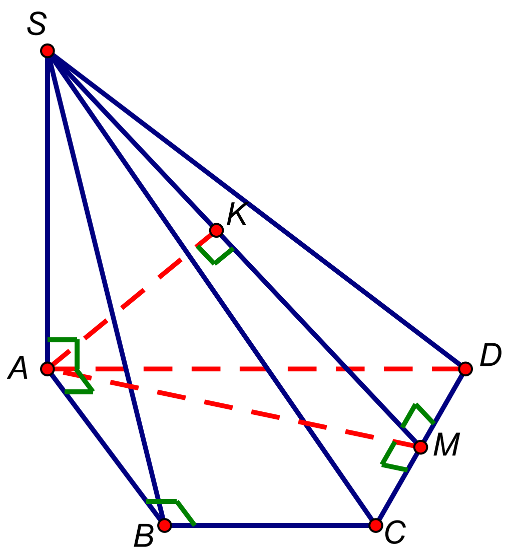
® $V_2 = V_{M.CBN} - V_{M.DIK} = \frac{5}{6}V_{M.CBN} = \frac{5}{6}.\frac{\sqrt{6}}{12}a^3 = \frac{5\sqrt{6}}{72}a^3$

$$® V_1 = V_{S.ABCD} - V_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}a^3 - \frac{5\sqrt{6}}{72}a^3 = \frac{7\sqrt{6}}{72}a^3 ® \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{7\sqrt{6}}{72}a^3}{\frac{5\sqrt{6}}{72}a^3} = \frac{7}{5}$$

Câu 34: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B biết $AB = 2a$, $AD = 3BC = 3a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a, biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{3\sqrt{6}}{4}a$.

A. $6\sqrt{6}a^3$. **B.** $2\sqrt{6}a^3$. **C.** $2\sqrt{3}a^3$. **D.** $6\sqrt{3}a^3$.

Hướng dẫn giải



Dựng $AM \perp CD$ tại M.
Dựng $AH \perp SM$ tại H.

Ta có: $AH = \frac{3\sqrt{6}}{4}a$.

$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2}.AB = 4a^2$

$CD = \sqrt{(AD - BC)^2 + AB^2} = 2a\sqrt{2}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = a^2$

$S_{ACD} = S_{ABCD} - S_{ABC} = 3a^2$

$S_{ACD} = \frac{1}{2}AM.CD \Rightarrow AM = \frac{2S_{ACD}}{CD} = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$

Ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AS^2} \Rightarrow AS = \frac{AH.AM}{\sqrt{AM^2 - AH^2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}a$

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = 2\sqrt{6}a^3$

Câu 35: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, góc giữa đường thẳng BB' và (ABC) bằng $60°$, tam giác ABC vuông tại C và góc $BAC = 60°$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên (ABC) trùng với trọng tâm của ΔABC. Thể tích của khối tứ diện $A'.ABC$ theo a bằng

A. $\frac{13a^3}{108}$. **B.** $\frac{7a^3}{106}$. **C.** $\frac{15a^3}{108}$. **D.** $\frac{9a^3}{208}$.

Hướng dẫn giải

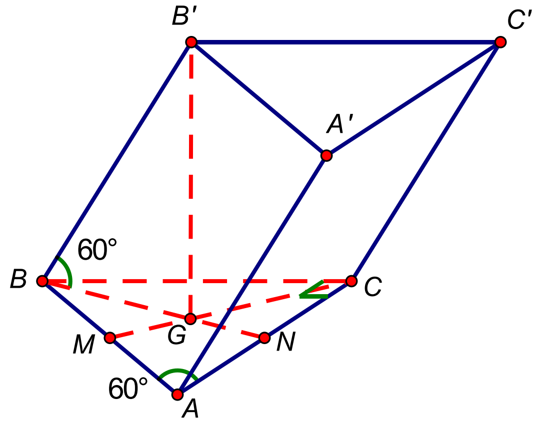
Gọi M, N là trung điểm của AB, AC và G là trọng tâm của ΔABC.

