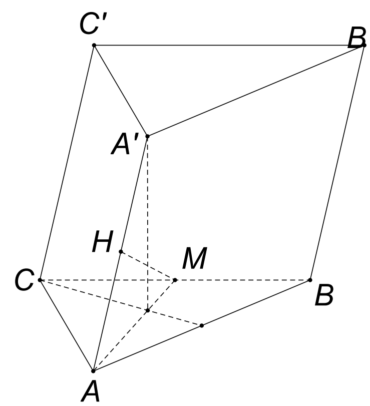
CHƯƠNG 05. (tiếp theo)
BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO
HÌNH HỌC KHÔNG GIAN
ĐỀ ÔN TẬP CHƯƠNG 5
ĐỀ SỐ 1

Bài 1: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ là:

A . $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC, dựng MH vuông góc với AA'. Suy ra $MH = d(BC, A'A) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Đặt $AH = x$, ta có: $A'A = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{3}}$

Từ $A'A.MH = A'G.AM \Rightarrow x = \frac{a}{3}$.

Vậy $V = \frac{a}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Chọn A.

Bài 2: Cho tứ diện ABCD với $BC = a$, các cạnh còn lại đều bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (BCD). Gọi I, J lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AD. Giả sử hình cầu đường kính IJ tiếp xúc với CD. Giá trị $\cos\alpha$ là:

A . $3-2\sqrt{3}$ **B.** $2\sqrt{3}-3$ **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{2-\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Gọi O là trung điểm IJ và F là điểm tiếp xúc giữa hình cầu đường kính IJ và đường thẳng CD. Hình cầu đường kính IJ tiếp xúc với CD khi và chỉ khi khoảng cách từ O đến CD bằng nửa độ dài IJ.

Ta có $AI = DI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vì FC và CI là hai tiếp tuyến xuất phát từ một điểm nên FC=CI=$\frac{a}{2}$.

Tương tự, ta có $DJ = DF = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{2}$

Tam giác ADI cân có IJ là đường trung tuyến nên tam giác IDJ vuông tại J.

Suy ra: $\sin\frac{\alpha}{2} = \sin JID = \frac{JD}{DI} = \frac{\frac{a}{2}(\sqrt{3}-1)}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

Do vậy, $\cos\alpha = 2\sqrt{3} - 3.$

Chọn B.

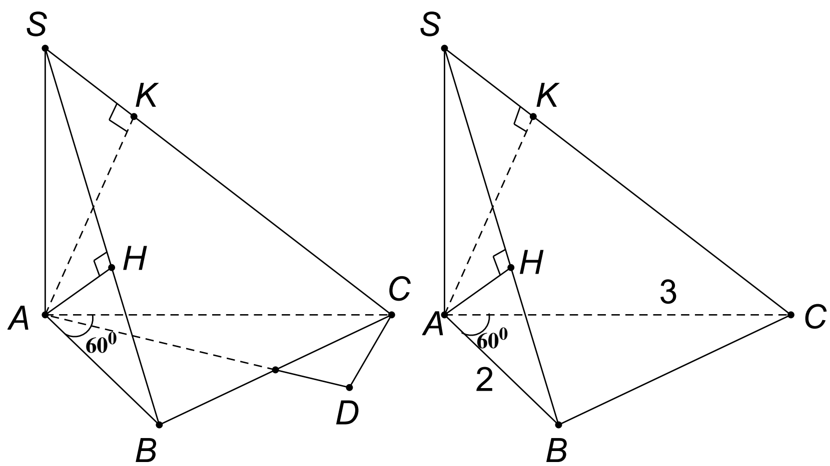
Bài 3: Cho hình chóp $SABC$ với SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $BC = a\sqrt{3}, BAC = 60^0.$ Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SC. Mặt cầu đi qua các điểm A, B, C, H, K có bán kính bằng:

A . a **B.** $2a$ **C.** $\sqrt{3}a$ **D.**Không đủ dữ kiện để tính

Lời giải

Gọi AD là đường kính của đường tròn (ABC).

Suy ra, $AC \perp DC \Rightarrow CD \perp (SAC)$ hay $AK \perp DK.$



Tương tự, $AH \perp HD.$ Suy ra mặt cầu qua các điểm A, B, C, H, K có đường kính $AD = \dfrac{BC}{\sin 60^0} = 2a.$

Chọn A.

Bài 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) là 45^0. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc AB sao cho $HA = 2HB.$ Biết $CH = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC:

A . $\dfrac{a\sqrt{210}}{30}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{210}}{20}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{210}}{45}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{210}}{15}$

Lời giải

+ D là đỉnh của hình bình hành $ABCD$ thì: $d(SA, BC) = d(B, (SAD)) = 1{,}5d(H, (SAD)).$

+ Kẻ HE vuông góc AD, E thuộc AD. Kẻ HI vuông SE, I thuộc AE thì $d(H, (SAD)) = HI.$

+ Tính $HI = \dfrac{a\sqrt{210}}{30}.$

Chọn A.

Bài 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC là tam giác đều cạnh bằng $a, SB = 2a.$ Tính theo a khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác ABC đến mặt phẳng (SBC).

A . $\dfrac{a\sqrt{15}}{15}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{17}}{15}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{19}}{15}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{23}}{15}$

Lời giải

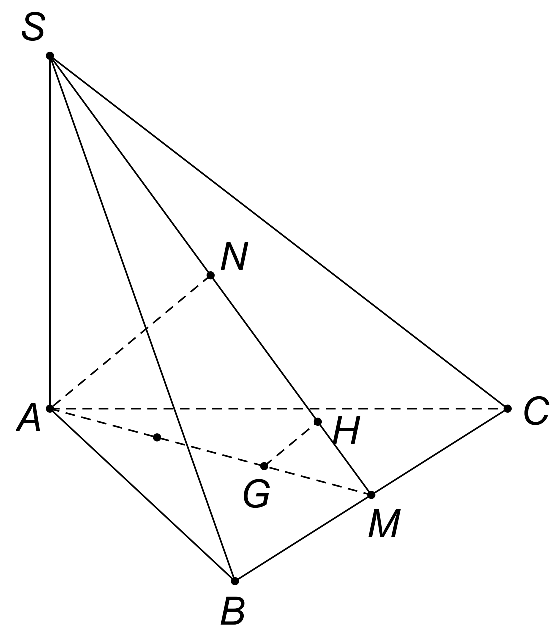
Gọi M là trung điểm của BC, ta có

Kẻ đường cao AN của tam giác SAM,

vì $AN \perp BC, AN \perp SM$ nên $AN \perp (SBC)$.

Khoảng cách từ A đến (SBC) là

$d(A;(SBC)) = AN.$



Ta có: $\dfrac{1}{AN^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{5}{3a^2}$

$\Leftrightarrow AN = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}.$

Kẻ $GH // AN; H \in SM$; vì $AN \perp (SBC)$ nên $GH \perp (SBC)$.

Khoảng cách từ G đến (SBC) là $d(G;(SBC)) = GH.$

Ta có: $\dfrac{GH}{AN} = \dfrac{MG}{AM} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow GH = \dfrac{1}{3} AN = \dfrac{a\sqrt{15}}{15}.$

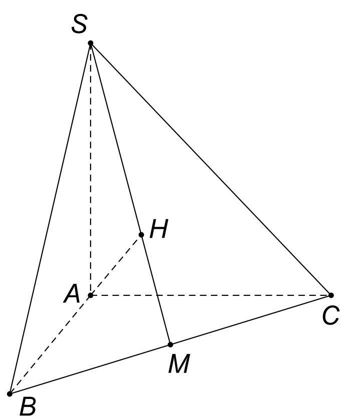
Vậy khoảng cách từ G đến (SBC) là $d(G;(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{15}}{15}.$

Chọn A.

Bài 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = AC = 5a, AB = a$, $BAC = 120^0$. Tính theo a khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

A . $\dfrac{5\sqrt{381}}{127}a$ **B.** $\dfrac{5\sqrt{382}}{127}a$ **C.** $\dfrac{5\sqrt{385}}{127}a$ **D.** $\dfrac{5\sqrt{387}}{127}a$

Lời giải



Kẻ $AM \perp BC, AH \perp SN, (M \in BC, H \in SM)$.

Ta có $AM \perp BC, BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAM)$, suy ra $AH \perp BC$. Vậy ta có $AH \perp (SBC)$, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $d(A,(SBC)) = AH$.

Áp dụng định lý cô sin trong tam giác ABC ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 120^0 = 31a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{31}.$

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB.AC.\sin 120^0 = \dfrac{5\sqrt{3}a^2}{4}.$

Mặt khác $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AM.BC \Rightarrow AM = \dfrac{2S_{ABC}}{BC} = \dfrac{5\sqrt{93}}{62}a.$

Ta có $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AS^2}=\frac{127}{75a^2}\Rightarrow AH=\frac{5\sqrt{381}}{127}a.$

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $d\left(A,(SBC)\right)=\frac{5\sqrt{381}}{127}a.$

Chọn A.

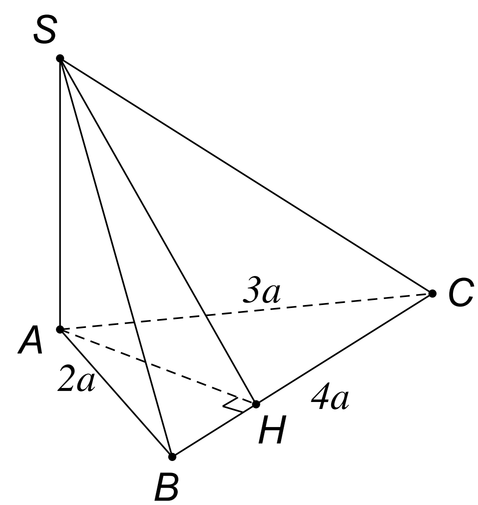
Bài 7: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đường thẳng SA vuông góc mặt phẳng $(ABC), AB=2a,$ $AC=3a, BC=4a.$ Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng $60^0.$ Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC.

