

CHƯƠNG 04 (tiếp theo)

BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO SỐ PHỨC

CHỦ ĐỀ 2.

PHƯƠNG TRÌNH SỐ PHỨC.

Bài 26: Tập hợp điểm biểu diễn số phức $|z-2i|=3$ là đường tròn tâm I . Tất cả giá trị m thỏa mãn khoảng cách từ I đến $\Delta: 3x+4y-m=0$ bằng $\frac{1}{5}$ là:

A. $m=-7; m=9$

B. $m=-8; m=8$

C. $m=7; m=9$

D. $m=8; m=9$

Lời giải

$$|z-2i|=3 \Leftrightarrow |x+(y-2)i|=3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-2)^2}=3 \Leftrightarrow x^2+(y-2)^2=9 \Rightarrow I(0;2)$$

$$d(I, \Delta) = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 - m|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{5} |8 - m|$$

$$d(I, \Delta) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{5} |8 - m| = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - m = 1 \\ 8 - m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 7 \\ m = 9 \end{cases}$$

Chọn C.

Bài 27: Trong mặt phẳng phức, cho M là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi, M \neq 0$. Xem số phức $Z = \frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{1}{z^2} \right)$. Tìm tập hợp điểm M sao cho Z là một số thực.

- A. Trục tung (hay trục hoành), không kể điểm O .
- B. Trục tung hay trục hoành
- C. Đường thẳng $y = 1$
- D. Đường thẳng $x = 1$

Lời giải

Trường hợp Z là một số thực \Leftrightarrow Phần ảo bằng 0.

$$\Leftrightarrow \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \left[(x^2 + y^2)^2 + 1 \right] = 0 \Leftrightarrow xy = 0, x^2 + y^2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y \neq 0 \\ y = 0, x \neq 0 \end{cases}$$

Tập hợp điểm M trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z là

- Trục tung, không kể điểm O .
- Trục hoành, không kể điểm O .

Chọn A.

Bài 28: Trong mặt phẳng phức, cho M là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi, M \neq 0$. Xem số phức $Z = \frac{1}{2} \left(z^2 - \frac{1}{z^2} \right)$. Tìm tập hợp điểm M sao cho Z là một số thuần ảo.

- A. Đường tròn tâm O , bán kính $R=1$
- B. Đường tròn tâm $I(0;1)$ bán kính $R=1$
- C. Đường thẳng $y=1$
- D. Đường thẳng $x=1$

Lời giải

Trường hợp Z là một số thuần ảo \Leftrightarrow Phần thực bằng 0.

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Tập hợp điểm M là đường tròn tâm O , bán kính $R=1$.

Chọn A.

Bài 29: Cho $Z = \frac{1-iz}{1+iz}$, $z \in \mathbf{C}$, $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbf{R}$. Tìm tập hợp điểm M sao cho Z là một số thực.

- A. Trục tung ngoại trừ điểm $A(0;1)$
- B. Trục hoành ngoại trừ điểm $A(0;1)$
- C. Đường thẳng $y=1$
- D. Đường thẳng $x=1$

Lời giải

$$\text{Ta có: } z = x + yi; x, y \in \mathbf{R} \Rightarrow Z = \frac{1-zi}{1+zi} = \frac{1-i(x+yi)}{1+i(x+yi)}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{1-yi^2-xi}{1+yi^2+xi} = \frac{1+y-xi}{1-y+xi} = \frac{(1+y-xi)(1-y-xi)}{(1-y+xi)(1-y-xi)}$$

$$= \frac{(1-xi)^2 - y^2}{(1-y)^2 - x^2i^2} = \frac{1+x^2i^2 - 2xi - y^2}{(1-y)^2 + x^2} = \frac{1-x^2-y^2-2xi}{(1-y)^2 + x^2}$$

Z là một số thực $\Leftrightarrow x=0, y \neq 0$

Ta có $z = yi, y \neq 1$.

\Rightarrow Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là trục tung ngoại trừ điểm $A(1;0)$.

Chọn A.

Bài 30: Cho $Z = \frac{1-iz}{1+iz}$, $z \in \mathbf{C}$, $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbf{R}$. Tìm tập hợp điểm M sao cho Z là một số thuần ảo.

- A. Đường tròn tâm O , bán kính $R=1$ ngoại trừ điểm $A(0;1)$
- B. Đường tròn tâm O , bán kính $R=1$
- C. Đường thẳng $y=1$
- D. Đường thẳng $x=1$

Lời giải

$$\text{Số phức } Z \text{ là một số thuần ảo khi và chỉ khi: } \begin{cases} 1-x^2-y^2=0 \\ (1-y)^2+x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x \neq 0, y \neq 0 \end{cases}$$

\Rightarrow Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn tâm O , bán kính $R=1$ ngoại trừ điểm $A(0;1)$

Chọn A.

Bài 31: Trong mặt phẳng phức, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z sao cho: Số phức z có môđun bằng 1.

- A. Đường tròn tâm O , bán kính $R=1$
- B. Đường tròn tâm $O(2;2)$, bán kính $R=1$
- C. Đường thẳng $y=1$
- D. Đường thẳng $x=1$

Lời giải

Gọi M là điểm nằm trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbf{R}$

Ta có: $|z|=1 \Leftrightarrow OM = 1$

Tập hợp điểm M là đường tròn tâm O , bán kính $R=1$

Chọn A.

Bài 32: Trong mặt phẳng phức, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z sao cho: Số phức z có phần thực bằng 1.

- A. Đường tròn tâm O , bán kính $R=1$
- B. Đường tròn tâm $O(2;2)$, bán kính $R=1$
- C. Đường thẳng $y=1$
- D. Đường thẳng $x=1$

Lời giải

Ta có: $a=1$

Tập hợp điểm M là đường thẳng $D: x=1$

Chọn D.

Bài 33: Trong mặt phẳng phức, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z sao cho: Số phức z có phần ảo bằng -1.

- A. Đường tròn tâm O , bán kính $R=1$
- B. Đường tròn tâm $O(2;2)$, bán kính $R=1$
- C. Đường thẳng $y=-1$
- D. Đường thẳng $x=1$

Lời giải

Ta có: $b=-1$

Tập hợp điểm M là đường thẳng $\Delta: y=-1$

Chọn C.

Bài 34: Tìm trong mặt phẳng tập hợp (λ) các điểm M biểu diễn số phức z sao cho $Z = z + \frac{4}{z}$ là một số thực.

