# CHƯƠNG 3.

# BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN.

## CHỦ ĐỀ 1.

## CÁC BÀI TOÁN NGUYÊN HÀM

Đầu tiên xin nhắc lại các khái niệm và định lí căn bản để quý bạn đọc có kiến thức nền tảng trước khi đi vào các bài toán cụ thể.

**1. Định nghĩa**

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập K (khoảng, nửa khoảng, đoạn của R). Nếu Ta có hàm số $F(x)$ xác định trên K sao cho $F'(x)=f(x)$ thì $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K.

**Định lí 1**. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C, hàm số $G(x)=F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K.

**Định lí 2**. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $G(x)=F(x)+C$ với C là hằng số.

Định lí 3. Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

**2. Tính chất của nguyên hàm:**

$\int f'(x)\,dx=f(x)+C$ với C là hằng số.

$\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$ với k là hằng số khác 0.

$\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$

**Bảng nguyên hàm**

Chú ý: công thức tính vi phân của $f(x)$ là $d\left[f(x)\right]=f'(x)\,dx$

| | Với *u* là một hàm số |
|---|---|
| $\int 0dx=C$ | $\int 0du=C$ |
| $\int dx=x+C$ | $\int du=u+C$ |

| | |
|---|---|
| $\int x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C\left(\alpha\neq -1\right)$ | $\int u^{\alpha}du=\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}+C\left(\alpha\neq -1\right)$ |
| $\int \frac{1}{x}dx=\ln\left\|x+C\right\|$ | $\int \frac{1}{u}du=\ln\left\|u\right\|+C$ |
| $\int e^{x}dx=e^{x}+C$ | $\int e^{u}du=e^{u}+C$ |
| $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C$ | $\int a^{u}dx=\frac{a^{u}}{\ln a}+C$ |
| $\int \cos xdx=\sin x+C$ | $\int \cos udu=\sin u+C$ |
| $\int \sin xdx=-\cos x+C$ | $\int \sin udu=-\text{cosu}+C$ |
| $\int \frac{1}{\cos^{2}x}dx=\tan x+C$ | $\int \frac{1}{\cos^{2}u}du=\tan u+C$ |
| $\int \frac{1}{\sin^{2}x}dx=-\cot x+C$ | $\int \frac{1}{\sin^{2}u}du=-\cot u+C$ |

Chúng ta sẽ cùng tìm hiểu một số bài toán Nguyên Hàm ở mức độ vận dụng sau đây:

# BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1: Biết $\int\left(\cos^{2}x-\sin^{2}x\right)^{5}.\sin 4xdx=-\frac{\cos^{7}2x}{a}+C$. Với $a$ là số nguyên. Tìm $a$?

A. $a=6.$ B. $a=12.$ C. $a=7.$ D. $a=14.$

Giải:

$$f\left(x\right)=\int\left(\cos^{2}x-\sin^{2}x\right)^{5}.\sin 4xdx$$

Đặt , Ta có:

$$f\left(x\right)=\int\left(\cos^{2}x-\sin^{2}x\right)^{5}.\sin 4xdx=\int\left(\cos 2x\right)^{5}.2\sin 2x.\cos 2x$$
$$=2\int\cos^{6}2x.\sin 2xdx$$

Đặt $t=\cos 2x\Rightarrow dt=-2\sin 2xdx$

$$F\left(x\right)=-\int t^{6}dt=\frac{-t^{7}}{7}+C=-\frac{\cos^{7}2x}{7}+C$$

Vậy

Chọn C.

Bài 2: Biết $\int\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}dx=a\ln\left|\sin x-\cos x\right|+C$. Với $a$ là số nguyên. Tìm $a$?

A. $a=1.$ B. $a=2.$ C. $a=3.$ D. $a=4.$

Giải:

Vì $\int a\left[\ln\left|\sin x-\cos x\right|+C\right]' = \dfrac{(\sin x-\cos x)'}{\sin x-\cos x}=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ nên

Nguyên hàm của: $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ là: $\ln\left|\sin x-\cos x\right|+C$.

CHọn A.

Bài 3: Tìm một nguyên hàm của: $1+4.\dfrac{\tan^2\frac{x}{2}}{\left(\tan^2\frac{x}{2}-1\right)^2}$ biết nguyên hàm này bằng 3 khi $x=\dfrac{\pi}{4}$.