A . $\frac{45\sqrt{5}a^3}{32}$ **B.** $\frac{45\sqrt{3}a^3}{32}$ **C.** $\frac{45\sqrt{7}a^3}{32}$ **D.** $\frac{45\sqrt{11}a^3}{32}$

Lời giải

Xét tam giác ABC, áp dụng định lý cô sin:

$\cos B=\frac{BC^2+AB^2-AC^2}{2.BC.AB}=\frac{16a^2+4a^2-9a^2}{2.4a.2a}=\frac{11}{16}.$



Với $0^0<B<180^0,$ suy ra:

$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{11}{16}\right)^2}=\frac{3\sqrt{15}}{16}.$

Ta kẻ đường cao AH của tam giác ABC,

ta có: $\sin B=\frac{AH}{AB}\Rightarrow AH=AB.\sin B$

$=2a.\frac{3\sqrt{15}}{16}=\frac{3\sqrt{15}a}{8}$

Do đó diện tích tam giác ABC là:

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AH.BC=\frac{1}{2}.\frac{3\sqrt{15}a}{8}.4a=\frac{3\sqrt{15}a^2}{4}.$

Vì $BC\perp AH, BC\perp SA\Rightarrow BC\perp(SAH), BC\perp SH$ nên góc SHA là góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng $60^0.$

Xét tam giác SAH ta có: $\tan 60^0=\frac{SA}{AH}\Rightarrow SA=AH.\tan 60^0=\frac{3\sqrt{15}a}{8}.\sqrt{3}=\frac{9\sqrt{5}a}{8}$

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V=\frac{1}{3}S_{ABC}.SA=\frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{15}a^2}{4}.\frac{9\sqrt{5}a}{8}=\frac{45\sqrt{3}a^3}{32}.$

Chọn B.

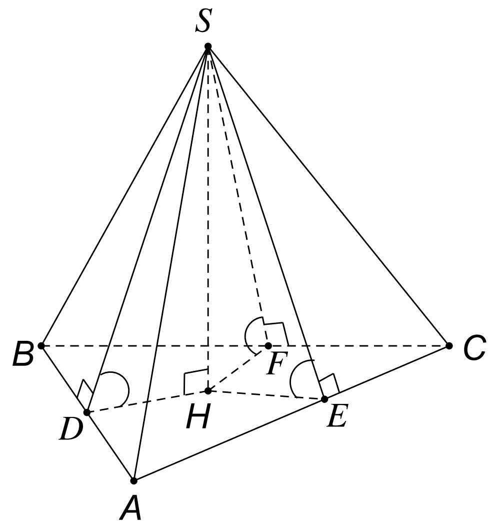
Bài 8: Cho hình chóp $S.ABC,$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a.$ Các mặt bên $(SAB),(SAC),$ (SBC)lần lượt tạo với đáy các góc lần lượt là $30^0,45^0,60^0.$ Tính thể tích V của khối chóp $SABC.$ Biết rằng hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) nằm bên trong tam giác $ABC.$

A . $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{\left(4+\sqrt{3}\right)}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2\left(4+\sqrt{3}\right)}$ **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{4\left(4+\sqrt{3}\right)}$ **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{8\left(4+\sqrt{3}\right)}$

Lời giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABC).$

Kẻ $HD\perp AB,(D\in AB),HE\perp AC(E\in AC),HF\perp BC(E\in BC)$.



Khi đó ta có: $HD=\dfrac{SH}{\tan 30^0}=SH\sqrt{3}$; $HE=\dfrac{SH}{\tan 45^0}=SH$; $HF=\dfrac{SH}{\tan 60^0}=\dfrac{SH}{\sqrt{3}}$

Ta có $S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ suy ra: $\dfrac{1}{2}SH\left(1+\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)a=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow SH=\dfrac{3a}{2\left(4+\sqrt{3}\right)}$.

Vậy $V=\dfrac{1}{3}.\dfrac{3a}{2\left(4+\sqrt{3}\right)}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8\left(4+\sqrt{3}\right)}$.

Chọn D.

Bài 9: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, góc giữa mặt bên và phẳng đáy là α thỏa mãn $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$. Mặt phẳng (P) qua AC và vuông góc với mặt phẳng (SAD) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện. Tỉ lệ thể tích hai khối đa diện là gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau:

A . $0{,}11$ **B.** $0{,}13$ **C.** $0{,}7$ **D.** $0{,}9$

Lời giải

$S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều $SO\perp(ABCD)$.

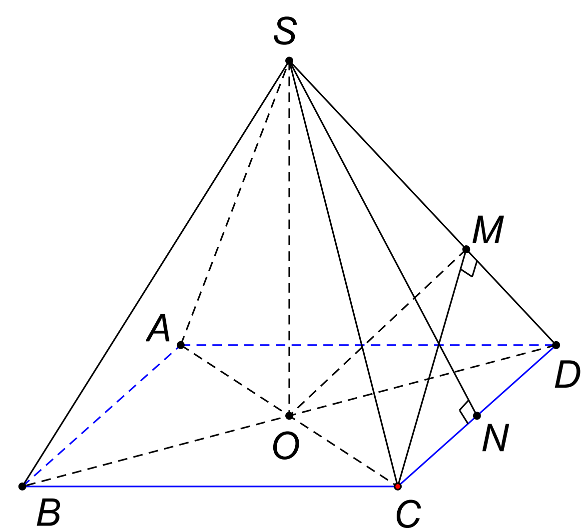
Gọi N là trung điểm CD

$\Rightarrow\begin{cases}CD\perp SN, CD\perp ON\\(SCD)\cap(ABCD)=CD\end{cases}\Rightarrow((SCD),(ABCD))=SNO$

Kẻ $CM\perp SD$. Ta có: $\begin{cases}AC\perp BD\\AC\perp SO\end{cases}\Rightarrow AC\perp(SBD)$

$\Rightarrow AC\perp SD\Rightarrow SD\perp(ACM)\Rightarrow(ACM)\perp(SAD)$

nên mặt phẳng (P) là (ACM).



+ Xét tam giác SON vuông tại N có:

$SN=\dfrac{ON}{\cos SNO}=\dfrac{3a}{2}$.

$SO=\sqrt{SN^2-ON^2}=\sqrt{\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=a\sqrt{2}$.

+ Xét tam giác SOD vuông tại O có:

$$SD=\sqrt{SO^2+OD^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

Ta có: $S_{\Delta SCD}=\frac{1}{2}CM.SD=\frac{1}{2}SN.CD\Rightarrow CM=\frac{SN.CD}{SD}=\frac{3a\sqrt{10}}{10}.$

Xét tam giác MCD vuông tại M có: $DM=\sqrt{CD^2-CM^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{3a\sqrt{10}}{10}\right)^2}=\frac{a\sqrt{10}}{10}.$

Ta có: $\frac{V_{M.ACD}}{V_{SABCD}}=\frac{V_{MACD}}{2V_{SACD}}=\frac{1}{2}.\frac{DM}{DS}.\frac{DA}{DA}.\frac{DC}{DC}=\frac{1}{2}\frac{\frac{a\sqrt{10}}{10}}{\frac{a\sqrt{10}}{2}}=\frac{1}{10}\Rightarrow V_{MACD}=\frac{1}{10}V_{SABCD}$

Mặt phẳng (P) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối $M.ACD$ và

$S.ABCM\Rightarrow V_{SABCD}=V_{MACD}+V_{SABCM}\Rightarrow V_{SABCM}=\frac{9}{10}V_{SABCD}$

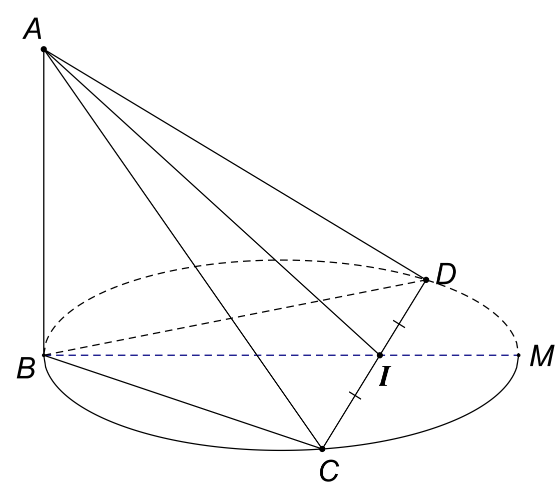
Do đó: $\frac{V_{MACD}}{V_{SABCM}}=\frac{1}{9}\approx 0{,}11$

Chọn A.

Bài 10: Thể tích hình cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$, có cạnh $AB=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và các cạnh còn lại đều bằng a.

A . $\frac{13\sqrt{13}}{162}\pi a^3$ **B.** $\frac{13\sqrt{13}}{216}\pi a^3$ **C.** $\frac{13\sqrt{13}}{648}\pi a^3$ **D.** $\frac{13}{162}\pi a^3$

Lời giải



Gọi I trung điểm cạnh CD.

Theo đề bài ta có $\begin{cases}AI\perp CD\\ BI\perp CD\end{cases}, AI=BI=\frac{a\sqrt{3}}{2}=AB\ (1)$

$\Rightarrow(ABI)$ là mặt phẳng trung trực cạnh CD.