$B'G \perp (ABC) \Rightarrow \left(BB',(ABC)\right) = B'BG = 60^0$.

$V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.B'G = \frac{1}{6}.AC.BC.B'G$

Xét $\Delta B'BG$ vuông tại G, có $B'BG = 60^0$

$\Rightarrow B'G = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. (nửa tam giác đều)



Đặt $AB = 2x$. Trong ΔABC vuông tại C có $BAC = 60^0$

$\Rightarrow$ tam giác ABC là nữa tam giác đều $\Rightarrow AC = \frac{AB}{2} = x,\ BC = x\sqrt{3}$

Do G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow BN = \frac{3}{2}BG = \frac{3a}{4}$.

Trong ΔBNC vuông tại C: $BN^2 = NC^2 + BC^2$

$$\Leftrightarrow \frac{9a^2}{16} = \frac{x^2}{4} + 3x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9a^2}{52} \Rightarrow x = \frac{3a}{2\sqrt{13}} \Rightarrow \begin{cases} AC = \frac{3a}{2\sqrt{13}} \\ BC = \frac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} \end{cases}$$

Vậy, $V_{A'ABC} = \frac{1}{6}.\frac{3a}{2\sqrt{13}}.\frac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{9a^3}{208}$.

Câu 36: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, biết đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{6}$.Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

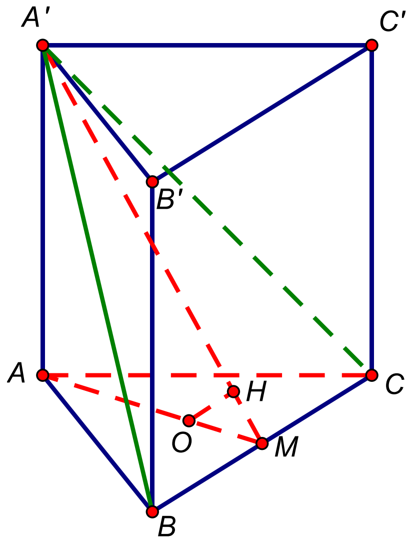
Hướng dẫn giải

Gọi M là trung điểm của BC, ta có $(A'AM)\perp(A'BC)$ theo giao tuyến $A'M$.
Trong $(A'AM)$ kẻ $OH\perp A'M\,(H\in A'M)$.
$\Rightarrow OH\perp(A'BC)$

Suy ra: $d\left(O,(A'BC)\right)=OH=\dfrac{a}{6}$.

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Xét hai tam giác vuông $A'AM$ và OHM có góc M chung nên chúng đồng dạng.



Suy ra: $\dfrac{OH}{A'A}=\dfrac{OM}{A'M}\Rightarrow\dfrac{\frac{a}{6}}{A'A}=\dfrac{\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{A'A^2+AM^2}}\Rightarrow\dfrac{1}{A'A}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{A'A^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}$.

$\Rightarrow A'A=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. Thể tích: $V_{ABC.A'B'C'}=S_{\Delta ABC}.A'A=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 37: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Biết thể tích khối chóp bằng $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. Tính khoảng cách h giữa hai đường thẳng BC và SA.

A. $\dfrac{a}{\sqrt{6}}$. **B.** a. **C.** $\dfrac{2a}{\sqrt{6}}$. **D.** $\dfrac{a}{2}$.

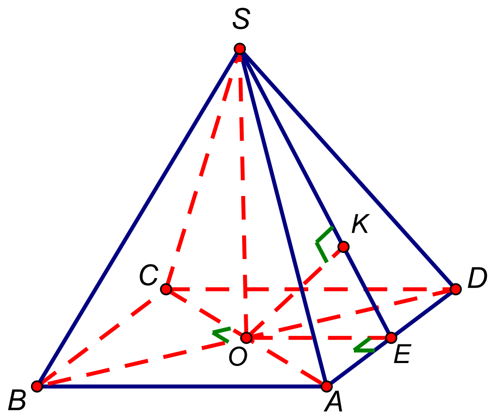
Hướng dẫn giải

Gọi O là tâm hình vuông $SABCD$, suy ra $SO\perp(ABCD)$.