A. $\dfrac{1}{\cos^2 x}+3.$ B. $\dfrac{1}{\sin^2 x}+3.$ C. $\tan x+2$. D. $\cot x+2$.

Giải:

$$f(x)=1+4.\frac{\tan^2\frac{x}{2}}{\left(\tan^2\frac{x}{2}-1\right)^2}=1+\left(\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right)^2=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos_2 x}$$

Nguyên hàm của $F(x)=\tan x+C$

Ta có: $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=3\Rightarrow \tan\dfrac{\pi}{4}+C=3\Rightarrow C=2\Rightarrow F(x)=\tan x+2$

Chọn C.

Bài 4: $F(x)=x+\ln\left|2\sin x-\cos x\right|$ là nguyên hàm của:

A. $\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+3\cos x}$. B. $\dfrac{\sin x+2\cos x}{2\sin x-\cos x}$. C. $\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+3\cos x}$. D. $\dfrac{3\sin x+\cos x}{2\sin x-\cos x}$.

Giải:

Ta chỉ cần đạo hàm của F(x), rồi sau đó quan sát kết quả đúng.

Ta có: $$F'(x)=1+\frac{(2\sin x-\cos x)'}{2\sin x-\cos x}=1+\frac{2\sin x+\cos x}{2\sin x-\cos x}=\frac{3\sin x+\cos x}{2\sin x-\cos x}$$

$\Rightarrow F(x)$ là một nguyên hàm của $\dfrac{3\sin x+\cos x}{2\sin x-\cos x}$.

Chọn D.

Bài 5: Biết $\int \frac{1}{\left(25x^2-20x+4\right)} dx = -\frac{1}{a\left(5x-2\right)^5} + C$. Với *a* là số nguyên. Tìm *a*?

A. $a=4.$ B. $a=100.$ C. $a=5.$ D. $a=25.$

Giải:

**Chú ý** nếu chúng ta biến đổi:

$$\int \frac{1}{\left(25x^2-20x+4\right)^3} dx = \int \left(25x^2-20x+4\right)^{-3} dx = \frac{\left(25x^2-20x+4\right)^{-4}}{-4} + C$$

. **Là sai**

$$\int \left(25x^2-20x+4\right)^{-3} d\left(25x^2-20x+4\right) = \frac{\left(25x^2-20x+4\right)^{-4}}{-4} + C$$

Điều sau đây mới đúng:

Trở lại bài, ta sẽ biến đổi biểu thức $\left(25x^2-20x+4\right)^3$ về dạng $\left(ax+b\right)^n$ như sau:

$$\int \frac{1}{\left(25x^2-20x+4\right)^3} dx = \int \frac{1}{\left(5x-2\right)^6} dx = \int \left(5x-2\right)^{-6} dx$$

$$= \frac{1}{5} \frac{\left(5x-2\right)^{-5}}{-5} + C = -\frac{1}{25\left(5x-2\right)^5} + C$$

Chọn D.

Bài 6: Biết $\int \frac{1+x}{2x^2-5x-7} dx = \frac{a}{b} \ln\left|2x-7\right| + C$, với *a, b* là cá số nguyên. Tính *S* = *a* + *b*?

A. $S=4.$ B. $S=2.$ C. $S=3.$ D. $S=5.$

Giải:

Ta quan sát mẫu cso thể phân tích được thành nhân tử, sử dụng MTCT bấm giải phương trình bậc 2:

$2x^2-5x-7=0$ thấy có hai nghiệm là: $x=-1, x=\frac{7}{2}$.

Áp dụng công thức $ax^2+bx+c = a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$ với $x_1, x_2$ là hai nghiệm ta có:

$$2x^2-5x-7 = \left(x+1\right)\left(2x-7\right)$$

Do đó:

$$\int \frac{1+x}{2x^2-5x-7}dx = \int \frac{x+1}{(x+1)(2x-7)}dx = \int \frac{1}{2x+7}dx = \frac{1}{2}\ln|2x-7|+C$$

Chọn C.

Bài 7: Biết $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 dx = x + \frac{a}{b}\cos 4x + C$, với *a, b* là cá số nguyên. Tính $S = a + b$?

A. $S = 4.$ B. $S = 2.$ C. $S = 3.$ D. $S = 5.$

Giải:

Nếu áp dụng ngay: $\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C$ thì ta có:

$\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 dx = \frac{(\sin 2x - \cos 2x)^3}{3} + C$. Là sai.