Gọi M là giao điểm của BI với mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Suy ra đường tròn lớn của (S) là đường tròn (ABM).

Mặt phẳng (BCD) cắt (S) theo đường tròn (BCD) qua M, hơn nữa BM là đường kính

$\Rightarrow BM=\frac{a}{\sin 60^0}=\frac{2a}{\sqrt{3}}$

Từ $(1)\Rightarrow\Delta ABI$ đều. Suy ra $ABM=60^0.$

$AM=\sqrt{AB^2+BM^2-2AB.BM.\cos 60^0}=a\sqrt{\frac{13}{12}}\Rightarrow R=\frac{AM}{2\sin 60^0}=\frac{a\sqrt{13}}{6}$

$\Rightarrow V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{13\sqrt{13}}{162}\pi a^3$

Chọn A.

Bài 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và vuông góc với đáy. Gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $SM = 2MC$. Tính thể tích hình chóp $M.ABC$.

A . $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Lời giải

Ta có: $(SAB)\perp(ABCD)$;

$(SAB)\cap(ABCD) = AB$; $SH\subset(SAB)$

$SH\perp AB$ (là đường cao ΔSAB đều)

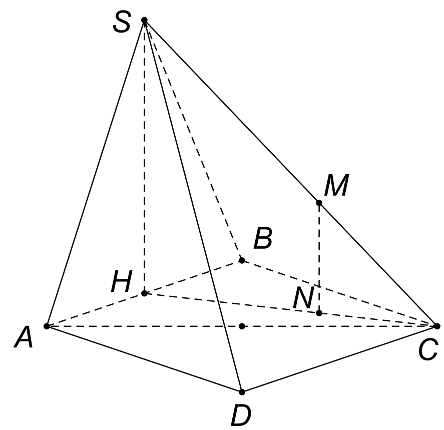
Suy ra: $SH\perp(ABCD)$

Tính : $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (vì ΔABC đều cạnh a)

$\Rightarrow S_{ABCD} = a^2$

Tính: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

$V_{MABC} = \frac{1}{3}V_{SABC} = \frac{1}{6}V_{SABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{36}$.



Chọn B.

Bài 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a$, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn $AC, SA = AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Tính thể tích khối tứ diện $SMBC$ theo a.

A . $\frac{a^3\sqrt{14}}{48}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{14}}{24}$ C. $\frac{a^3\sqrt{14}}{16}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{14}}{8}$

Lời giải

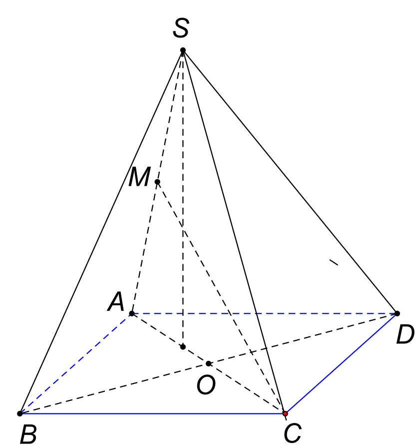
Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Ta có:

$$\frac{AM}{AC} = \frac{AH}{SA} \Rightarrow AM = \frac{AH.AC}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}.a\sqrt{2}}{a} = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow MC = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{SMC} = \frac{1}{2}SM.MC = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{7}}{7} = \frac{a^2\sqrt{7}}{8}.$$

$$V_{SMBC} = \frac{1}{3}BO.S_{\Delta SMC} = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{2}}{2}\frac{a^2\sqrt{7}}{8} = \frac{a^3\sqrt{14}}{48}.$$



Chọn A.

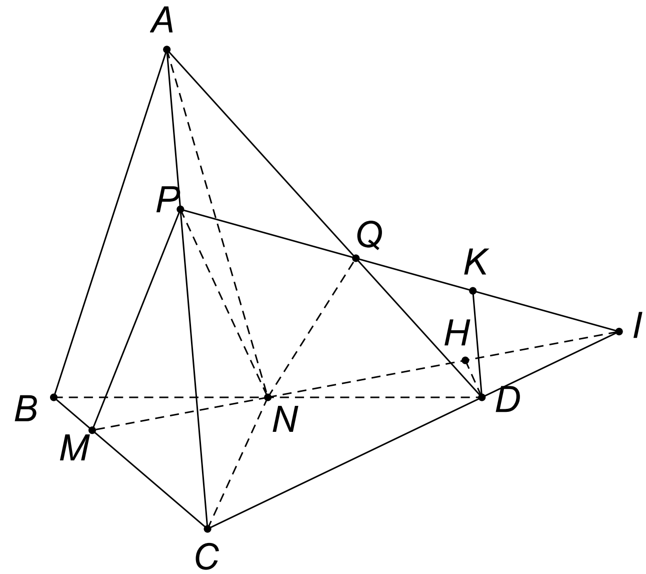
Bài 13: (Hình học không gian) Cho tứ diện $ABCD$ và M, N, P lần lượt thuộc BC, BD, AC sao cho $BC = 4BM, BD = 2BN, AC = 3AP$. Mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q. Tính tỷ số thể tích hai phần khối tứ diện $ABCD$ bị chia bởi mặt phẳng (MNP).

A . $\frac{2}{3}$ **B.** $\frac{7}{13}$ C. $\frac{5}{13}$ **D.** $\frac{1}{3}$

Lời giải

Gọi $I = MN \cap CD, Q = PI \cap AD,$

kẻ $DH // BC\left(H \in IM\right), DK // AC\left(K \in IP\right).$



$\Delta NMB = \Delta NDH \Rightarrow \dfrac{ID}{IC} = \dfrac{DH}{CM} = \dfrac{BM}{CM} = \dfrac{1}{3}.$

$\dfrac{IK}{IP} = \dfrac{DK}{CP} = \dfrac{ID}{IC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{DK}{2AP} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow DK = \dfrac{2}{3}$

$\Delta APQ \sim \Delta DKQ.$

Suy ra $\Rightarrow \dfrac{AQ}{DQ} = \dfrac{AP}{DK} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{AQ}{AD} = \dfrac{3}{5}$

Đặt $V = V_{ABCD}$. Ta có: $\dfrac{V_{ANPQ}}{V_{ANCD}} = \dfrac{AP}{AC}.\dfrac{AQ}{AD} = \dfrac{1}{5};$

$\dfrac{V_{ANCD}}{V_{ABCD}} = \dfrac{V_{DACN}}{V_{DABC}} = \dfrac{DN}{DB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow V_{ANPQ} = \dfrac{1}{10}V$

$\dfrac{V_{CDMP}}{V_{CDBA}} = \dfrac{CM}{CB}.\dfrac{CP}{CA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow V_{CDMP} = \dfrac{1}{2}V \Rightarrow V_{V.ABMP} = \dfrac{1}{2}V_{DABMP} = \dfrac{1}{2}V - V_{CDMP} = \dfrac{1}{4}V$

$\Rightarrow V_{ABMNQP} = V_{ANPQ} + V_{N.ABMP} = \dfrac{7}{20}V \Rightarrow \dfrac{V_{ABMNQP}}{V_{CDMNQP}} = \dfrac{7}{13}$

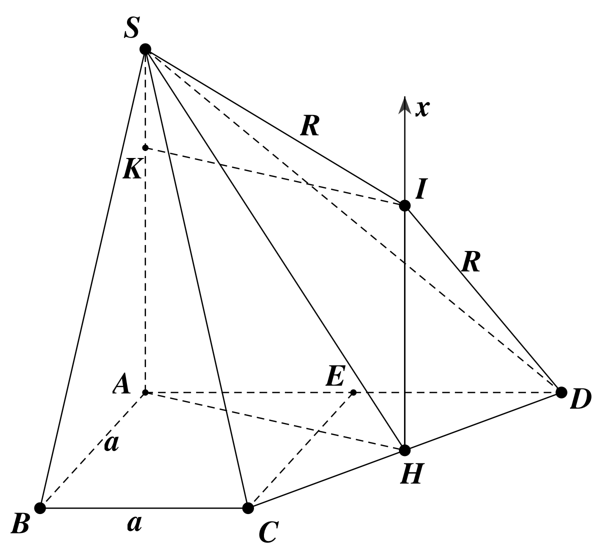
Vậy mặt phẳng $\left(MNP\right)$ chia khối chóp thành hai phần với tỉ lệ thể tích $\dfrac{7}{13}$.

Chọn B.

Bài 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{6}$. Đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và $B, AB = BC = \dfrac{1}{2}AD = a.$ Gọi E là trung điểm AD. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ECD.$

A . $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $R = a\sqrt{6}$ **C.** $R = \dfrac{\sqrt{114}}{6}a$ **D.** $R = \dfrac{a\sqrt{26}}{2}$

Lời giải



Gọi H là trung điểm của CD và d là đường thẳng đi qua H và vuông góc với đáy. Gọi I và R là tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp $S.CDE.$ Suy ra I thuộc D. Đặt $IH = x.$ Trong mp $\left(\text{AS}IH\right)$ kẻ đường thẳng đi qua I và song song với AH cắt AS tại K.

Ta có: $ID^2 = IH^2 + HD^2 = x^2 + \frac{a^2}{2}$.

$IS^2 = IK^2 + KS^2 = AH^2 + KS^2 = AC^2 + CH^2 + KS^2 = 2a^2 + \frac{a^2}{2} + \left(a\sqrt{6} - x\right)^2$

Suy ra: $x^2 + \frac{a^2}{2} = 2a^2 + \frac{a^2}{2} + \left(a\sqrt{6} - x\right)^2 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{6}a}{3}$.