Đặt $SO=x$. Ta có $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SO=\dfrac{1}{3}a^2x=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}\Leftrightarrow x=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $BC\parallel AD$ nên $BC\parallel(SAD)$. Do đó

$d\left[BC,SA\right]=d\left[BC,(SAD)\right]=d\left[B,(SAD)\right]=2d\left[O,(SAD)\right]$.



Kẻ $OK\perp SE$. Khi đó $d\left[O,(SAD)\right]=OK=\dfrac{SO.OE}{\sqrt{SO^2+OE^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

Vậy $d\left[BC,SA\right] = 2OK = \dfrac{2a}{\sqrt{6}}$. **Chọn C.**

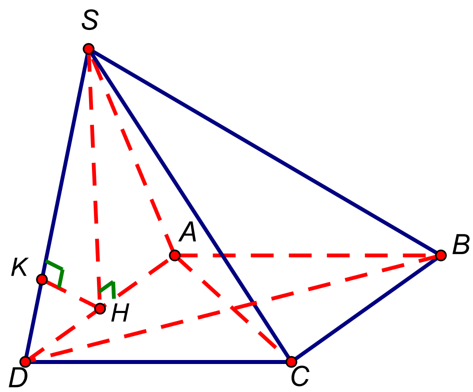
Câu 38: **(ĐỀ MINH HỌA QUỐC GIA NĂM 2017)** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Tam giác (SAD) cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD).

A. $h = \dfrac{2}{3}a.$ **B.** $h = \dfrac{4}{3}a.$ **C.** $h = \dfrac{8}{3}a.$ **D.** $h = \dfrac{3}{4}a.$

Hướng dẫn giải

Gọi H là trung điểm AD.

Suy ra $SH \perp AD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.



Đặt $SH = x$.

Ta có $V = \dfrac{1}{3}x.\left(a\sqrt{2}\right)^2 = \dfrac{4}{3}a^3 \Rightarrow x = 2a$.

Ta có $d\left[B,(SCD)\right] = d\left[A,(SCD)\right]$

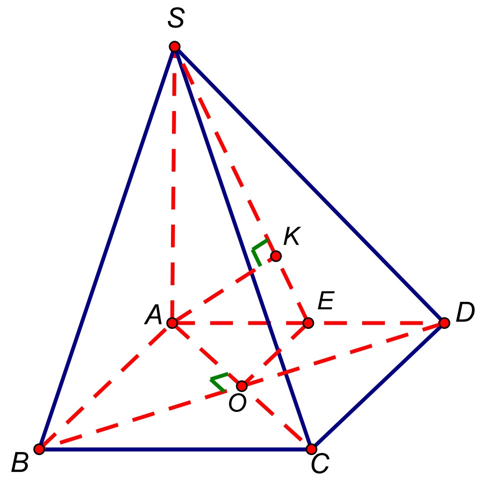
$$= 2d\left[H,(SCD)\right] = 2HK = \frac{4a}{3}.$$ **Chọn B.**

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{SBD} = 60^0$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\Delta SAB = \Delta SAD\ (c-g-c)$, suy ra $SB = SD$.



Lại có $\widehat{SBD} = 60^0$, suy ra

ΔSBD đều cạnh $SB = SD = BD = a\sqrt{2}$.

Trong tam giác vuông SAB, ta có

$SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a$.

Gọi E là trung điểm AD, suy ra

$OE \parallel AB$ và $AE \perp OE$.

Do đó

$d\left[AB,SO\right] = d\left[AB,(SOE)\right] = d\left[A,(SOE)\right]$

Kẻ $AK \perp SE$.

Khi đó $d\left[A,(SOE)\right] = AK = \dfrac{SA.AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **Chọn D.**

Câu 40: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $AA' = 2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và CD'.