- A. Trục hoành $x'Ox$ ngoại trừ điểm gốc và đường tròn tâm O , bán kính $R=2$
- B. Trục hoành $x'Ox$ ngoại trừ điểm gốc và đường tròn tâm O , bán kính $R=1$
- C. Đường tròn tâm O , bán kính $R=1$
- D. Trục hoành $x'Ox$ ngoại trừ điểm gốc

Lời giải

Đặt $z = x + yi, (z \neq 0)$ với $x, y \in \mathbf{R}$.

$$\text{Ta có: } Z = z + \frac{4}{z} = x + yi + \frac{4}{x + yi} = x + yi + \frac{4(x - yi)}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{x(x^2 + y^2 + 4) + y(x^2 + y^2 - 4)i}{x^2 + y^2}$$

$$Z \text{ là một số thực: } \Leftrightarrow \begin{cases} y(x^2 + y^2 + 4) = 0 \\ x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \vee x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases}$$

Do đó (λ) gồm :

- Trục hoành $x'Ox$ ngoại trừ điểm gốc.
- Đường tròn tâm O , bán kính $R = 2$.

Chọn A.

Bài 35: Trong mặt phẳng phức, tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z sao cho: $|z| = 2|z - i|$.

A. $x^2 + y^2 - \frac{8}{3}y + \frac{4}{3} = 0$

B. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$

C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

D. $3x^2 + 4y^2 - 36 = 0$

Lời giải

Cách 1. Đặt $z = x + yi, (z \neq 0)$ với $x, y \in R$

Ta có: $|z| = 2|z - i| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4(x^2 + (y-1)^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{8}{3}y + \frac{4}{3} = 0$

Cách 2. Ta có: $|z| = 2|z - i| \Leftrightarrow |\overline{OM}| = 2|\overline{OM} - \overline{OB}| \Leftrightarrow |\overline{OM}| = 2|\overline{BM}|$

Với $B(1;0)$ là điểm biểu diễn số i .

Do đó ta có: $OM = 2BM \Leftrightarrow \frac{MO}{MB} = 2$

Ta suy ra tập hợp các điểm M là đường tròn Apollonius đường kính IJ , với I, J thuộc trục tung và:

$$\begin{aligned} \overline{OI} &= 2\overline{IB} \\ \overline{OJ} &= -2\overline{JB} \end{aligned} \Rightarrow I\left(0; \frac{2}{3}\right) \text{ và } J(0; 2)$$

Phương trình đường tròn: $x^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 (y - 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{8}{3}y + \frac{4}{3} = 0$

Chọn A.

Bài 36: Trong mặt phẳng phức, tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z sao cho: $|1 - z| = |z - i|$.

- A.** Đường thẳng $y = x$
- B.** Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R = 1$
- C.** Đường thẳng $y = 1$
- D.** Đường thẳng $x = 1$

Lời giải

Cách 1. Đặt $z = x + yi, (z \neq 0)$ với $x, y \in R$

Ta có: $|1 - z| = |z - i| \Leftrightarrow (1 - x)^2 + y^2 = x^2 + (y - 1)^2 \Leftrightarrow y = x$.

Cách 2. Gọi A là ảnh của 1 và B là ảnh của i : $A(1;0), B(0;1)$.

Ta có: $|1 - z| = |z - i| \Leftrightarrow |\overline{MA}| = |\overline{MB}| \Leftrightarrow MA = MB$

Do đó tập hợp các điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng $AB \Rightarrow y = x$

Chọn A.

Bài 37: Trong mặt phẳng phức, cho số phức a bất kì, tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z sao cho: $|z - a| \cdot |\overline{z} - \overline{a}| = a\overline{a}$.

- A.** Đường tròn tâm A , bán kính $R = AO$

- B. Đường tròn tâm A , bán kính $R=2$
- C. Một hyperbol vuông góc
- D. Đường thẳng $x=1$

Lời giải

Ta có: $|z-a| \cdot |\bar{z}-\bar{a}| = a\bar{a} \Leftrightarrow |z-a|^2 = |a|^2$ (1)

Gọi A là điểm biểu diễn số phức a trong mặt phẳng phức.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow |\overline{MA}|^2 = |\overline{OA}|^2 \Leftrightarrow AM^2 = OA^2 \Rightarrow AM = AO$

Do đó, tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A , bán kính $R=AO$.

Chọn A.

Bài 38: Trong mặt phẳng phức, cho số phức a bất kì, tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z sao cho: $z^2 - a^2 = \bar{z}^2 - \bar{a}^2$.

- A. Đường tròn tâm A , bán kính $R=AO$
- B. Đường tròn tâm A , bán kính $R=2$
- C. Một hyperbol vuông góc
- D. Đường thẳng $x=1$

Lời giải

Ta có: $z^2 - a^2 = \bar{z}^2 - \bar{a}^2 \Leftrightarrow z^2 - \bar{z}^2 = a^2 - \bar{a}^2 \Leftrightarrow (z+\bar{z})(z-\bar{z}) = (a+\bar{a})(a-\bar{a})$ (2)

Đặt: $\begin{cases} z = x + yi \\ a = \alpha + \beta i \end{cases}$

Ta có: (2) $\Leftrightarrow 2x(2yi) = 2\alpha(2\beta i) \Leftrightarrow xy = \alpha\beta$

Do đó, tập hợp các điểm M là một hyperbol vuông góc.

Chọn C.

Bài 39: Trong mặt phẳng phức, tìm tập hợp các điểm M là ảnh của số phức z sao cho: Ảnh của các số i, z, iz thẳng hàng.

- A. Đường tròn $x^2 + y^2 - x - y = 0$, có tâm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ngoại trừ điểm $(0;1)$
- B. Đường tròn $x^2 + y^2 - x - y = 0$, có tâm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- C. Một hyperbol vuông góc
- D. Đường thẳng $x=1$

Lời giải

Cách 1: Gọi điểm biểu diễn số phức z là $M(x; y)$.

Gọi điểm biểu diễn số phức i là $N(0;1)$.

Gọi điểm biểu diễn số phức iz là $P(-y; x)$.

$\overline{NM} = (x; y-1); \overline{NP} = (-y; x-1)$

Vì 3 điểm M, N, P thẳng hàng nên ta có: $x(x-1) = -y(y-1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - y = 0$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn $x^2 + y^2 - x - y = 0$, có tâm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ngoại trừ điểm $(0;1)$.

Cách 2: Kí hiệu $M(z)$ dùng để chỉ M là điểm biểu diễn số phức z hay ảnh của số phức z .