Vậy bán kính mặt cầu bằng $R = \frac{\sqrt{114}a}{6}$.

Chọn C.

Bài 15: Cho bát diện đều, tính tỷ số giữa thể tích khối cầu nội tiếp và thể tích khối cầu ngoại tiếp hình bát diện đều đó.

A . $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **D.** $\frac{1}{3\sqrt{3}}$

Lời giải

Gọi cạnh bát diện đều là a; bát diện đều có các mặt chéo là hình vuông; khi đó độ dài các đường chéo $AC = BD = SS' = a\sqrt{2}$.

Mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp đều có tâm O, khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp là

$R = OA = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Bán kính mặt cầu nội tiếp là khoảng cách từ O đến các mặt bên. Hình trên có

$r = OH = \frac{SO.OM}{\sqrt{SO^2 + OM^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

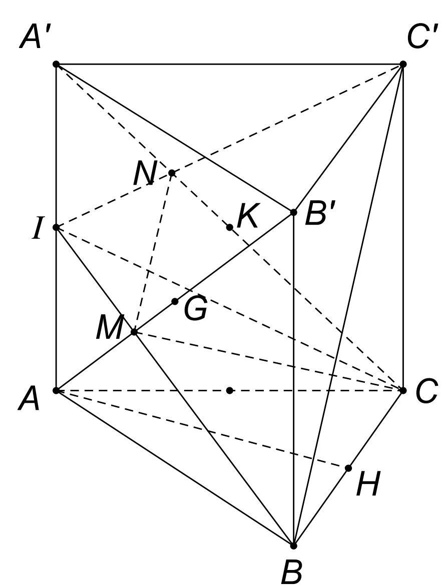
Có $\frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ khi đó tỷ số thể tích khối cầu nội tiếp cho khối cầu ngoại tiếp là: $\left(\frac{r}{R}\right)^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Chọn D.

Bài 16: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$, có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Lấy M, N lần lượt trên cạnh $AB', A'C$ sao cho $\frac{AM}{AB'} = \frac{A'N}{A'C} = \frac{1}{3}$. Tính thể tích V của khối $BMNC'C$.

A . $\frac{a^3\sqrt{6}}{108}$ **B.** $\frac{2a^3\sqrt{6}}{27}$ **C.** $\frac{3a^3\sqrt{6}}{108}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{27}$

Lời giải



Gọi G, K lần lượt tâm các hình chữ nhật $ABB'A'$ và $AA'C'C$.

Ta có: $\frac{AM}{AB'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AM}{AG} = \frac{2}{3}$

(Do G trung điểm AB')

Xét tam giác ABA' có AG là trung tuyến và $\frac{AM}{AG} = \frac{2}{3}$. Suy ra M là trọng tâm tam giác ABA'. Do đó BM đi q ua trung điểm I của AA'.

Ta có: $\frac{A'N}{A'C} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{A'N}{A'K} = \frac{2}{3}$

(Do K là trung điểm A'C)

Xét tam giác $AA'C'$ có $A'K$ là trung tuyến

và $\frac{A'N}{A'K}=\frac{2}{3}$. Suy ra N là trọng tâm của tam giác $AA'C'$. Do đó $C'N$ đi qua trung điểm I của AA'.

Từ M là trọng tâm tam giác ABA' và N trọng tâm của tam giác $AA'C'$. Suy ra: $\frac{IM}{IB}=\frac{IN}{IC'}=\frac{1}{3}$.

Gọi V_1,V_2 lần lượt là thể tích các khối chóp $IMNC;IBCC'$. Ta có: $\frac{V_1}{V_2}=\frac{IM}{IB}.\frac{IN}{IC'}.\frac{IC}{IC}=\frac{1}{9}$

Mà $V_1+V=V_2 \Rightarrow V=\frac{8}{9}V_2$.

Hạ AH vuông góc với BC tại H thuộc BC. Ta được AH vuông góc với mặt phẳng $(BB'C'C)$. AA' song song với mặt phẳng $(BB'C'C)$ nên khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(BB'C'C)$ bằng khoảng cách từ A đến $(BB'C'C)$ và bằng AH.

Ta có: $AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $V_2=\frac{1}{3}d\left[I,(BB'C'C)\right].S_{\Delta BCC'}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2\sqrt{2}}{2}=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

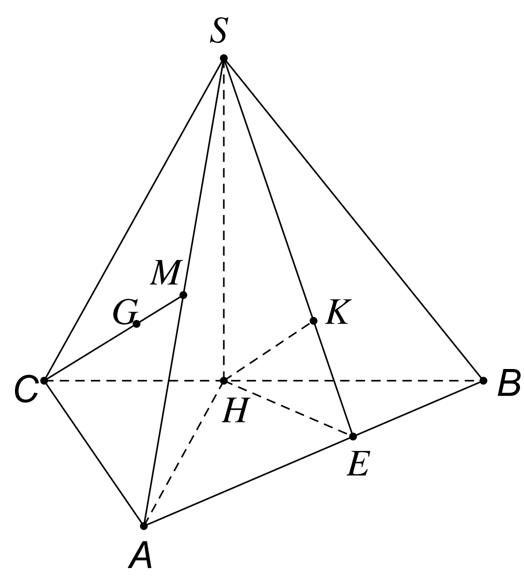
Suy ra : $V=\frac{8}{9}V_2=\frac{2a^3\sqrt{6}}{27}$.

Chọn B.

Bài 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh BC. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác SAC. Bán kính mặt cầu tâm G và tiếp xúc với mặt phẳng (SAB) là:

A . $\frac{\sqrt{13}a}{13}$ **B.** $\frac{\sqrt{13}a}{39}$ **C.** $\frac{3\sqrt{13}a}{26}$ **D.** $\frac{\sqrt{13}a}{26}$

Lời giải



+ Gọi H là trung điểm BC

+ $(SA,(ABC))=SAH=60^0$;

$AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $SH=AH\tan 60^0=\frac{3a}{2}$.

+ Bán kính mặt cầu là:

$R=d(G;(SAB))=\frac{1}{3}d(C;(SAB))=\frac{2}{3}d(H;(SAB))$.

+ Gọi E là hình chiếu của H trên AB và K là hình chiếu của H trên SE.

Chứng minh: $HK\perp(SAB)$.

+ Tính được : $HE=\frac{a\sqrt{3}}{4}$; $HK=\frac{3a}{2\sqrt{13}}$

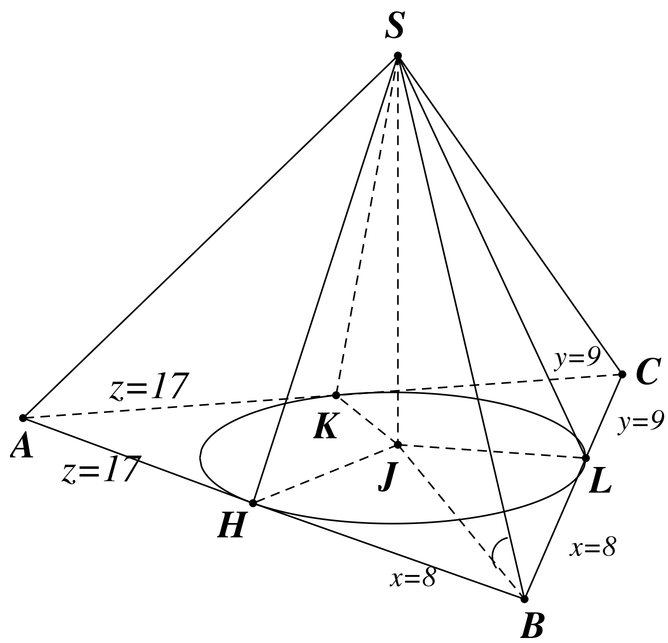
+ $R=\frac{2}{3}HK=\frac{a\sqrt{13}}{13}$.

Chọn A.

Bài 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có chân đường cao nằm trong tam giác ABC; các mặt phẳng $(SAB);(SAC);(SBC)$ cùng tạo với mặt phẳng (ABC) một góc bằng nhau. Biết $AB=25, BC=17, AC=26$, đường thẳng SB tạo với đáy một góc bằng 45^0. Tính thể tích V của khối chóp $SABC$.

A . $V=680$ **B.** $V=408$ **C.** $V=578$ **D.** $V=600$

Lời giải



Gọi J là chân đường cao của hình chóp $S.ABC; H, K$ và L lần lượt là hình chiếu của J trên các cạnh AB, BC và CA.

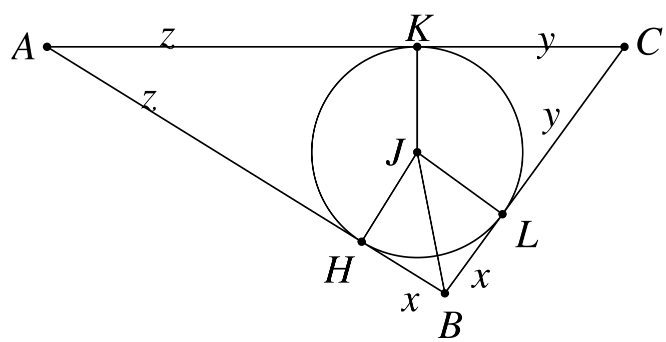
Suy ra SHJ, SLJ và SKJ lần lượt là góc tạo bởi mặt phẳng (ABC) với các mặt phẳng $(SAB), (SAC), (SBC)$.

Theo giả thiết ta có: $SHJ = SLJ = SKJ$, suy ra các tam giác vuông SJH, SJL, SJK bằng nhau.