Ta phải khai triển $(\sin 2x - \cos 2x)^2$ để xem thử

$$\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 dx = \int (1 - \sin 4x)\,dx = x\frac{1}{4}cos4x + C$$

Chọn D.

Bài 8: Biết $\int \frac{1}{1+\cos x}dx = a.tan\frac{x}{b} + C$, với *a, b* là cá số nguyên. Tính $S = a + b$?

A. $S = 4.$ B. $S = 2.$ C. $S = 3.$ D. $S = 5.$

Giải:

Chưa áp dụng ngay được công thwucs nguyên hàm cơ bản, ta quan sát mẫu và thấy rằng có thể biến đổi $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$ dựa trên công thức hạ bậc: $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$. Do đó:

$$\int \frac{1}{1+\cos x}dx = \int \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx = \tan\frac{x}{2} + C$$

.

Ta thấy rằng $a = 1, b = 2$ do đó S=3.

Chọn C.

Bài 9: Biết $\int \frac{1}{1+\sin 2x}dx = \frac{a}{b}\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + C$, với *a, b* là cá số nguyên. Tính $S = a + b$?

A. $S=4.$ B. $S=2.$ C. $S=3.$ D. $S=5.$

Giải:

$$\int \frac{1}{1+\sin 2x}dx=\int \frac{1}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}dx=\int \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+C=\frac{1}{2}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+C$$

Ta thấy a=1,b=2 suy ra S=3

Chọn C.

Bài 10: Cho $f(x)=8\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$. Một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa $F(0)=8$ là:

A. $4x+2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+9$. B. $4x-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+9$.

C. $4x+2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+7$. D. $4x-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+7$.

Giải:

Ta cần phải tính $\int f(x)\,dx=\int 8\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)dx$. Đầu tiên sử dụng công thức hạ bậc để đổi $f(x)$ như sau:

$$f(x)=8\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=8\left(\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}{2}\right)$$

$$f(x)=4-4\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow F(x)=4x-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+C$$

$$f(0)=8\Leftrightarrow -2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+C=8\Leftrightarrow C=9$$

Chọn B.

Bài 11: Cho $f(x)=1+|x|$. Một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa $F(1)=1$ là:

A. $x^2+x+1$

B. $\begin{cases} x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2} & \text{khi } x\ge 0 \\ x-\dfrac{x^2}{2}+C_2 & \text{khi } x<0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}-x+C_1 & \text{khi } x\ge 0 \\ x-\dfrac{x^2}{2}+C_2 & \text{khi } x<0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} -x^2+x+C_1 & \text{khi } x\ge 0 \\ x-\dfrac{x^2}{2}+C_2 & \text{khi } x<0 \end{cases}$.

Giải:

Ta có: $f(x)=\begin{cases} 1+x \text{ khi } x\ge 0 \\ 1-x \text{ khi } x<0 \end{cases} \Rightarrow F(x)=\begin{cases} x+\dfrac{x^2}{2}+C_1 & \text{khi } x\ge 0 \\ x-\dfrac{x^2}{2}+C_2 & \text{khi } x<0 \end{cases}$.

Theo đề $F(1)=1\Rightarrow C_1=-\dfrac{1}{2}$ do đó: $\begin{cases} x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2} & \text{khi } x\ge 0 \\ x-\dfrac{x^2}{2}+C_2 & \text{khi } x<0 \end{cases}$.

Chọn B.

Bài 12: Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $\int \dfrac{5x^2+8x-4}{x^2(1-x)^2}dx$ với $0<x<1$ và $F\left(\dfrac{1}{2}\right)=26$. Giá trị nhỏ nhất của $F(x)$ là:

A. 24.
B. 20.
C. 25.
D. 26.

Giải:

Ta có:

$$F(x)=\int \frac{5x^2+8x-4}{x^2(1-x)^2}dx=\int \frac{9x^2-4\left(x^2-2x+1\right)}{x^2\left(1-x^2\right)}dx$$

$$=\int\left[\frac{9}{\left(1-x^2\right)}-\frac{4}{x^2}\right]dx=\frac{4}{x}+\frac{9}{(1-x)}+C$$

Vì $F\left(\dfrac{1}{2}\right)=26$ nên $\dfrac{4}{\frac{1}{2}}+\dfrac{9}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}+C=26\Leftrightarrow C=0$

Lúc này $F(x)=\frac{4}{x}+\frac{9}{(1-x)}$ với $0<x<1$. Sử dụng MTCT bấm Mode 7 chọn start 0 end 1 Step 0.1:

Quan sát bảng giá trị ta thấy giá trị nhỏ nhất của F(x) là 25 xảy ra khi x =0,4

Chọn C.