Giả sử các điểm $A(i), M(z), M'(iz)$ thẳng hàng:

$$\Leftrightarrow \overline{MM'} = k\overline{MA}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow iz - z = k(i - z) \Leftrightarrow k = \frac{iz - z}{i - z}$$

$$\text{Đặt } z = x + yi \Rightarrow k = \frac{i(x + yi) - (x + yi)}{i - (x + yi)} \Rightarrow k = \frac{[(-y - x) + (x - y)i][-x + (y - 1)i]}{[-x - (y - 1)i][-x + (y - 1)i]}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{x^2 + y^2 + x - y}{x^2 + (y - 1)^2} - \frac{x^2 + y^2 - x - y}{x^2 + (y - 1)^2} i$$

$$k \text{ là một số thực. Do đó ta có: } \begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 0 \\ x^2 + (y - 1)^2 \neq 0 \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn $x^2 + y^2 - x - y = 0$, có tâm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ngoại trừ điểm $(0; 1)$.

Chọn A.

Bài 40: Trong mặt phẳng phức, tìm tập hợp các điểm M là ảnh của số phức z sao cho: Ảnh của các số z, z^2, z^4 thẳng hàng.

A. Đường tròn $x^2 + y^2 - x - y = 0$, có tâm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = 1$ ngoại trừ điểm $(0; 1)$

B. Đường tròn $x^2 + y^2 - x - y = 0$, có tâm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$

C. Một hyperbol vuông góc và trục hoành Ox

D. Đường thẳng $x = -\frac{1}{2}$ và trục hoành Ox

Lời giải

Các điểm $M(z), M'(z^2), M''(z^4)$ thẳng hàng.

$$\Leftrightarrow \overline{MM''} = k\overline{MM'}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^4 - z = k(z^2 - z) \Leftrightarrow z(z^3 - 1) - kz(z - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow z(z - 1)(z^2 + z + 1 - k) = 0, z \neq 0, 1 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 - k = 0$$

Đặt $z = x + yi; x, y \in \mathbb{R}$

$$\text{Ta có: } k = z^2 + z + 1 = (x + yi)^2 + (x + yi) + 1 \Leftrightarrow k = x^2 - y^2 + x - 1 + (2xy + y)i$$

$$k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2xy + y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee x = -\frac{1}{2}$$

Vậy tập hợp điểm M gồm:

+ Trục hoành Ox .

+ Đường thẳng $x = -\frac{1}{2}$.

Chọn D.

Bài 41: Trong mặt phẳng phức, cho m và M là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi, M \neq 0$.

$Z = X + Yi = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$. Tìm tập hợp điểm M sao cho Z là một số thực.

A. Đường tròn tâm O , bán kính $R = 1$ và trục hoành Ox , không kể điểm gốc O

B. Đường tròn tâm O , bán kính $R = 1$

C. Đường thẳng $y = 1$.

D. Đường thẳng $x = -\frac{1}{2}$ và trục hoành Ox

Lời giải

$$\text{Ta có: } Z = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2} \left(x + yi + \frac{1}{x + yi} \right) = \frac{(x^2 + y^2 + 1)x}{2(x^2 + y^2)} + \frac{(x^2 + y^2 - 1)y}{2(x^2 + y^2)}$$

$$Z \text{ là số thực khi và chỉ khi: } Y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2 - 1)y = 0 \\ x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Tập hợp các điểm M phải gồm:

+ Trục hoành Ox , không kể điểm gốc O .

+ Đường tròn tâm O , bán kính $R = 1$

Chọn A.

Bài 42: Trong mặt phẳng phức, cho m và M theo thứ tự là điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$ và

$Z = \frac{z-1}{z+2i}$. Tìm tập hợp các điểm m sao cho: Z là một số thực.

A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R = 1$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R = 1$

C. Đường thẳng $y = 2x - 2$

D. Đường thẳng $x = 1$

Lời giải

$$\text{Ta có: } Z = \frac{z-1}{z+2i} = \frac{(x+yi)-1}{(x+yi)+2i} = \frac{x-1+yi}{x+(y+2)i} = \frac{(x-1+yi)(x-(y+2)i)}{(x+(y+2)i)(x-(y+2)i)}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{x(x-1) + y(y+2) + (y-2x+2)i}{x^2 + (y+2)^2}$$

Z là một số thực khi và chỉ khi $y - 2x + 2 = 0$

Tập hợp các điểm m biểu diễn số phức $z = x + yi$ là đường thẳng $y - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 2$

Chọn C.

Bài 43: Trong mặt phẳng phức, cho m và M theo thứ tự là điểm biểu diễn của số phức $z = x + yi$ và

$Z = \frac{z-1}{z+2i}$. Tìm tập hợp các điểm m sao cho: Z là một số thuần ảo.

A. Đường tròn tâm $I\left(\frac{1}{2}; -1\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R = 1$

C. Đường thẳng $y = 2x - 2$

D. Đường thẳng $x = 1$

Lời giải

$$\text{Ta có: } Z = \frac{z-1}{z+2i} = \frac{(x+yi)-1}{(x+yi)+2i} = \frac{x-1+yi}{x+(y+2)i} = \frac{(x-1+yi)(x-(y+2)i)}{(x+(y+2)i)(x-(y+2)i)}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{x(x-1) + y(y+2) + (y-2x+2)i}{x^2 + (y+2)^2}$$

Z là một số thuần ảo khi và chỉ khi: $x(x-1)+y(y+2)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-x+2y=0$

Tập hợp các điểm m là đường tròn tâm $I\left(\frac{1}{2}; -1\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Chọn A.

Bài 44: Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z sao cho: $z + \bar{z} = k|z|$. Với k là một số thực cho trước.

A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Nửa trục Ox , nửa trục Ox'

D. Nửa trục Ox'

Lời giải

Đặt $z = x + yi; x, y \in R$

Ta có: $z + \bar{z} = k|z|$ (1) $\Leftrightarrow 2x = k\sqrt{x^2 + y^2}$ (2)

Nếu $k = 0$, ta có: $x = 0$

Tập hợp các điểm M là trục tung.

Xét $k \neq 0$:

Ta có: (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 = k^2(x^2 + y^2) \\ kx \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4 - k^2)x^2 = k^2y^2 \\ kx \geq 0 \end{cases}$

Với $-2 \leq k \leq 2$ và $k \neq 0$, ta có:

$y^2 = \frac{4 - k^2}{k^2}x^2 \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{4 - k^2}}{k}x$ ($kx \geq 0$)

Do đó, tập hợp M phải tìm là:

- Các đường thẳng $y = \pm \frac{\sqrt{4 - k^2}}{k}x$
- + Giới hạn bởi $0 < k < 2, x \geq 0$.
- + Hoặc giới hạn bởi $-2 < k < 0, x \leq 0$.
- Nửa trục Ox nếu $k = 2$.
- Nửa trục Ox' nếu $k = -2$.