Từ đó, $JH = JL = JK$. Mà J nằm trong tam giác ABC nên J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Áp dụng công thức Hê- rông, ta tính được diện tích của tam giác ABC là $S = 204$. Kí hiệu P là nửa chu vi tam giác ABC, r là bán kính đường tròn

nội tiếp của ABC. Ta có $r = \dfrac{S}{P} = \dfrac{204}{34} = 6.$



Đặt $x = BH = BL, y = CL = CK, z = AH = AK.$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 7 \\ x + z = 25 \\ y + z = 26 \end{cases}.$

Giải hệ phương trình ta được $(x; y; z) = (8; 9; 17)$

$JB = \sqrt{JH^2 + BH^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

Ta có $SBJ = (SB, (ABC)) = 45^0$, suy ra SJB là tam giác vuông cân tại J. $SJ = JB = 10.$

Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3} SJ.S_{\Delta ABC} = 680$

Chọn A.

ĐỀ SỐ 2

Bài 1: Một hình hộp có 6 mặt đều là các hình thoi có góc bằng 60^0 và cạnh bằng a. Tính thể tích hình hộp đó.

A . $\frac{a^3}{2}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\frac{a^3 2\sqrt{2}}{3}$

Lời giải

Ta có: $AB = AD = BD = a; AA'=A'B=A'D=a \Rightarrow A'ABCD$ là tứ diện đều.

$\Rightarrow$ Chân đường cao $A'H$ trùng với tâm của tam giác ABD.

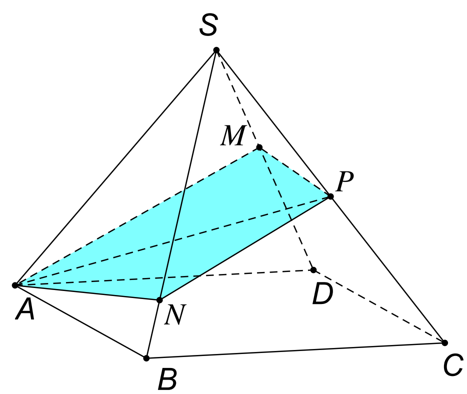
$\Rightarrow HA = HB = HD = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$

$\Rightarrow A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} = \frac{2}{3}a^2 \Rightarrow A'H = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$

Từ đó tìm được $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{2}.$

Chọn B.

Bài 2: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình bình hành và có thể tích là V. Điểm P là trung điểm của SC, một mặt phẳng qua AP cắt hai cạnh SD và SB lần lượt tại M và N. Gọi V_1 là thể tích khối chóp $SABCD$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V}$?



A . $\frac{3}{8}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{1}{8}$

Lời giải

Đặt $x = \frac{SM}{SD}; y = \frac{SN}{SB}, (0 < x, y \le 1).$

Khi đó ta có: $V_{SABC} = V_{SADC} = V_{SABD} = V_{SBCD} = \frac{V}{2}.$

Ta có: $\frac{V_1}{V} = \frac{V_{SAMPN}}{V} = \frac{V_{SAMP} + V_{SANP}}{V} = \frac{V_{SAMP}}{2V_{SADC}} + \frac{V_{SANP}}{2V_{SABC}}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{SM}{SD}.\frac{SP}{SC} + \frac{SN}{SB}.\frac{SP}{SC}\right) = \frac{1}{4}(x+y)$ (1)

Lại có: $\frac{V_1}{V} = \frac{V_{SAMPN}}{V} = \frac{V_{SAMN}}{2V_{SABD}} + \frac{V_{SMNP}}{2V_{SBCD}} = \frac{1}{2}\left(xy + \frac{1}{2}xy\right)$ (2)

Từ (1),(2) $\Rightarrow \frac{1}{4}(x+y) = \frac{3}{4}xy \Rightarrow y = \frac{x}{3x-1}$, vì $0 < y \le 1 \Rightarrow \frac{x}{3x-1} \le 1 \Rightarrow x \ge \frac{1}{2}$

Từ (2) suy ra: $\frac{V_1}{V}=\frac{3}{4}xy=\frac{3}{4}x.\frac{x}{3x-1}=\frac{3x^2}{4(3x-1)}=\frac{3}{4}f(x),\left(\frac{1}{2}\le x\le 1\right)$

Khảo sát hàm số: $y=f(x),\left(\frac{1}{2}\le x\le 1\right)\Rightarrow \min_{\frac{1}{2}\le x\le 1} f(x)=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}\Rightarrow \frac{V_1}{V}=\frac{1}{3}$

Chọn B.

Bài 3: Nếu một tứ diện chỉ có đúng một cạnh có độ dài lớn hơn 1 thì thể tích tứ diện đó lớn nhất là bao nhiêu?

A . $\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** $\frac{1}{8}$ **D.** $\frac{5}{8}$

Lời giải

Giả sử tứ diện $ABCD$ có cạnh lớn nhất là AB, suy ra các tam giác ACD và BCD có tất cả các cạnh đều không lớn hơn 1. Các chiều cao AF và BE của chúng không lớn hơn $\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$, trong đó $CD=a\le 1$.

Chiều cao hình tứ diện $AH\le \text{AF}\le \sqrt{1-\frac{a^2}{4}}$

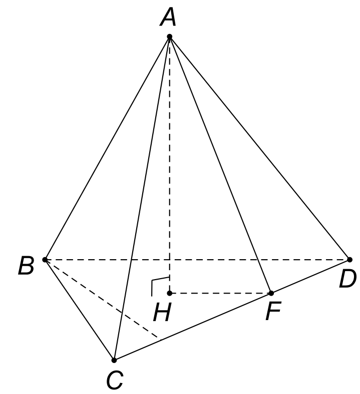
(do tam giác AHF vuông tại H có AF là cạnh huyền)

Thể tích của khối tứ diện là:

$V=\frac{1}{3}S_{BCD}.AH=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.BE.CD.AH\le \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.a.\left(1-\frac{a^2}{4}\right)=\frac{1}{24}a\left(4-a^2\right)$

Để tìm giá trị lớn nhất của V ta xét biểu thức $a\left(4-a^2\right)$.

Vì $0\le a\le 1$ nên $a\left(4-a^2\right)\le 3$ và $V\le \frac{1}{24}a\left(4-a^2\right)\le \frac{1}{8}$.



Chọn C.

Bài 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trên.

A . $\frac{a\sqrt{7}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{6}$ **C.** $\frac{a\sqrt{7}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{3}$

Lời giải

$R_{(S)}=\sqrt{\left(R_{ntSAB}\right)^2+\left(R_{ntABCD}\right)^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{21}}{3}$

Trong đó:

+ R_{ntSAB} là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB

+ R_{ntABCD} là bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$

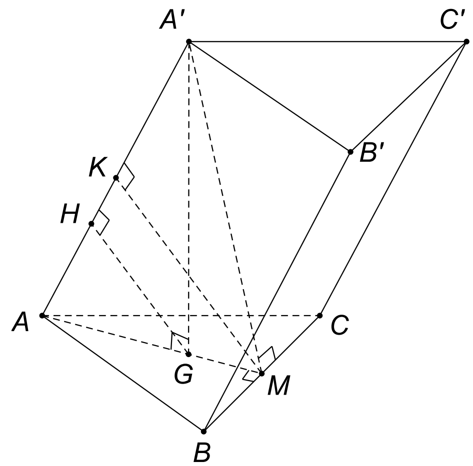
+ $(SAB)\cap(ABCD)=AB$

Chọn D.

Bài 5: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm G của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa AA' và BC là $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A . $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$

Lời giải



Gọi M là trung điểm $B \Rightarrow BC \perp (A'AM)$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của G, M trên AA'.

Vậy KM là đoạn vuông góc chung của AA' và BC, do đó: $d(AA', BC) = KM = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

$\Delta AGH \backsim \Delta AMK \Rightarrow \dfrac{KM}{GH} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow GH = \dfrac{2}{3}KM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

$\Delta AA'G$ vuông tại G, HG là đường cao, $A'G = \dfrac{a}{3}$

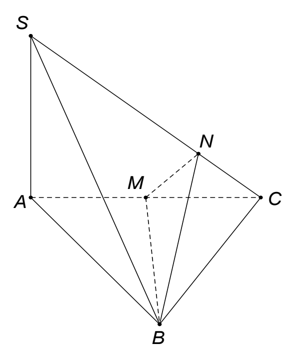
$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.A'G = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Chọn C.

Bài 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, đường thẳng SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 2a$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với SC. Khi đó diện tích của thiết diện của hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi mặt phẳng (P) là:

A . $\dfrac{a^2\sqrt{5}}{10}$ **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{15}}{5}$ **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{15}}{15}$ **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{15}}{20}$

Lời giải



Gọi M là trung điểm của AG.

Kẻ BN vuông góc SC tại N.

Khi đó: Thiết diện cần tìm là tam giác BMN vuông tại M.

Ta có: $\Delta CMN \backsim \Delta CSA \Rightarrow \dfrac{MN}{SA} = \dfrac{CM}{CS} \Rightarrow MN = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$

Vậy: Diện tích tam giác BMN bằng $\dfrac{a^2\sqrt{15}}{20}$

Chọn D.

Bài 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BC = 2a.$ Tam giác SAB có góc $ASB = 60^0, SB = a$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).