Bài 13: Khi tính nguyên hàm $\int \frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx$ người ta đặt $t=g(x)$ (một hàm biểu diễn theo biến x) thì nguyên hàm trở thành $\int 2dt$. Biết $g(4)=\frac{3}{\sqrt{5}}$, giá trị của $g(0)+g(1)$ là:

A. $\frac{3+\sqrt{6}}{2}$.
B. $\frac{1+\sqrt{6}}{2}$.
C. $\frac{2+\sqrt{6}}{2}$.
D. $\frac{2+3\sqrt{6}}{2}$.

Giải:

Đối với bài này HS cần pahir nắm được kĩ thuật biến đổi khi tính nguyên hàm. Hs cần phải dự đoán phép đặt ẩn phụ, đầu tiên ta thấy nguyên hàm có thể biến đổi thành:

$$\int \frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx=\int \frac{1}{(x+1)^2\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}}dx$$

Do đó ta đặt:

$$t=\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}\Rightarrow dt=\frac{dx}{2(x+1)^2\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}}\Leftrightarrow 2dt=\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}}$$

Vì vậy suy ra $\int \frac{1}{\sqrt{(2x+1)(x+1)^3}}dx=\int 2dt$

Tuy nhiên đây là lời giải sai, ta có thể thấy khi đặt

$$t=\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}+C\Rightarrow dt=\frac{dx}{2(x+1)^2\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}}\Leftrightarrow 2dt=\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}}$$

Với C là hằng số, kết quả không thay đổi. Vì vậy chính xác ở đây là:

$t=\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}+C=g(x)$. Theo đề $g(4)=\frac{3}{\sqrt{5}}$ n33n suy ra C=0.

Cuối cùng ta được $g\left(x\right)=\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}}$ vì vậy $g\left(0\right)+g\left(1\right)=\frac{2+\sqrt{6}}{2}$

Chọn C.

Chú ý: Bài toán này hoàn toàn có thể dùng MTCT để chọn kết quả, Ta có:

$$\int 2dt=\int \frac{1}{\sqrt{\left(2x+1\right)\left(x+1\right)^3}}dx\Rightarrow t=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\left(2x+1\right)\left(x+1\right)^3}}dx$$

$$\Rightarrow g\left(x\right)=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\left(2x+1\right)\left(x+1\right)^3}}dx$$

Do đó $g\left(x\right)$ là nguyên hàm của $\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\left(2x+1\right)\left(x+1\right)^3}}$. Suy ra:

$$g\left(0\right)-g\left(4\right)=\int_4^0 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\left(2x+1\right)\left(x+1\right)^3}}dx$$

$$\Rightarrow g\left(0\right)=\int_4^0 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\left(2x+1\right)\left(x+1\right)^3}}dx+g\left(4\right)$$

Và:

$$g\left(1\right)-g\left(4\right)=\int_4^1 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\left(2x+1\right)\left(x+1\right)^3}}dx$$

$$\Rightarrow g\left(1\right)=\int_4^1 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\left(2x+1\right)\left(x+1\right)^3}}dx+g\left(4\right)$$

Sử dụng MTCT bấm:

$$\int_4^0 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\left(2x+1\right)\left(x+1\right)^3}}dx+g\left(4\right)+\int_4^1 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\left(2x+1\right)\left(x+1\right)^3}}dx+g\left(4\right)$$

Là kết quả C.

# CHỦ ĐỀ 2.
# CÁC BÀI TOÁN TÍCH PHÂN.

**1. Định nghĩa**

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thỏa:

+ Liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$.

+ $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[a;b\right]$.

Lúc đó hiệu số $F\left(b\right)-F\left(a\right)$ được gọi là tích phân từ *a* đến *b* và kí hiệu $\int_a^b f\left(x\right)dx=F\left(b\right)-F\left(a\right)$

**Chú ý:**

+ *a, b* được gọi là 2 cận của tích phân.