Chọn C.

Bài 45: Cho hai số phức: $p = a + bi; q = c + di$

Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z sao cho số $(z - p)(z - q)$ là số thực.

A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Một hyperbol vuông góc có tiệm cận là $x = \frac{a+c}{2}; y = \frac{b+d}{2}$

D. Các đường thẳng $y = 2x$, trừ gốc tọa độ $O(0;0)$

Lời giải

Đặt $z = x + yi; x, y \in R$

Ta có: $z - p = x - a + (y - b)i$; $z - q = x - c + (y - d)i$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (z-p)(z-q) &= [x-a+(y-b)i][x-c+(y-d)i] \\ &= (x-a)(x-c) - (y-b)(y-d) + [(x-a)(y-d) + (x-c)(y-b)]i \\ (z-p)(z-q) &\text{ là một số thực.} \\ \Leftrightarrow (x-a)(x-c) - (y-b)(y-d) &= 0 \\ \Leftrightarrow [(x-a) + (x-c)]y &= (x-a)d + (x-c)b \\ \Leftrightarrow y &= \frac{(b+d)x - (ad+bc)}{2x - (a+c)} \quad \text{với } x \neq \frac{a+c}{2} \end{aligned}$$

Do đó ta có tập hợp các điểm M là một hyperbol vuông góc có tiệm cận là $x = \frac{a+c}{2}; y = \frac{b+d}{2}$

Chọn C.

Bài 46: Tìm trong mặt phẳng phức tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z sao cho: Số phức z có mô đun $|z| \leq 1$.

- A. Hình tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$
- B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$
- C. Một hyperbol vuông góc có tiệm cận là $x = \frac{a+c}{2}; y = \frac{b+d}{2}$
- D. Các đường thẳng $y = 2x$, trừ gốc tọa độ $O(0;0)$

Lời giải

Xem số phức z có $|z| \leq 1$.

Tập hợp các điểm M là hình tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$.

Chọn A.

Bài 47: Tìm trong mặt phẳng phức tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z sao cho: Số phức z có mô đun $|z| \in [1;2]$.

- A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$
- B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$
- C. Hình vành khăn gồm giữ hai hình tròn $(O;1)$ và $(O;2)$
- D. Các đường thẳng $y = 2x$, trừ gốc tọa độ $O(0;0)$

Lời giải

Xem số phức z có $|z| \in [1;2]$.

Tập hợp các điểm M là hình vành khăn gồm giữ hai hình tròn $(O;1)$ và $(O;2)$.

Chọn C.

Bài 48: Tìm trong mặt phẳng phức tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z thỏa điều kiện: $|z|=4$.

- A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=4$
- B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=4$
- C. Một hyperbol vuông góc có tiệm cận là $x = \frac{a+c}{2}; y = \frac{b+d}{2}$
- D. Các đường thẳng $y = 2x$, trừ gốc tọa độ $O(0;0)$

Lời giải

Ta có: $OM = |z| \Rightarrow OM = 4$

Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=4$.

Chọn A.

Bài 49: Tìm trong mặt phẳng phức tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z thỏa điều kiện: $|z| \leq 2$.

- A. Hình tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=2$
- B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$
- C. Một hyperbol vuông góc có tiệm cận là $x = \frac{a+c}{2}; y = \frac{b+d}{2}$
- D. Các đường thẳng $y=2x$, trừ gốc tọa độ $O(0;0)$

Lời giải

Ta có: $|z| \leq 2 \Leftrightarrow OM \leq 2$.

Tập hợp các điểm M là hình tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=2$.

Chọn A.

Bài 50: Tìm trong mặt phẳng phức tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z thỏa điều kiện: $1 < |z| \leq 2$.

- A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$
- B. Hình vành khăn gồm các điểm giữa hai hình tròn $(O;1)$ và $(O;2)$ kể cả các điểm nằm trên đường tròn $(O;2)$; không kể các điểm nằm trên đường tròn $(O;1)$
- C. Hình vành khăn gồm các điểm giữa hai hình tròn $(O;1)$ và $(O;2)$ kể cả các điểm nằm trên đường tròn $(O;2)$; $(O;1)$
- D. Các đường thẳng $y=2x$, trừ gốc tọa độ $O(0;0)$

Lời giải

$1 < |z| \leq 2 \Leftrightarrow 1 < OM \leq 2$

Tập hợp các điểm M là hình vành khăn gồm các điểm giữa hai hình tròn $(O;1)$ và $(O;2)$ kể cả các điểm nằm trên đường tròn $(O;2)$; không kể các điểm nằm trên đường tròn $(O;1)$.

Chọn B.

Bài 51: Tìm trong mặt phẳng phức tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z thỏa điều kiện: $|z|=2$ và phần thực của z bằng 1.

- A. Có 2 điểm: $M : M_1(1; \sqrt{3}), M_2(1; -\sqrt{3})$
- B. Chỉ có 1 điểm $M_1(1; \sqrt{3})$
- C. Chỉ có 1 điểm $M_2(1; -\sqrt{3})$
- D. Đường tròn (α) tâm O bán kính $R=2$

Lời giải

Ta có: $|z|=2 \Leftrightarrow OM=2 \Rightarrow M$ nằm trên đường tròn (α) tâm O bán kính $R=2$.

Phần thực của $z=1 \Rightarrow M$ nằm trên đường thẳng $x=1$.

Có 2 điểm: $M : M_1(1; \sqrt{3}), M_2(1; -\sqrt{3})$.

Chọn A.

Bài 52: Tìm tập hợp (T) các điểm M biểu diễn các số phức z sao cho $\log_{\frac{1}{2}}|z-2| > \log_{\frac{1}{2}}|z|$.

- A. Miền phẳng nằm bên phải đường thẳng $x=1$
- B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$
- C. Hình vành khăn gồm các điểm giữa hai hình tròn $(O;1)$ và $(O;2)$ kể cả các điểm nằm trên đường tròn $(O;2)$; không kể các điểm nằm trên đường tròn $(O;1)$
- D. Đường thẳng $x=1$

Lời giải

Điều kiện: $z \neq 0, z \neq 2$

Cách 1: Đặt $z = x + yi, (x, y \in R)$.

$$\log_{\frac{1}{2}}|z-2| > \log_{\frac{1}{2}}|z| \Leftrightarrow |z-2| < |z| \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 < x^2 + y^2 \Leftrightarrow x > 1.$$

Do đó, tập hợp (T) các điểm M biểu diễn các số phức z là miền phẳng nằm bên phải đường thẳng $x=1$.