A . a **B.** $2a\sqrt{\frac{3}{19}}$ **C**. $a\sqrt{\frac{3}{19}}$ **D**. $2a\sqrt{\frac{3}{16}}$

Lời giải

$(SAB) \perp (ABC), (SAB) \cap (ABC) = AB; BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB)$

Trong mp (SAB) kẻ $BH \perp SA.$

Trong tam giác BCH kẻ $BK \perp CH.$

Ta có: $BK \perp (SAC).$

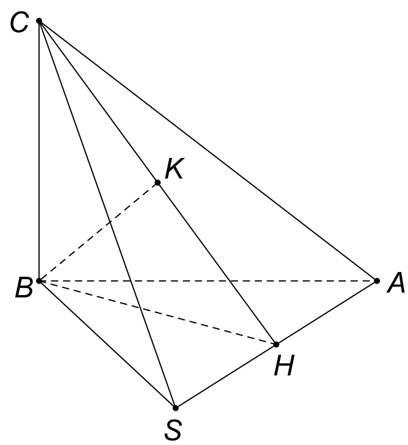
Vậy khoảng cách từ B đến (SAC) là BK.

$BH = SB.\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2};$

Xét tam giác vuông CBH, ta có:

$\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BH^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow BK = 2a\sqrt{\frac{3}{19}}.$

Vậy $d\left(B, (SAC)\right) = 2a\sqrt{\frac{3}{19}}.$

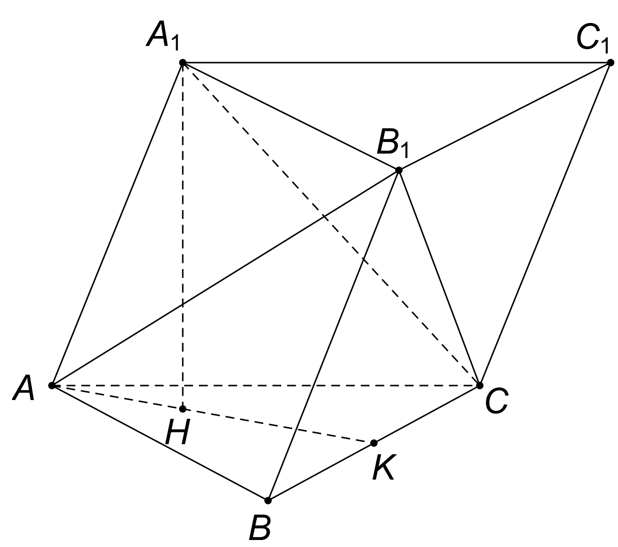


Chọn B.

Bài 8: Cho khối trụ tam giác $ABCA_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều cạnh $a, A_1A = 2a$ và A_1A tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60^0. Tính thể tích khối tứ diện $A_1B_1CA.$

A . $\frac{a^3}{4}$ **B.** $\frac{a^3}{2}$ **C**. $\frac{a^3}{5}$ **D**. $\frac{a^3}{8}$

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của A_1 trên mặt phẳng (ABC).

Khi đó $A_1H = A_1A.\sin A_1AH = 2a.\sin 60^0 = a\sqrt{3}.$

Mà $V_{LT} = A_1H.S_{ABC} = a\sqrt{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3}{4}$ nhận thấy khối lăng trụ được chia làm ba khối chóp.

Khối chóp $CA_1B_1C_1$ có $V_{B_1ABC}=\frac{1}{3}V_{LT'}$; khối chóp B_1ABC có $V_{B_1ABC}=\frac{1}{3}V_{LT}$

Khối chóp A_1B_1CA do đó $V_{A_1B_1AC}=\frac{1}{3}V_{LT}=\frac{a^3}{4}$.

Chọn A.

Bài 9: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và góc giữa SC với mặt phẳng (SAB) bằng 30^0. Gọi M là điểm di động trên cạnh CD và H là hình chiếu vuông góc của S trên đường thẳng BM. Khi điểm M di động trên cạnh CD thì thể tích của khối chóp SABH đạt giá trị lớn nhất bằng:

A . $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Lời giải

Ta có góc giữa SC và mặt phẳng (SAB) là $CSB=30^0$

Trong tam giác SBC có $SB=BC.\cot 30^0=a\sqrt{3}$

Trong tam giác SAB có $SA=\sqrt{SB^2-AB^2}=a\sqrt{2}$

Thể tích khối chóp $S.ABH$ là: $V_{S.ABH}=\frac{1}{3}S_{ABH}SA=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}HA.HB.a\sqrt{2}=\frac{a\sqrt{2}}{6}HA.HB$

Ta có $HA^2+HB^2=AB^2=a^2$ và theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có:

$a^2=HA^2+HB^2\geq 2HA.HB\Rightarrow HA.HB\leq\frac{a^2}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $HA=HB\Leftrightarrow ABM=45^0\Leftrightarrow M\equiv D$

Khi đó $V_{S.ABH}=\frac{a\sqrt{2}}{6}HA.HB\leq\frac{a\sqrt{2}}{6}.\frac{a^2}{2}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Chọn D.

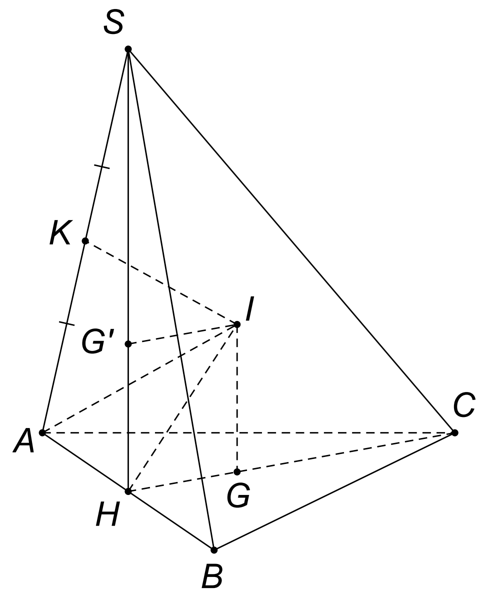
Bài 10: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A . $V=\frac{5\sqrt{15}\pi}{18}$ **B.** $V=\frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$ **C.** $V=\frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$ **D.** $V=\frac{5\pi}{3}$

Lời giải

Đặt R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp.

Dựng hình như hình bên với IG là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và IG' là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB.



Ta có: $G'H = \frac{\sqrt{3}}{6}; GH = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow IH = \frac{\sqrt{6}}{6}$

Do vậy, $R = \sqrt{IH^2 + HA^2} = \frac{\sqrt{15}}{6} \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$

Chọn B.

Bài 11: Bài thể tích liên quan đến cực trị:

Cho hình chóp $S.ABCD, SA$ là đường cao, đáy là hình chữ nhật với $SA = a, AB = b, AD = c.$ Trong mặt phẳng (SDB) lấy G là trọng tâm tam giác SDB , qua G kẻ đường thẳng d cắt cạnh BS tại M, cắt cạnh SD tại N, mp(AMN) cắt SC tại K. Xác định M thuộc SB sao cho V_{SAMKN} đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất đó.

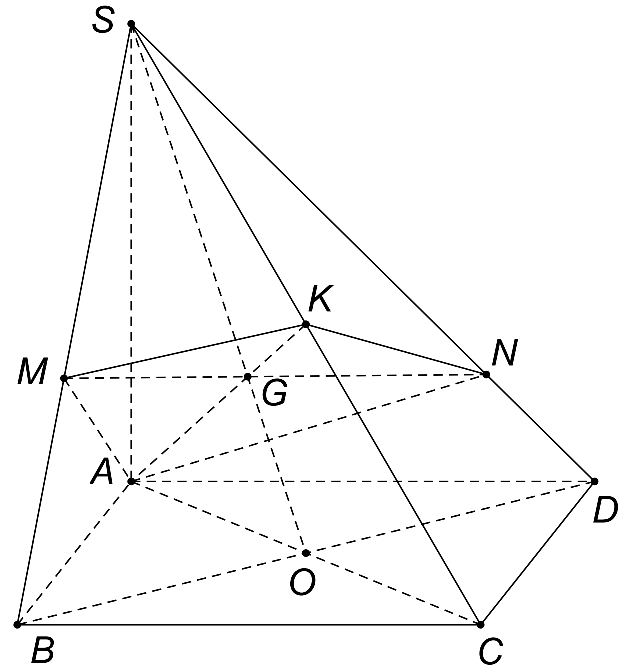
A . $V_{SAMKN \to \max} = \frac{abc}{8}, V_{SAMKN \to \min} = \frac{abc}{9}$

B. $V_{SAMKN \to \max} = \frac{abc}{8}, V_{SAMKN \to \min} = \frac{abc}{10}$

C. $V_{SAMKN \to \max} = \frac{abc}{9}, V_{SAMKN \to \min} = \frac{abc}{10}$

D. $V_{SAMKN \to \max} = \frac{abc}{10}, V_{SAMKN \to \min} = \frac{abc}{11}$

Lời giải



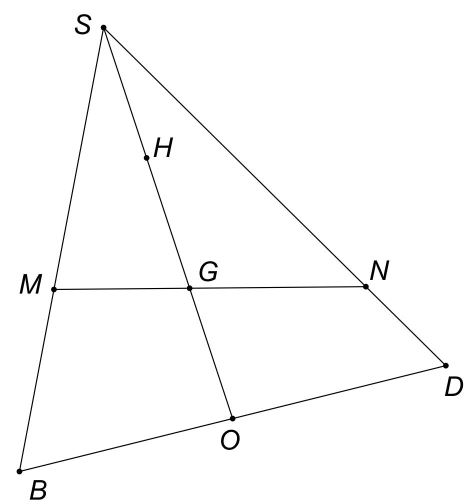
Gọi O là tâm hình chữ nhật ABCD.