+ *a* = *b* thì $\int_a^b f\left(x\right)dx=0.$

+ *a* > *b* thì $\int_a^b f\left(x\right)dx=-\int_b^a f\left(x\right)dx$.

+ Tích phân không phụ thuộc và biến số, tức là $\int_a^b f\left(x\right)dx=\int_a^b f\left(t\right)dt=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

**2. Tính chất của tích phân:**

+ $\int_a^b f\left(x\right)dx=\int_a^c f\left(x\right)dx+\int_c^b f\left(x\right)dx,\ \left(a<c<b\right)$.

+ $\int_a^b kf\left(x\right)dx=k\int_a^b f\left(x\right)dx,$ với k là hằng số khác 0.

+ $\int_a^b\left[f\left(x\right)\pm g\left(x\right)\right]dx=\int_a^b f\left(x\right)dx\pm\int_a^b g\left(x\right)dx$.

**Chú ý:**

Để tính tích phân từ a đến b, ta tiến hành tìm nguyên hàm rồi sau đó thay cận vào theo công thức $\int_a^b f\left(x\right)dx=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

## BÀI TẬP ÁP DỤNG

Một lần nữa xin nhắc lại rằng đây là cuốn sách đề cập đến các bài toán vận dụng và vận dụng cao nên trước khi sử dụng sách này quý bạn đọc cần có kiến thwucs cơ bản tốt. Bây giờ chúng ta cùng nghiên cứu các bài toán tích phân khá khó:

Bài 1: Nếu a là một số thỏa mãn các điều kiện sau: $a\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ và $\int_0^a\cos\left(x+a^2\right)dx=\sin a$ thì:

A. $a=\pi.$ B. $a=\sqrt{\pi}$. C. $a=2\sqrt{\pi}.$ D. $a=\sqrt{2\pi}$.

Giải:

$\int\limits_0^a \cos\left(x+a^2\right)dx \Leftrightarrow \sin\left(x+a^2\right)\Big|_0^a = \sin a \Leftrightarrow \sin\left(a+a^2\right) - \sin a^2 = \sin a$

$\Leftrightarrow 2\cos\dfrac{a+2a^2}{2}.\sin\dfrac{a}{2} = 2\sin\dfrac{a}{2}.\cos\dfrac{a}{2} (1)$

Vì $a \in \left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$ nên $\dfrac{a}{2} \in \left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right] \Rightarrow \sin\dfrac{a}{2} > 0$, vậy:

$(1) \Leftrightarrow \cos\dfrac{a+2a^2}{2} = \cos\dfrac{a}{2} \Leftrightarrow \cos\dfrac{a+a^2}{2} - \cos\dfrac{a}{2} = 0$

$\Leftrightarrow -2\sin\dfrac{a^2+a}{2}.\sin\dfrac{a^2}{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{a^2+a}{2} = 0 \\ \sin\dfrac{a^2}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \dfrac{a^2+a}{2} = k\pi & (1) \\ \dfrac{a^2}{2} = l\pi & (2) \end{array}\right. (k, l \in ¢)$.

Vì $k \in ¢$ nên (1) không thỏa mãn với mọi $a \in \left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$,hoặc thay 4 vào đáp án (1) ta thấy đều không thỏa.

Đối với (2). Vì $a \in \left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$ nên chọn $l$=1 lúc đó $a = \sqrt{2\pi}$.

Chọn D.

Bài 2: Gọi $S$ là tập hợp tất cả các số nguyên dương $k$ thỏa mãn điều kiện $\int\limits_1^e \ln\dfrac{k}{x}dx < e-2$. Khi đó:

A. $S = \{1\}$.  B. $S = \{2\}$.  C. $S = \{1,2\}$  D. $S = \varnothing$.

Giải:

$\int\limits_1^e \ln\dfrac{k}{x}dx$

Dùng phương pháp tích phân từng phần

$\begin{cases} u = \ln\dfrac{k}{x} = \ln k - \ln x \Rightarrow du = -\dfrac{1}{x}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$

$$\Rightarrow I = x\ln\frac{k}{x}\Big|_1^e + \int_1^e dx = e\ln\frac{k}{e} - \ln k + (e-1)$$

Vậy $\int_1^e \ln\frac{k}{x}dx < e-2 \Leftrightarrow e\ln\frac{k}{e} - \ln k + (e-1) < e-2$

$\Leftrightarrow e(\ln k - 1) - \ln k < -1 \Leftrightarrow (e-1)\ln k < e-1 \Leftrightarrow \ln k < 1$

$\Leftrightarrow k < e$ mà k là số nguyên dương nên chọn $k \in \{1;2\}$.