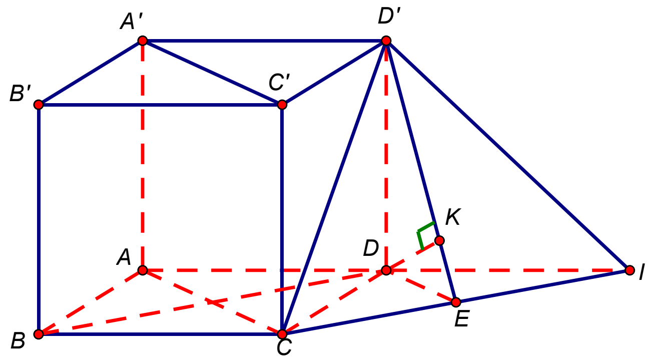
A. $a\sqrt{2}$. **B.** $2a$. **C.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Hướng dẫn giải

Gọi I là điểm đối xứng của A qua D, suy ra $BCID$ là hình bình hành nên $BD \parallel CI$.

Do đó $d\left[BD,CD'\right] = d\left[BD,(CD'I)\right] = d\left[D,(CD'I)\right]$.

Kẻ $DE \perp CI$ tại E, kẻ $DK \perp D'E$. Khi đó $d\left[D,(CD'I)\right] = DK$.



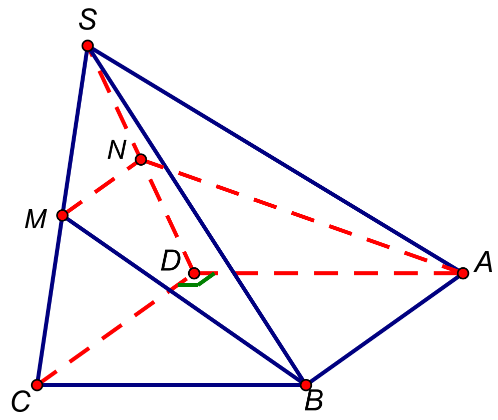
Xét tam giác IAC, ta có $DE \parallel AC$ (do cùng vuông góc với CI) và có D là trung điểm của AI nên suy ra DE là đường trung bình của tam giác. Suy ra $DE = \dfrac{1}{2}AC = a$.

Tam giác vuông $D'DE$, có $DK = \dfrac{D'D.DE}{\sqrt{D'D^2 + DE^2}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **Chọn C.**

Câu 41: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Mặt phẳng (α) đi qua A, B và trung điểm M của SC. Tỉ số thể tích của hai phần khối chóp bị phân chia bởi mặt phẳng đó là:

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{3}{8}$. **C.** $\dfrac{5}{8}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

Hướng dẫn giải



Kẻ $MN \parallel CD$ $(N \in CD)$, suy ra hình thang $ABMN$ là thiết diện của khối chóp.

Ta có $V_{S.ABMN} = V_{S.ABM} + V_{S.AMN}$.

Mà $\dfrac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SC} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $V_{S.ABM} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABC} = \dfrac{1}{4}V_{S.ABCD}$.

Và $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ACD}} = \dfrac{SM}{SC}.\dfrac{SN}{SD} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow V_{S.AMN} = \dfrac{1}{8}V_{S.ABCD}$.

Suy ra $V_{S.ABMN} = \dfrac{1}{4}V_{S.ABCD} + \dfrac{1}{8}V_{S.ABCD} = \dfrac{3}{8}V_{S.ABCD}$.

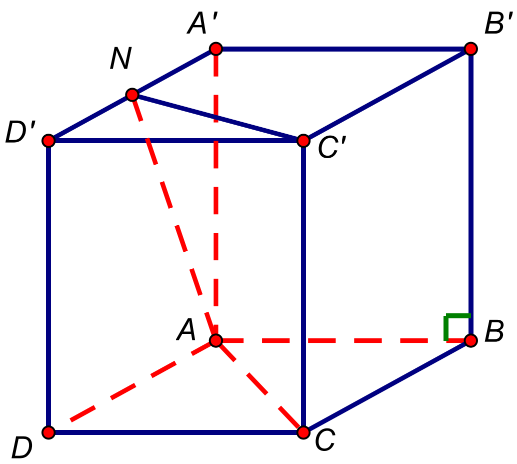
Từ đó suy ra $V_{ABMNDC} = \dfrac{5}{8}V_{S.ABCD}$ nên $\dfrac{V_{S.ABMN}}{V_{ABMNDC}} = \dfrac{3}{5}$.