Cách 2: Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}|z-2| > \log_{\frac{1}{2}}|z| \Leftrightarrow |z-2| < |z|$.

Gọi A là điểm biểu diễn số phức $z_1 = 2 \Rightarrow A(2;0)$

Xét trường hợp $|z-2| = |z| \Leftrightarrow MA = MO$

Khi đó M chạy trên đường trung trực Δ của đoạn OA , có phương trình $x=1$.

Với trường hợp $|z-2| < |z| \Leftrightarrow MA < MB$

$\Rightarrow M$ nằm bên phải đường thẳng Δ .

Do đó, tập hợp (T) các điểm M biểu diễn các số phức z là miền phẳng nằm bên phải đường thẳng Δ , trung trực của đoạn thẳng OA là miền phẳng nằm bên phải đường thẳng $x=1$.

Chọn A.

Bài 53: Điểm nào sau đây biểu diễn số phức $\frac{\bar{z}+2}{z} = -2-i$?

- A. $(3; -1)$
- B. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$
- C. $(-3; -1)$
- D. $(-3; -3)$

Lời giải

Đặt $z = x + yi; (z \neq 0; x, y \in R)$

$$\frac{x-yi+2}{x+yi} = -2-i \Leftrightarrow x+2-yi = -2x+y+(-2y-x)i \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = -2x+y \\ -y = 2y-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Chọn B.

Bài 54: Tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $|z+i| = |z-i|$ là:

- A. $y=0$
- B. $y=2$
- C. $y=x$
- D. $x=-1$

Lời giải

Cách 1: Đặt $z = x + yi; (z \neq 0; x, y \in R)$

$$|z+i| = |z-i| \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = x^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow y=0$$

Do đó tập hợp điểm cần tìm là trục Ox .

Cách 2: Nhận xét: nếu M_1, M_2 là điểm biểu diễn các số phức:

$$z_1 = x_1 + y_1, z_2 = x_2 + y_2 \text{ thì } M_1 M_2 = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Xét 2 điểm $M_1(-i), M_2(i)$. Theo giả thiết ta có:

$$|z+i| = |z-i| \Leftrightarrow MM_1 = MM_2, \forall M(z)$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực của đoạn $M_1 M_2$ với $M_1(0;-1), M_2(0;1)$. Do đó tập hợp điểm cần tìm là trục Ox .

Chọn A.

Bài 55: Tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $|z-2|=2$ là:

A. $x^2 + y^2 = 2$

B. $(x-2)^2 + y^2 = 4$

C. $x = 0$

D. $x + y = 0$

Lời giải

Xét điểm $I(2;0)$, theo giả thiết ta có: $|z-2|=2 \Leftrightarrow MI = 2, \forall M(z)$.

Vậy tập hợp điểm M cần tìm là đường tròn tâm $I(2;0)$, bán kính $R=2$.

Phương trình đường tròn: $(x-2)^2 + y^2 = 4$.

Chọn B.

Bài 56: Tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $|z+1|+|z-1|=4$ là:

A. $x^2 + y^2 = 4$

B. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$

C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

D. $3x^2 + 4y^2 - 36 = 0$

Lời giải

Xét hai điểm: $F_1(-1;0), F_2(1;0)$, theo giả thiết ta có:

$$|z+1| + |z-1| = 4 \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 4, \forall M(z)$$

Vậy tập hợp điểm cần tìm là elip có các tiêu điểm $F_1(-1;0), F_2(1;0)$, nửa trục lớn $a=2$, nửa trục nhỏ $b=\sqrt{3}$.

Phương trình elip $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

Chọn C.

Bài 57: Tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $|z-2|-|z+2|=3$ là:

A. $x^2 - y^2 = 1$

B. $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 9$

C. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$

D. $\frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = 1$

Lời giải

Xét hai điểm $F_1(-2;0), F_2(2;0)$, theo giả thiết ta có:

$$|z-2| - |z+2| = 3 \Leftrightarrow MF_1 - MF_2 = 3, \forall M(z)$$

Vậy tập hợp các điểm cần tìm là hyperbol có các tiêu điểm $F_1(-2;0), F_2(2;0)$, nửa trục lớn $a = \frac{3}{2}$,

nửa trục nhỏ $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Phương trình của hyperbol $\frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = 1$.

Chọn D.

Bài 58: Tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $z\bar{z} + 2z$ là số ảo là:

A. $2x + y + 1 = 0, (y \neq 0)$

B. $2x - y + 1 = 0, (x \neq 0)$

C. $x^2 + y^2 + 2x = 0, (y \neq 0)$

D. $x^2 + y^2 + 2y = 0, (x \neq 0)$

Lời giải

Đặt $z = x + yi$ thì $\bar{z} = x - yi$. Ta có: $z\bar{z} + 2z = x^2 + y^2 + 2x + 2yi$

Vì $z\bar{z} + 2z$ là số ảo nên $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$

Vậy tập hợp điểm cần tìm là $x^2 + y^2 + 2x = 0, (y \neq 0)$.

Chọn C.

Bài 59: Tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $|2i - 2\bar{z}| = |2z - 1|$ là:

A. $4x - 8y - 3 = 0$

B. $4x + 8y + 3 = 0$

C. $8x - 4y - 1 = 0$

D. $8x + 4y + 1 = 0$

Lời giải

Đặt $z = x + yi, (x, y \in R) \Rightarrow \bar{z} = x - yi$.

$|2i - 2\bar{z}| = |2z - 1| \Leftrightarrow |i - \bar{z}| = \left|z - \frac{1}{2}\right| \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \Leftrightarrow 4x + 8y + 3 = 0. (*)$

Chọn B.

Bài 60: Tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $|z - \bar{z} + 1 - i| = 2$ là:

A. $y = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

B. $y = \pm \frac{1}{2}$

C. $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

D. Trục Ox

Lời giải

Đặt $z = x + yi, (x, y \in R)$.

$|z - \bar{z} + 1 - i| = 2 \Leftrightarrow |1 + (2y - 1)i| = 2 \Leftrightarrow 1 + (2y - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow (2y - 1)^2 = 3 \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Chọn A.