Chọn C.

Bài 3: Xét tích phân $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\sin^2 x - 2\cos^2 x - 2}dx$. Bằng cách đặt $t = \tan x,$ tích phân A được biến đổi thành tích phân nào sau đây.

A. $\int_0^1 \frac{1}{t^2-4}dt$. B. $\int_0^1 \frac{1}{t^2+4}dt$. C. $\int_0^1 \frac{1}{t^2-2}dt$. D. $\int_0^1 \frac{1}{t^2+2}dt$.

Giải:

Ta có: $3\sin^2 x - 2\cos^2 x - 2 = \cos^2 x\left(3\tan^2 x - 2 - \frac{2}{\cos^2 x}\right)$

$= \cos^2 x\left[3\tan^2 x - 2 - 2\left(1+\tan^2 x\right)\right] = \cos^2 x\left(\tan^2 x - 4\right)$

Vậy: $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x\left(\tan^2 x - 4\right)}dx$, lúc này đặt $t = \tan x$ và đổi cận ta đc:

$A = \int_0^1 \frac{dt}{t^2-4}dx$. Chọn A.

Bài 4: Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$ thì $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^6\frac{x}{2}}dx$ được biến đổi thành $2\int_0^1 f(t)dt$. Hãy xác định $f(t)$:

A. $f(t) = 1 - 2t^2 + t^4.$ B. $f(t) = 1 + 2t^2 + t^4.$ C. $f(t) = 1 + t^2.$ D. $f(t) = 1 - t^2.$

Giải:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)^2.\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right).\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx$$

Đặt $t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow\begin{cases}dt=\frac{1}{2}.\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx\\ x=0\Rightarrow t=0;x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1\end{cases}$

Vậy: $I=\int_0^1\left(1+t^2\right)^2.2dt=2\int_0^1\left(1+2t^2+t^4\right)dt\Rightarrow f\left(t\right)=1+2t^2+t^4$

Chọn B.

Bài 5: Biết $\int_0^3 f\left(x\right)dx=\frac{5}{3}$ và $\int_0^4 f\left(t\right)dt=\frac{3}{5}$. Tính $\int_3^4 f\left(u\right)du$.

A. $\frac{8}{15}$.
B. $\frac{14}{15}$.
C. $-\frac{17}{15}$.
D. $-\frac{16}{15}$.

Giải:

$\int_0^4 f\left(u\right)du=\int_0^3 f\left(u\right)du+\int_3^4 f\left(u\right)du$.

Mà $\int_0^3 f\left(u\right)du=\int_0^3 f\left(x\right)dx=\frac{5}{3}$ và $\int_0^4 f\left(u\right)du=\int_0^4 f\left(t\right)dt=\frac{3}{5}$

Nên: $\frac{3}{5}=\frac{5}{3}+\int_3^4 f\left(u\right)du\Rightarrow\int_3^4 f\left(u\right)du=\frac{3}{5}-\frac{5}{3}=-\frac{16}{15}$

Chọn D.

Chú ý: tích phân không phụ thuộc vào biến số.

Bài 6: Biết $\int_0^1\frac{x^2}{1+e^{-x}}dx=a$. Tính giá trị của $I=\int_0^1\frac{x^2}{1+e^x}dx$.

A. $I=\frac{1}{2}-a.$
B. $I=1-a.$
C. $I=\frac{1}{3}-a.$
D. $I=1+a.$

Giải:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+e^{-x}}dx + \int_0^1 \frac{x^2}{1+e^{x}}dx = \int_0^1 x^2 dx$$

Sử dụng phân tích .

Hoặc máy tính cầm tay để kiểm tra kết quả.

Chọn C.

Bài 7: Đặt $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$. Khi đó:

A. $I_{n+1} < I_n.$ B. $I_{n+1} > I_n.$ C. $I_{n+1} \ge I_n.$ D. $I_{n+1} = I_n.$

Giải:

Khi $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ thì $0 < \sin x < 1$. Do đó với $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ Ta có:

$\sin^{n+1} x < \sin^n x \Rightarrow I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x dx < I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, tức là: $I_{n+1} < I_n.$

Chọn A.