Chọn D.

Câu 42: Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh bằng 1, $\widehat{BAD} = 120^0$. Góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ADD'A')$ bằng 30^0. Tính thể tích khối lăng trụ.

A. $V = \sqrt{6}$. **B.** $V = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $V = \sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải



Hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 120^0$, suy ra $\widehat{ADC} = 60^0$.

Do đó tam giác ABC và ADC là các tam giác đều.

Vì N là trung điểm $A'D'$ nên

$C'N \perp A'D'$ và $C'N = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $30^0 = \widehat{\left(AC',(ADD'A')\right)} = \widehat{\left(AC',AN\right)} = \widehat{C'AN}$.

Tam giác $C'AN$, có $AN = \dfrac{C'N}{\tan \widehat{C'AN}} = \dfrac{3}{2}$.

Tam giác $AA'N$, có $AA' = \sqrt{AN^2 - A'N^2} = \sqrt{2}$.

Diện tích hình thoi $S_{ABCD} = AB^2.\sin \widehat{BAD} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.AA' = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ (đvtt). **Chọn C.**

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD.

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** a.

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm của AD nên suy ra $SI \perp AD \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.

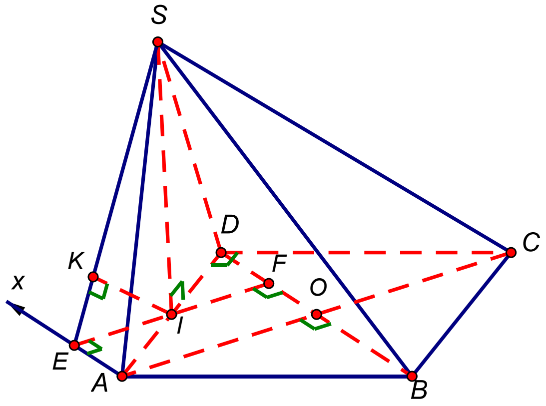
Kẻ $Ax \parallel BD$. Do đó $d[BD, SA] = d\left[BD, (SAx)\right] = d\left[D, (SAx)\right] = 2d\left[I, (SAx)\right]$.

Kẻ $IE \perp Ax$, kẻ $IK \perp SE$. Khi đó $d\left[I, (SAx)\right] = IK$.

Gọi F là hình chiếu của I trên BD, ta có $IE = IF = \dfrac{AO}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Tam giác vuông SIE, có $IK = \dfrac{SI.IE}{\sqrt{SI^2 + IE^2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$.

Vậy $d[BD, SA] = 2IK = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **Chọn C.**



Câu 44: **(CHUYÊN QUANG TRUNG LẦN 3)** Cho hình lăng trụ có tất cả các cạnh đều bằng a, đáy là lục giác đều, góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy là $60°$. Tính thể tích khối lăng trụ

A. $V = \dfrac{27}{8}a^3$. **B.** $V = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^3$. **C.** $V = \dfrac{3}{2}a^3$. **D.** $\dfrac{9}{4}a^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $ABCDEF$ là lục giác đều nên góc ở đỉnh bằng $120°$.

ABC là tam giác cân tại B, DEF là tam giác cân tại E.