Bài 61: Trong mặt phẳng cho 3 điểm A, B, C lần lượt biểu diễn các số phức $i; 2 - 3i; -3 + 4i$. Trọng tâm G của tam giác ABC biểu diễn số phức nào sau đây?

A. $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$

B. $-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$

C. $\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i$

D. $-\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i$

Lời giải

Ta có: $A(0;1), B(2;-3), C(-3;4)$. Trọng tâm ΔABC là $G\left(\frac{-1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Vậy trọng tâm G biểu diễn số phức $z = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$.

Chọn B.

Bài 62: Cho 3 số phức: $1; 3i; -3 - 5i$ biểu diễn bởi các điểm A, B, C . Điểm I thỏa mãn $2\overline{IA} - 3\overline{IB} + 2\overline{IC} = \vec{0}$ biểu diễn số phức nào sau đây?

- A. $4 + 19i$ B. $4 - 19i$ C. $-4 - 19i$ D. $4 - 6i$

Lời giải

Ta có: $A(1; 0), B(0; 3), C(-3; -5)$

$$2\overline{IA} - 3\overline{IB} + 2\overline{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\overline{OA} - \overline{OI}) - 3(\overline{OB} - \overline{OI}) + 2(\overline{OC} - \overline{OI}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overline{OI} = 2\overline{OA} - 3\overline{OB} + 2\overline{OC} \Rightarrow I(-4; -19)$$

Vậy điểm I biểu diễn số phức $z = -4 - 19i$.

Chọn C.

Bài 63: Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn các số phức

$1 + i; 4 + (\sqrt{3} + 1)i; 1 + (2\sqrt{3} + 1)i$. Tam giác ABC là:

- A. Tam giác vuông tại A B. Tam giác vuông tại B
C. Tam giác cân tại A D. Tam giác đều

Lời giải

Ta có: $A(1; 1), B(4; \sqrt{3} + 1), C(1; 2\sqrt{3} + 1)$.

$\Rightarrow AB = BC = CA = 2\sqrt{3}$. Vậy tam giác ABC đều.

Chọn D.

Bài 64: Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn các số phức

$\frac{4i}{i-1}; (1-i)(i+2); \frac{2+6i}{3-i}$. Tam giác ABC là:

- A. Tam giác đều B. Tam giác vuông tại A
C. Tam giác cân tại A D. Tam giác vuông tại B

Lời giải

Ta có: $\frac{4i}{-1+i} = 2 - 2i; (1-i)(i+2) = 3 + i; \frac{2+6i}{3-i} = 2i$.

Suy ra $A(2; -2), B(3; 1), C(0; 2)$. $AB = BC = \sqrt{10}; AC = \sqrt{20}$.

Vậy tam giác ABC vuông cân tại B.

Chọn D.

Bài 65: A, B, C, D là 4 điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số phức

$1 + 2i; 1 + \sqrt{3} + i; 1 + \sqrt{3} - i; 1 - \sqrt{2}$. Khi đó tứ giác $ABCD$ là:

- A. Hình vuông B. Hình thoi
C. Hình thang cân D. Hình bình hành

Lời giải

Vì $1 + 2i; 1 - 2i$ và $1 + \sqrt{3} + i; 1 + \sqrt{3} - i$ là các cặp số phức liên hợp nên hai điểm A, D và hai điểm B, C đối xứng nhau qua trục Ox . Hơn nữa $1 \neq 1 + \sqrt{3}$ nên $ABCD$ là hình thang cân.

Chọn C.

Bài 66: Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện sau: $|z - i| = 1$.

- A. Đường tròn tâm $A(0;1)$, bán kính $R=1$
- B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=2$
- C. Đường thẳng $y=1$
- D. Đường thẳng $x=1$

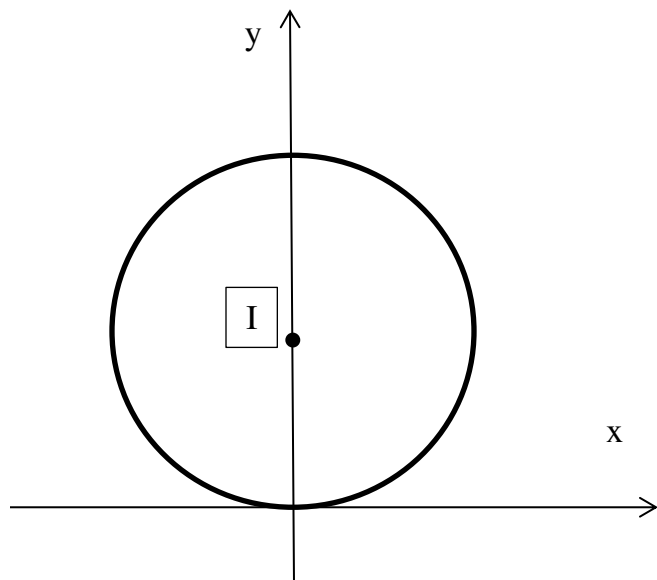
Lời giải

Giả sử: $z = x + yi, z - i = x + (y-1)i$

$$|z - i| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1 \quad (1)$$

Như vậy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $z = x + yi$ thỏa mãn $|z - i| = 1$ nằm trên đường tròn tâm $A(0;1)$, bán kính $R=1$

Chọn A.



Bài 67: Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện sau: $\left| \frac{z-i}{z+i} \right| = 1$.

- A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$
- B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$
- C. Trục hoành
- D. Đường thẳng $x=0$

Lời giải

Đặt $z = x + yi, (z \neq -i, x, y \in R)$.

$$\left| \frac{z-i}{z+i} \right| = 1 \Leftrightarrow |z-i| = |z+i| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \Leftrightarrow y = 0.$$

Như vậy, tập hợp các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện đã cho là trục hoành.

Chọn A.