Ta có: $SG = \dfrac{2}{3}SO$ và $K = AG \cap SC$ và K là trung điểm SC

$\dfrac{V_{SMAK}}{V_{SBAC}} = \dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SK}{SC} \Rightarrow V_{SMAK} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{SM}{SB}.V_{SBAC} = \dfrac{1}{4}\dfrac{SM}{SB}.V_{SBAC} = \dfrac{1}{12}\dfrac{SM}{SB}.a.b.c$

Tương tự $V_{SNAK} = \dfrac{1}{12}\dfrac{SN}{SC}.a.b.c$.

Do đó: $V_{SAMKN} = \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{SM}{SB} + \dfrac{SN}{SC}\right)a.b.c$



Trong mp (SBD):

$\dfrac{S_{SMN}}{S_{SBD}} = \dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC} = \dfrac{S_{SMG} + S_{SGN}}{2S_{SBO}} = \dfrac{S_{SMG}}{2S_{SBO}} + \dfrac{S_{SGN}}{2S_{SBO}} = \dfrac{SG.SM}{2.SO.SB} + \dfrac{SG.SN}{2.SO.SB} \Rightarrow \dfrac{SM.SN}{SB.SC} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{SM}{SB} + \dfrac{SN}{SC}\right)$

Do M, N lần lượt nằm trên cạnh SB, SD nên: $\dfrac{SB}{2} \le SM \le SB \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \le \dfrac{SM}{SB} \le 1$

Đặt $t=\dfrac{SM}{SN},\left(\dfrac{1}{2}\le t\le 1\right)$ thì $t.\dfrac{SN}{SC}=\dfrac{1}{3}\left(t+\dfrac{SN}{SC}\right)\Leftrightarrow\dfrac{SN}{SC}=\dfrac{t}{3t-1}$.

Nhận thấy V_{SAMKN} đạt GTLN, GTNN nếu: $f(t)=\dfrac{SM}{SB}+\dfrac{SN}{SC}=t+\dfrac{t}{3t-1}$ với $\dfrac{1}{2}\le t\le 1$.

Ta có $f'(t)=1-\dfrac{1}{(3t-1)^2}=\dfrac{9t^2-6t}{(3t-1)^2}$

Nên $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{2}{3},t=0$ (loại). $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2},f(1)=\dfrac{3}{2},f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{4}{3}$.

Do vậy $V_{SAMKN}=\dfrac{abc}{8}$ là GTLN khi M là trung điểm SB hoặc M trùng với B.

$V_{SAMKN}=\dfrac{abc}{9}$ là GTNN khi MB chiếm 1 phần SB.

Chọn A.

Bài 12: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a,$ thể tích khối lăng trụ bằng $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC'.

A . $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{22}}{7}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{23}}{7}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{24}}{7}$

Lời giải

$$V_{ABC.A'B'C'}=\text{AA}'.\text{S}_{ABC}\Rightarrow AA'=\frac{V_{ABC.A'B'C'}}{\text{S}_{ABC}}=\frac{a^3\dfrac{\sqrt{3}}{4}}{a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}}=a$$

Do $\text{AA}'//BB'$ nên $AA'//(BB'C'C)$

Suy ra: $d(AA',BC')=d(AA',(BB'C'C))=d(A,(BB'C'C))$.

Hạ $AH\perp A'M\Rightarrow AH\perp(BB'C'C),AM\perp BC$ và $AA'\perp BC$.

Suy ra: $BC\perp(BCC'B')\Rightarrow(A'AM)\perp(BCC'B')$

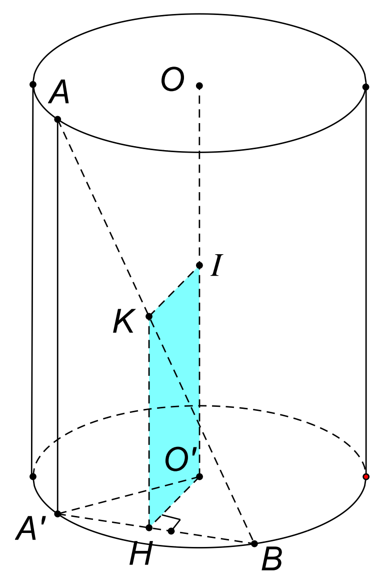
Hạ $AH\perp A'M\Rightarrow AH\perp(BCC'B')$

Do đó $d(A,(BB'C'C))=AH$.

Ta có: $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AM^2}+\dfrac{1}{A'A^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{4}{3a^2}=\dfrac{7}{3a^2}\Rightarrow AH=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn A.

Bài 13: Cho hình trụ nội tiếp trong hình cầu bán kính R. Xác định chiều cao và bán kính đáy để hình trụ có thể tích lớn nhất.



A . $r=\dfrac{\sqrt{6}}{4}R$ **B.** $r=\dfrac{\sqrt{6}}{3}R$ **C.** $r=\dfrac{\sqrt{6}}{7}R$ **D.** $r=\dfrac{\sqrt{6}}{5}R$

Lời giải

Gọi h là chiều cao của hình trụ, r là bán kính đáy của hình trụ. Ta có: $\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 = R^2$.

Thể tích của hình trụ là: $V = \pi r^2 h = \pi R^2 h - \pi \frac{h^3}{4}$.

Xét hàm: $V(h) = \pi r^2 h = \pi R^2 h - \pi \frac{h^3}{4h}$;

$V'(h) = \pi R^2 - \pi \frac{3h^2}{4}$;

$V'(h) = 0 \Leftrightarrow \pi R^2 - \pi \frac{3h^2}{4} = 0 \Leftrightarrow h = \sqrt{\frac{4R^2}{3}} = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$.

Từ bảng biến thiên ta có $h = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$ thì $V(h)$ đạt giá trị lớn nhất.

Suy ra $r = \frac{\sqrt{6}}{3}R$.

Chọn B.

Bài 14: Một hình trụ có bán kính đáy là R và chiều cao $R\sqrt{3}$. Hai điểm A và B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa AB và trục của hình trụ bằng 30^0. Tính khoảng cách giữa AB và trục của hình trụ.

A . $\frac{R\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{3R\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Kẻ $BB'//OO'$ cắt đường tròn (O) tại B'.

Góc giữa AB và OO' là góc $ABB' = 30^0$. Hạ OH vuông góc AB. Khoảng cách giữa AB và OO' bằng khoảng cách giữa OO' và (ABB') vì $OO'//(ABB')$.

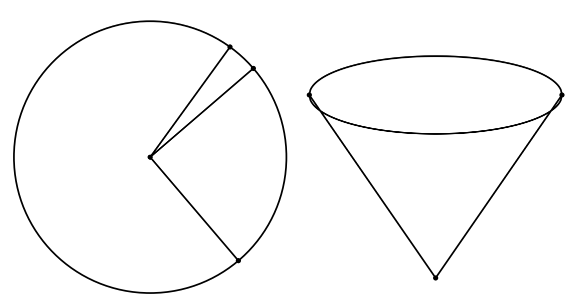
Khi đó $d(OO', AB) = d(OO', (ABB')) = OH$

$AB' = R \Rightarrow OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

Chọn B.

Bài 15:

Với một miếng tôn hình tròn có bán kính bằng $R = 6cm$. Người ta muốn làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của hình tròn này và gấp phần còn lại thành hình nón (Như hình vẽ).

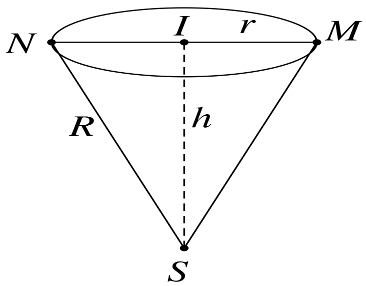


Hình nón có thể tích lớn nhất khi người ta cắt cung tròn của hình quạt bằng:

A . $4\pi\sqrt{6}cm$ **B.** $6\pi\sqrt{6}cm$

C. $2\pi\sqrt{6}cm$ **D.** $8\pi\sqrt{6}cm$

Lời giải



Gọi $x, (x > 0)$ là chiều dài cung tròn của phần được xếp làm hình nón.

Như vậy, bán kính R của hình nón sẽ là đường sinh của hình nón và đường tròn đáy của hình nón sẽ có độ dài là x.

Bán kính r của đáy được xác định bởi đẳng thức $2\pi r = x \Rightarrow r = \dfrac{x}{2\pi}$.

Chiều cao của hình nón tính theo Định lý Pitago là: $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \dfrac{x^2}{4\pi^2}}$.

Thể tích của khối nón: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2\sqrt{R^2 - \dfrac{x^2}{4\pi^2}}$.