$S_{ABC} = S_{DEF} = \dfrac{1}{2}a.a.\sin 120° = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC.\cos B}$

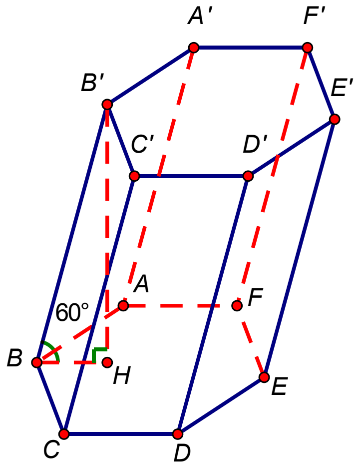
$= \sqrt{a^2 + a^2 - 2.a.a.\left(-\dfrac{1}{2}\right)} = a\sqrt{3}$

$S_{ACDF} = AC.AF = a\sqrt{3}.a = a^2\sqrt{3}$

$S_{ABCDEF} = S_{ABC} + S_{ACDF} + S_{DEF} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + a^2\sqrt{3} + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

$B'BH = 60° \Rightarrow B'H = BB'.\sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $V = BH'.S_{ABCDEF} = a\sqrt{3}.\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{9}{4}a^3$



Câu 45: (NGUYỄN TRÃI – HD) Một cốc nước có dạng hình trụ đựng nước chiều cao $12cm$, đường kính đáy $4cm$, lượng nước trong cốc cao $8cm$. Thả vào cốc nước 4 viên bi có cùng đường kính $2cm$. Hỏi nước dâng cao cách mép cốc bao nhiêu xăng-ti-mét? (làm tròn sau dấu phẩy 2 chữ số thập phân, bỏ qua độ dày của cốc)

A. $2,67cm$. **B.** $2,75cm$. **C.** $2,25cm$. **D.** $2,33cm$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Lượng nước dâng lên chính là tổng thể tích của 4 viên bi thả vào bằng

$V_b = 4.\frac{4}{3}\pi r_b^3 = \frac{16\pi}{3}\text{cm}^3$.

Dễ thấy phần nước dâng lên là hình trụ có đáy bằng với đáy cốc nước và thể tích là $\frac{16\pi}{3}\text{cm}^3$.

Chiều cao của phần nước dâng lên là h_d thỏa mãn: $\frac{16\pi}{3} = \pi r^2 h_d$ nên $h_d = \frac{4}{3}\text{cm}$.

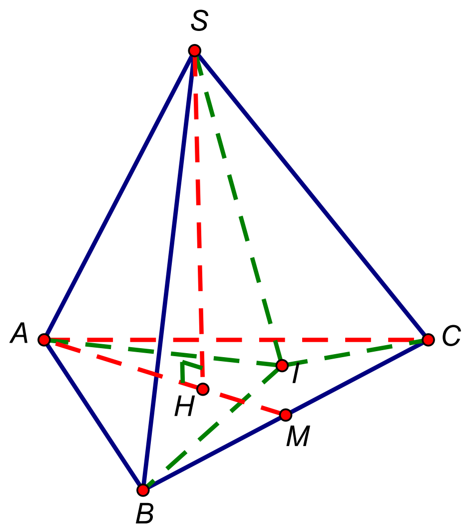
Vậy nước dâng cao cách mép cốc là $12 - 8 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \approx 2,67$ cm.

Câu 46: (CHUYÊN BẮC GIANG) Cho tứ diện đều cạnh a và điểm I nằm trong tứ diện. Tính tổng khoảng cách từ I đến các mặt của tứ diện.

A. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{34}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



$$AH = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Ta có $V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Mặt khác,

$$V_{SABC} = V_{ISAB} + V_{IABC} + V_{ISAC} + V_{ISBC}$$

$$= \frac{1}{3}S_{ABC}.\left[d\left(I;(SAB)\right) + d\left(I;(ABC)\right) + d\left(I;(SAC)\right) + d\left(I;(SBC)\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow d\left(I;(SAB)\right) + d\left(I;(ABC)\right) + d\left(I;(SAC)\right) + d\left(I;(SBC)\right) = \frac{3V_{SABC}}{S_{ABC}} = \frac{3.\frac{a^3\sqrt{2}}{12}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 47: (CHUYÊN KHTN L4) Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân, $AB = AC = a$, $SC \perp (ABC)$ và $SC = a$. Mặt phẳng qua C, vuông góc với SB cắt SA, SB lần lượt tại E và F. Tính thể tích khối chóp $S.CEF$.