Bài 8: Cho $I_n = \int_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^n dx$ và $J_n = \int_0^1 x\left(1-x^2\right)^n dx$. Xét các câu:

(1) $I_n \le \dfrac{1}{2(n+1)}$ với mọi *n*.

(2) $J_n > \dfrac{1}{2(n+1)}$ với mọi *n*.

(3) $I_n \le J_n = \dfrac{1}{2(n+1)}$ với mọi *n*.

A. (1) đúng. B. (1) và (2) đúng.

C. Tất cả đều sai. D. cả (1) và (3) đúng.

Giải:

Chỉ (1) và (3) đúng. Khẳng định (2) sai.

Ta đặt $x = \cos t$ để tính $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\left(1-\cos^2 t\right)^n \cos t dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t.\cos t dt$.

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t d(\sin t) = \left.\frac{\sin^{2n+2}}{2n+2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2(n+1)}$$
.

Như vậy khẳng định (2) sai. Ngoài ra , để thấy rằng với mọi $x \in [0;1]$ $x \le x^2$ nên suy ra với mọi n ta có $I_n \le J_n = \frac{1}{2(n+1)}$.

Vậy: (1) và (3) cùng đúng.

Chọn D.

Bài 9: Tìm số nguyên dương $k$ nhỏ nhất, thỏa mãn $\int_0^1 \frac{dx}{2x+k} \ge 0$.

A. $k = 3$. B. $k = 4$. C. $k = 1$. D. $k = 2$.

Giải:

$\forall x \in ¥^*, \ \forall x \in [0;1], \ 2x + k > 0$ do đó: $\int_0^1 \frac{dx}{2x+k} \ge 0$, $\forall x \in ¥*$.

Suy ra số nguyên dương k nhỏ nhất thỏa mãn ycbt là k=1

Chọn C.

Bài 10: Cho $f(x), g(x)$ là các hàm liên tục trên [$a$ ; $b$].

(1) Với mọi số thực y, ta có: $y^2\int_a^b f^2(x)dx + 2y\int_a^b f(x).g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \ge 0$.

(2) $\left(\int_a^b f(x).g(x)dx\right)^2 \le^2 \int_a^b f^2(x)dx^2.\int_a^b g^2(x)dx$.

Trong hai khẳng định trên:

A. Chỉ có (1) đúng. B. Chỉ có (2) đúng.

C. Cả hai khẳng định đều đúng. D. Cả hai khẳng định đều sai.

Giải:

Với mọi số thực y ta có: $0 \le [y.f(x) + g(x)]^2$

$= y^2.f^2(x) + 2y.f(x).g(x) + g^2(x)$

từ đó suy ra (1) đúng:

$$y^2\int_a^b f^2(x)dx + 2y\int_a^b f(x).g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \ge 0$$

Vì vế trái của Bất đẳng thức trên là tam thức bậc hai đối với y, nên theo định thức về dấu của tam thức bậc hai , Ta có:

$$\Delta' = \left(\int_a^b f(x).g(x)dx\right)^2 - \int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_a^b f(x).g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx$$

((2) đúng).

Chọn C.

Bài 11: Cho $f(x), g(x)$ là các hàm liên tục trên [*a ; b*].

$f(x) \ne 0, \forall x \in [a;b]$ và $m \le \dfrac{g(x)}{f(x)} \le M, \forall x \in [a;b]$.

Căn cứ vào giả thiết đó, một học sinh lập luận:

(1) Ta có bất đẳng thức

$$0 \le \left(\frac{g(x)}{f(x)} - m\right)\left(M - \frac{g(x)}{f(x)}\right).f^2(x), \forall x \in [a;b].\ (*)$$

(2) Biến đổi, (*) trở thành

$$0 \le -g^2(x) + (M+m).f(x).g(x) - M.m.f^2(x), \forall x \in [a;b].$$

(3) suy ra $\int_a^b g^2(x)dx + M.mx\int_a^b f^2(x)dx \le (M+m)\int_a^b f(x).g(x)dx$.