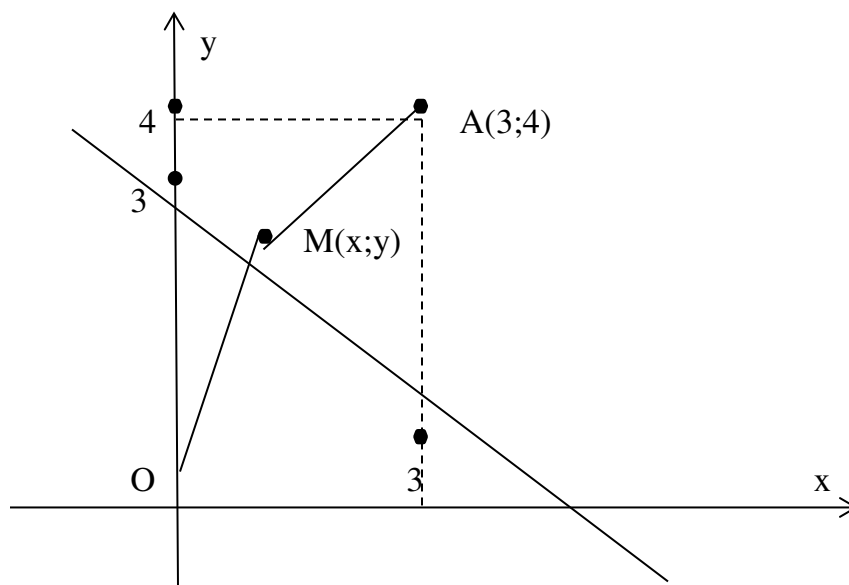
Bài 68: Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện sau: $|z| = |\bar{z} - 3 + 4i|$.

- A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$
- B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$
- C. Đường thẳng $y=1$
- D. Đường thẳng $6x + 8y - 25 = 0$

Lời giải

Cách 1: Đặt $z = x + yi, (x, y \in R)$.

$$\text{Ta có: } |z| = |\bar{z} - 3 + 4i| \Leftrightarrow |x + yi| = |(x-3) + (4-y)i| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (x-3)^2 + (4-y)^2 \Leftrightarrow 6x + 8y - 25 = 0.$$



Cách 2: $|z| = |\bar{z} - 3 + 4i| \Leftrightarrow |x + yi| = |(x-3) + (4-y)i|$

Theo tính chất hai số phức liên hợp có mô đun bằng nhau, ta có:

$$|z| = |(x-3) + (4-y)i| = |(x-3) - (4-y)i| = |(x-yi) - (3+4i)| = |z - (3+4i)|$$

$$|z-0| = |z-(3+4i)| \quad (2)$$

Ta có, vế trái (2) là độ dài véc tơ \overline{OM} , vế phải (2) là độ dài véc tơ \overline{AM} trong đó $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z , $A(3;4)$ là điểm biểu diễn số phức $3+4i$. Hệ số (2) chứng tỏ tập hợp các số phức $z = x + yi$ có các điểm biểu diễn nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng OA là $6x + 8y - 25 = 0$.

Chọn D.

Bài 69: Trong mặt phẳng phức, cho 3 điểm A, B, C không thẳng hàng theo thứ tự biểu diễn các số phức z_1, z_2, z_3 . Hỏi trong tâm tam giác ABC biểu diễn số phức nào?

A. $z = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) + \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)i$

B. $z = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3) + \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3)i$

C. $z = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3) + \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3)i$

D. $z = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) + \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)i$

Lời giải

Giả sử: $z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i, z_3 = x_3 + y_3i$ biểu diễn bởi A, B, C thì tọa độ của các điểm đó là $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$.

Trọng tâm G tam giác ABC có tọa độ $G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ biểu diễn số phức

$$z = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) + \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)i.$$

Chọn A.

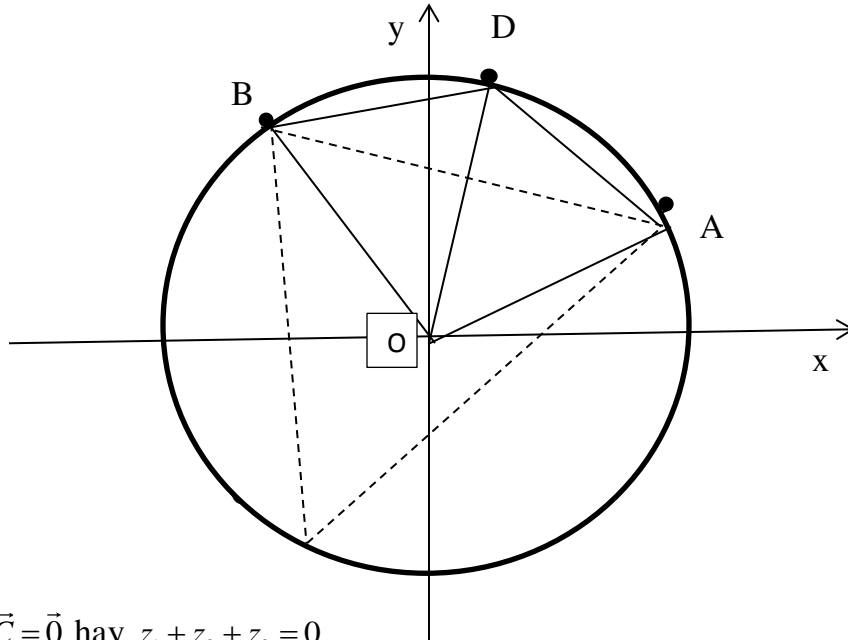
Bài 70: Xét 3 điểm A, B, C của mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn ba số phức phân biệt z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Nhận định nào sau đây đúng:

- A. Tam giác ABC đều
- B. O là tâm của tam giác ABC
- C. O là trọng tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC
- D. Trọng tâm của ΔABC là điểm biểu diễn của số phức $z_1 + z_2 + z_3$

Lời giải

Từ điều kiện $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ chứng tỏ A, B, C nằm trên một đường tròn tâm O bán kính $R = |z_1|$.

Nếu ABC là tam giác đều thì tâm O là trọng tâm của tam giác ABC . Theo tính chất trọng tâm ta có:



$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \vec{0} \text{ hay } z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

Đảo lại, nếu $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, ta có:

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{OC} = -(\overline{OA} + \overline{OB}) = -\overline{OD}$$

Điểm D cũng nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC (vì $|\overline{OC}| = |\overline{OD}|$, $OADB$ là hình bình hành có

$OA = OB = BD = DA$). Các tam giác OAD và OBD là các tam giác đều. Suy ra $\widehat{AOB} = 120^\circ$.

Làm tương tự ta chứng minh được $\widehat{BOC} = 120^\circ$.

Suy ra ΔABC đều.

Chọn A.

Bài 71: Trong mặt phẳng phức cho các điểm O (gốc tọa độ), A biểu diễn số 1, B biểu diễn số phức z không thực, A' biểu diễn số phức $z' \neq 0$ và B' biểu diễn số phức zz' . Nhận định nào sau đây đúng?