Áp dụng Bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$V^2 = \frac{4\pi^2}{9}.\frac{x^2}{8\pi^2}.\frac{x^2}{8\pi^2}\left(R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \le \frac{4\pi^2}{9}\left(\frac{\dfrac{x^2}{8\pi^2} + \dfrac{x^2}{8\pi^2} + R^2 - \dfrac{x^2}{4\pi^2}}{3}\right)^3 = \frac{4\pi^2}{9}.\frac{R^6}{27}$$

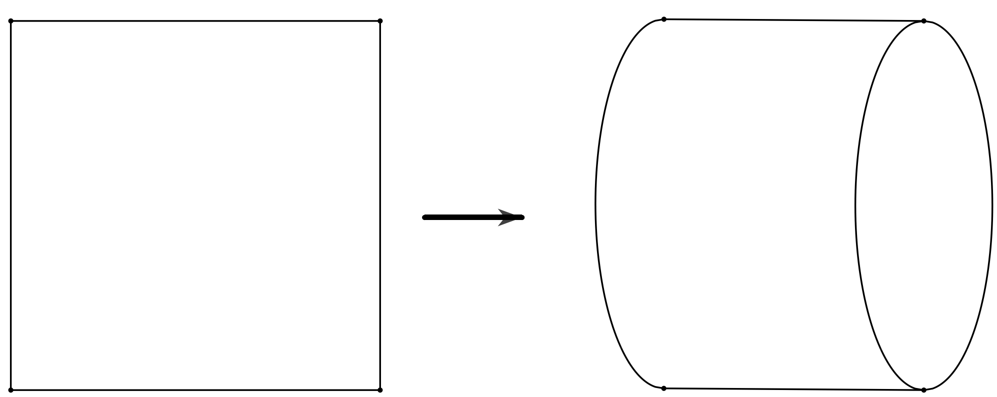
Do đó V lớn nhất khi và chỉ khi: $\dfrac{x^2}{8\pi^2} = R^2 - \dfrac{x^2}{4\pi^2} \Leftrightarrow x = \dfrac{2\pi}{3}R\sqrt{6} = \dfrac{2\pi}{3}6\sqrt{6} = 4\pi\sqrt{6}$.

Chọn A.

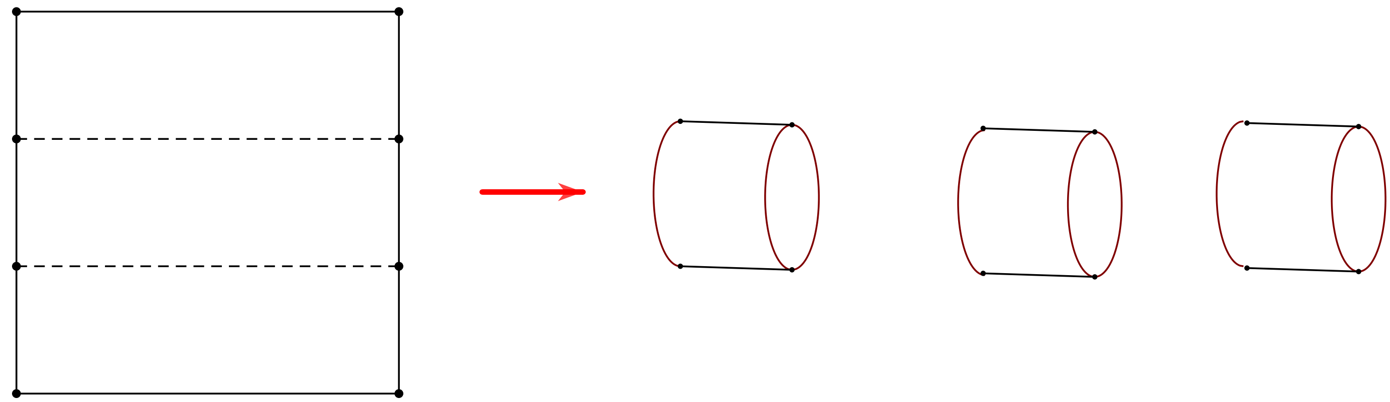
(Lưu ý bài có thể sử dụng đạo hàm để tìm giá trị lớn nhất, tuy nhiên lời giải bài sẽ dài hơn)

Bài 16: Có một miếng nhôm hình vuông, cạnh là $3dm$, một người dự định tính tạo thành các hình trụ (không đáy) theo hai cách sau:

Cách 1: Gò hai mép hình vuông để thành mặt xunng quanh của một hình trụ, gọi thể tích của khối trụ đó là V_1.



Cách 2: Cắt hình vuông ra làm ba và gò thành mặt xung quanh của ba hình trụ, gọi tổng thể tích của chúng là V_2.



Khi đó, tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là:

A . 3 **B.** 2 **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{1}{3}$

Lời giải

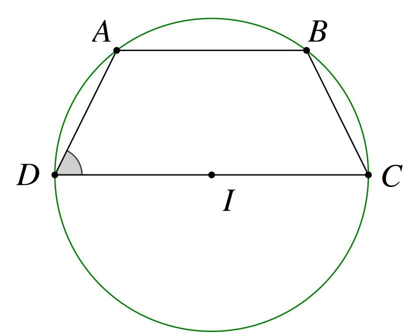
Gọi R_1 là bán kính đáy của khối trụ thứ nhất, có: $2\pi R_1 = 3 \Leftrightarrow R_1 = \frac{3}{2\pi} \Rightarrow V_1 = \pi R_1^{\,2} h = \frac{27}{4\pi}$

Gọi R_2 là bán kính đáy của khối trụ thứ hai, có: $2\pi R_2 = 1 \Leftrightarrow R_2 = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow V_2 = \pi R_2^{\,2} h = \frac{9}{4\pi}$

Chọn A.

Bài 17:

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang nội tiếp đường tròn (C) tâm I, cho biết $AB//CD, CD = 2AB, CDA = 60^0$. Giả sử thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng v, tính thể tích khối nón đỉnh S và đáy là hình tròn (C).



A . $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}v$ **B.** $\frac{5\pi}{3\sqrt{3}}v$

C. $\frac{7\pi}{3\sqrt{3}}v$ **D.** $\frac{8\pi}{3\sqrt{3}}v$

Lời giải

Do hình chóp và hình nón đã cho có cùng đường cao nên tỷ số thể tích của khối chóp và khối nón bằng tỉ số diện tích của hai đáy, tức là bằng $k = \frac{\frac{1}{2}(AB + DC)AH}{\pi r^2}$.

Dễ thấy tâm I là trung điểm CD, để cho đơn giản cho $AB = 1$ ta có $k = \frac{(1+2)\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\pi.1^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

Chọn A.

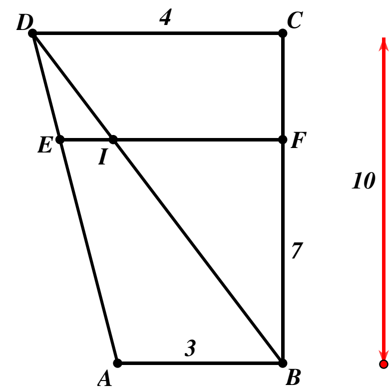
Bài 18:

Cho một chiếc cốc có dạng nón cụt, biết miệng cốc và đáy cốc có bán kính lần lượt là $4cm$ và $3cm$, chiều cao cốc là $10cm$. chiều cao nước trong cốc là $7cm$ thì thể tích nước trong cốc là bao nhiêu?

A . $\dfrac{8113}{300}\pi\left(ml\right)$ **B.** $\dfrac{39823}{300}\pi\left(ml\right)$

C. $\dfrac{25900}{300}\pi\left(ml\right)$ **D.** $\dfrac{23653}{300}\pi\left(ml\right)$

Lời giải



$V=\dfrac{\pi h}{3}\left(R^2+r^2+rR\right)$

ΔIDC có $IF//CD \Rightarrow \dfrac{\text{IF}}{DC}=\dfrac{FB}{BC} \Leftrightarrow \text{IF=2,8cm}$

ΔDAB có $EI//AB \Rightarrow \dfrac{EI}{AB}=\dfrac{DE}{DA}=\dfrac{CF}{FB}$

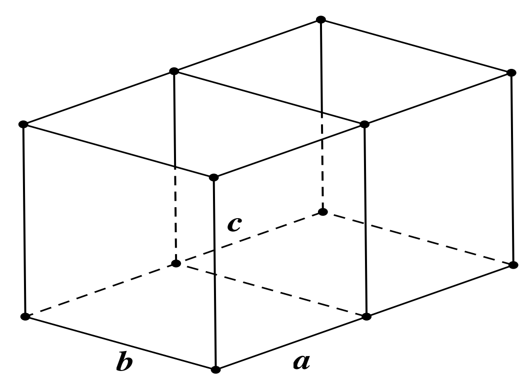
$\Rightarrow EI=0,9cm=\text{EF=3,7cm}$

$V=\dfrac{\pi 7}{3}\left(3,7^2+3^2+3,7.3\right)=\dfrac{23653}{300}\pi.$

Chọn D.

Bài 19:

Người thợ cần làm một bể cá hai ngăn, không có nắp ở phía trên với thể tích $1,296m^3$. Người thợ này cắt các tấm kính ghép lại một bể cá dạng hình hộp chữ nhật với ba kích thước a,b,c như hình vẽ. Hỏi người thợ phải thiết kế các kích thước a,b,c bằng bao nhiêu để đỡ tốn kính nhất, giả sử độ dày của kính không đáng kể.



A . $a=3,6m;b=0,6m;c=0,6m$

B. $a=2,4m;b=0,9m;c=0,6m$

C. $a=1,8m;b=1,2m;c=0,6m$

D. $a=1,2m;b=1,2m;c=0,9m$

Lời giải

Với a là chiều dài của cả 2 ngăn của bể cá. Ta có: $V=abc=1,296$ (1)

$S=2\left(\dfrac{a}{2}c+bc\right)+\dfrac{a}{2}b+2\dfrac{a}{2}c+bc+\dfrac{a}{2}b=2ac+3bc+ab=2\dfrac{abc}{b}+3\dfrac{abc}{a}+\dfrac{abc}{c}\geq abc3\sqrt[3]{\dfrac{6}{abc}}$

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{2}{a}=\dfrac{3}{a}=\dfrac{1}{c}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}b\\ c=\dfrac{b}{2}\end{cases}$

Thay vào (1): $\dfrac{3}{4}b^3=1,296\Leftrightarrow b^3=\dfrac{1,296.4}{3}\Rightarrow b=\dfrac{6}{5};a=1,8;c=0,6.$

Chọn C.