A. $V_{SCEF} = \frac{\sqrt{2}a^3}{36}$. **B.** $V_{SCEF} = \frac{a^3}{18}$. **C.** $V_{SCEF} = \frac{a^3}{36}$. **D.** $V_{SCEF} = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}$.

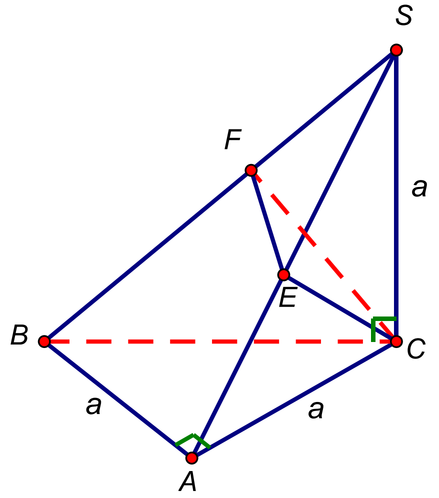
Hướng dẫn giải

Chọn đáp án C.

Từ C hạ $CF \perp SB,\left(F \in SB\right)$, $CE \perp SA,\left(E \in SA\right)$

Ta có $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp SC \end{cases} \Rightarrow AB \perp \left(SAC\right) \Rightarrow AB \perp CE \Rightarrow CE \perp \left(SAB\right) \Rightarrow CE \perp SB$

Vậy mặt phẳng qua C và vuông góc SB là mặt $\left(CEF\right)$.



Ta có $\dfrac{V_{SCEF}}{V_{SCAB}} = \dfrac{SE}{SA}.\dfrac{SF}{SB}$

Tam giác vuông SAC vuông tại C ta có: $SA = \sqrt{SC^2 + AC^2} = a\sqrt{2}$

và $\boxed{\dfrac{SE}{SA} = \dfrac{SC^2}{SA^2}} = \dfrac{a^2}{2a^2} \Rightarrow \dfrac{SE}{SA} = \dfrac{1}{2}$

Tam giác vuông SBC vuông tại C ta có: $SB = \sqrt{SC^2 + BC^2} = a\sqrt{3}$

và $\boxed{\dfrac{SF}{SB} = \dfrac{SC^2}{SB^2}} = \dfrac{a^2}{3a^2} \Rightarrow \dfrac{SF}{SC} = \dfrac{1}{3}$

Do đó $\dfrac{V_{SCEF}}{V_{SCAB}} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6} \Rightarrow V_{SCEF} = \dfrac{1}{6}V_{SABC} = \dfrac{1}{6}.\dfrac{1}{3}SA.S_{ABC} = \dfrac{1}{36}a^3$.

Câu 48: (CHUYÊN VINH – L2) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $\dfrac{AM}{AA'} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{BN}{BB'} = \dfrac{CP}{CC'} = \dfrac{2}{3}$. Thể tích khối đa diện $ABC.MNP$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}V$ **B.** $\dfrac{9}{16}V$ **C.** $\dfrac{20}{27}V$ **D.** $\dfrac{11}{18}V$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt

$V_1 = V_{M.NPCB} = \dfrac{1}{3}d\left(M,\left(CC'B'B\right)\right).S_{NPCB}$

$= \dfrac{1}{3}d\left(M,\left(CC'B'B\right)\right).\dfrac{2}{3}S_{CC'B'B} = \dfrac{2}{9}V$

$V_2 = V_{M.ABC} = \dfrac{1}{3}d\left(M,\left(ABC\right)\right).S_{ABC}$

$= \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}d\left(A',\left(ABC\right)\right).S_{ABC} = \dfrac{1}{6}V$

Vậy $V_{ABC.MNP} = V_1 + V_2 = \dfrac{2}{9}V + \dfrac{1}{6}V = \dfrac{11}{8}V$