- A. Tam giác OAB đều
- B. Hai tam giác $OAB, OA'B'$ là hai tam giác đồng dạng
- C. O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác $AA'B'$
- D. Trọng tâm của ΔOAB là điểm biểu diễn của số phức $z_1 + z_2 + z_3$

Lời giải

Ta có $|z| = |\overline{OB}|, 1 = |\overline{OA}|, |z|' = |\overline{OA}'|, |zz'| = |z| \cdot |z'| = |\overline{OB}'|$

Ta có: $|\overline{AB}| = |\overline{OB} - \overline{OA}| = |z - 1|$

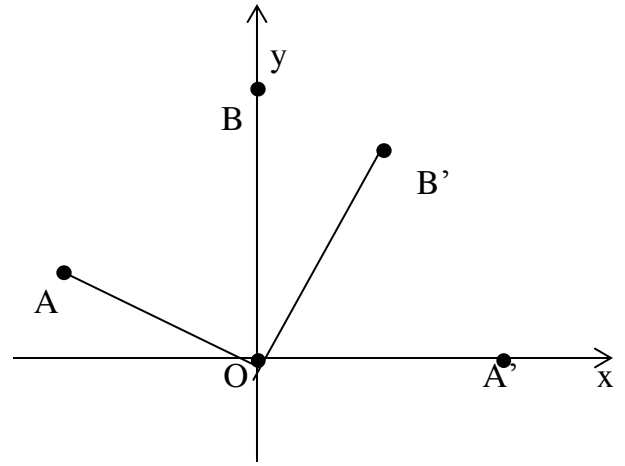
$|\overline{A'B}'| = |\overline{OB}' - \overline{OA}'| = |zz' - z'| = |z'| \cdot |z - 1|$

Từ trên ta suy ra

$$\frac{|z'|}{1} = \frac{|z'| \cdot |z'|}{|z'|} = \frac{|z'| \cdot |z - 1|}{|z - 1|} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB}$$

$\Rightarrow \Delta OA'B' \sim \Delta OAB$.

Chọn B.



Bài 72: Một hình vuông tâm là gốc tọa độ O, các cạnh song song với các trục tọa độ và có độ dài bằng 4. Hãy xác định điều kiện của a và b để điểm biểu diễn số phức $z = a + bi$ nằm trên đường chéo của hình vuông.

- A. $|a| > |b| > 2$ B. $|a| = |b| \geq 2$ C. $|a| = |b| \leq 2$ D. $|a| = |b| < 2$

Lời giải

Vì điểm biểu diễn số phức z nằm trên đường chéo của hình vuông nên

$$-2 \leq a \leq 2; -2 \leq b \leq 2 \text{ và } \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases}$$

Vậy điều kiện là $|a| = |b| \leq 2$

Chọn C.

Bài 73: Cho $z_1 = 1 + i; z_2 = -1 - i$. Tìm $z_3 \in \mathbf{C}$ sao cho các điểm biểu diễn z_1, z_2, z_3 tạo thành tam giác đều.

A. $z_3 = -\sqrt{2}(1 + i)$ và $z_3 = \sqrt{2}(1 - i)$ B. $z_3 = -\sqrt{3}(1 + i)$ và $z_3 = \sqrt{3}(1 - i)$

C. $z_3 = \sqrt{2}(1 + i)$ và $z_3 = -\sqrt{2}(1 - i)$ D. $z_3 = \sqrt{3}(1 + i)$ và $z_3 = -\sqrt{3}(1 - i)$

Lời giải

Để giải bài toán này ta cần chú ý đến kiến thức sau:

Giả sử $M_1(x_1; y_1)$ biểu diễn số phức $z_1 = x_1 + y_1i$

Giả sử $M_2(x_2; y_2)$ biểu diễn số phức $z_2 = x_2 + y_2i$

Khi đó khoảng cách giữa 2 điểm M_1M_2 bằng mô đun của số phức $z_1 - z_2$.

$$\text{Vậy } M_1M_2 = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Áp dụng vào bài toán: Giả sử $z_3 = x + yi$

Để các điểm biểu diễn của z_1, z_2, z_3 tạo thành một tam giác đều thì

$$\begin{cases} |z_1 - z_2| = |z_1 - z_3| \\ |z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4+4} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \\ \sqrt{4+4} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2y^2 = 6 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = \mp\sqrt{3}$$

Vậy có hai số phức thỏa mãn là: $z_3 = \sqrt{3}(1 + i)$ và $z_3 = -\sqrt{3}(1 - i)$

Chọn D.

Bài 74: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm H và A, B, C, D, H lần lượt biểu diễn cho các số phức a, b, c, d, h . Biết $a = -2 + i; h = 1 + 3i$ và số phức b có phần ảo âm. Khi đó mô đun của số phức b là:

- A. $\sqrt{26}$ B. $\sqrt{13}$ C. $\sqrt{\frac{145}{13}}$ D. $\sqrt{10}$

Lời giải

Ta có: $A(-2;1); H(1;3) \Rightarrow C(4;5)$

Tam giác ABC vuông cân tại B nên: $\begin{cases} AB = BC \\ \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 0 \end{cases}$

Giải hệ tìm được $B\left(\frac{43}{13}; \frac{-6}{13}\right)$.

Suy ra mô đun của số phức b là $\sqrt{\frac{145}{13}}$.

Chọn C.

Bài 75: Gieo một con súc sắc cân đối đồng chất 2 lần. Ký hiệu $(a;b)$ là kết quả sẽ xảy ra sau khi gieo, trong đó a, b lần lượt là số chấm xuất hiện lần thứ nhất, thứ hai. Gọi A là biến cố số chấm xuất hiện trên hai lần gieo như nhau. Tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố A là tập hợp con của tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn điều kiện nào sau đây?

- A. $|z + 2 + 3i| \leq 12$ B. $|z + 2 + 3i| = 10$
 C. $|z + 2 + 3i| \leq 13$ D. $|z + 2 + 3i| \leq 11$

Lời giải

Ta có $A = \{(1;1), (2;2), (3;3), (4;4), (5;5), (6;6)\}$

Gọi $z = x + yi; x, y \in R$ khi đó $|z + 2 + 3i| = \sqrt{(x+2)^2 + (y+3)^2}$

Giả sử $|z + 2 + 3i| \leq R \Rightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y+3)^2} \leq R$

$\Rightarrow (x+2)^2 + (y+3)^2 \leq R^2$. Khi đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là những điểm thuộc miền trong và trên đường tròn tâm $I(-2; -3)$ và bán kính R .

Để tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố A là tập hợp con của tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thì $IM \leq R, \forall M \in R$.

Khi đó ta được $R = 13$

Chọn C.