Lập luận trên:

A. Đúng hoàn toàn. B. Sai từ (1).

C. Sai từ (2). D. Sai từ (3).

Giải:

Lập luận đúng hoàn toàn. Bất đẳng thức sau cùng được gọi là bất đẳng thức Diza

Chọn A.

Bài 12: Cho hai hàm $f(x), g(x)$ cùng đồng biến và liên tục trên [*a ; b*]. Với $a < b$. Khi đó, xét khẳng định sau đây:

(1) $\forall x \in [a;b]$. Ta có: $\int_a^b f(a)dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b f(b)dx$.

(2) $\int_a^b f(x)dx \le f(b)$.

(3) Tồn tại $x_0 \in [a;b]$ sao cho $f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Các khẳng định đúng trong 3 khẳng định trên là:

A. Chỉ (1) và (2).
B. Chỉ (2) và (3).
C. Chỉ (1) và (3).
D. Cả (1) , (2) và (3).

Giải:

Chỉ (1) và (3) đúng. Khẳng định (2) sai:

Do tính đồng biến nên $\forall a \le x \le b$ ta có $f(a) \le f(x) \le f(b)$, tức là:

$\int_a^b f(a)dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b f(b)dx$ vậy (1) đúng

Suy ra: $(b-a).f(a) \le \int_a^b f(x)dx \le (b-a).f(b)$

Do đó $f(x)$ liên tục trên [a;b] nên tồn tại $x_0 \in [a;b]$ sao cho: $f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Vậy (3) đúng.

Chọn C.

Bài 13: Ta định nghĩa: $\max[f(x), g(x)] = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \ge g(x) \\ g(x) & \text{khi } g(x) \ge f(x) \end{cases}$.

Cho $f(x) = x^2$ và $g(x) = 3x - 2$.

Như thế $\int_0^2 \max[f(x), g(x)]dx$ bằng:

A. $\int_0^2 x^2dx$.
B. $\int_0^1 x^2dx + \int_1^2 (3x-2)dx$.
C. $\int_0^2 (3x-2)dx$.
D. 15.

Giải:

Hoành độ giao điểm của hai đường thẳng là $x=1; x=2$

Xét $x^2-(3x-2)$ và vẽ Bảng xét dấu để xem trên đoạn nào thì $f(x)=x^2$ và $g(x)=3x-2$ hàm có Giá trị lớn hơn.

| $x$ | 0 | | 1 | | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-3x+2$ | | + | 0 | − | 0 |

Do đó $\int_0^2 \max\left[f(x),g(x)\right]dx = \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 (3x-2)dx$

Chọn B.

Bài 14: Biết $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^2 x}{1+3^{-x}}dx=m$. Tính giá trị của $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^2 x}{1+3^{x}}dx$.

A. $\pi-m.$ B. $\frac{\pi}{4}+m.$ C. $\pi+m.$ D. $\frac{\pi}{4}-m.$

Giải:

Sử dụng phân tích: $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^2 x}{1+3^{-x}}dx+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^2 x}{1+3^{x}}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\,dx=\pi$

(sử dụng MTCT để tính $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\,dx=\pi$)

Do đó : $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^2 x}{1+3^{x}}dx=\pi-m$. Chọn A.

Bài 15: Cho $I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{2x+m}}$, với $m>0$. Tìm các giá trị của tham số $m$ để $I\ge 1$.

A. $0<m\le\frac{1}{4}$. B. $m>\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{8}\le m\le\frac{1}{4}$. D. $m>0$.

Giải:

Tính tích phân theo tham số m bằng cách đặt $t=\sqrt{2x+m}$, sau đó tìm m từ Bắt phương trình $I\ge 1$.

Chọn A.

Bài 16: Cho m là một số dương và $I=\int_0^m \left(4^x\ln 4-2^x\ln 2\right)dx$. Tìm $m$ khi $I=12$.

A. $m=4$.  B. $m=3$.  C. $m=1$.  D. $m=2$.

Giải:

Tính tích phân theo tham số m ta được: $I=\int_0^m \left(4^x\ln 4-2^x\ln 2\right)dx=\left(4^x-2^x\right)\Big|_0^m=4^m-2^m$, sau đó tìm m từ phương trình I =12.

Chọn D.

# CHỦ ĐỀ 3
# ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN
# TÍNH DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH

1. Diện tích hình phẳng

Nếu có hình phẳng giới hạn bởi các đường $\begin{cases} y=f_1(x)\\ y=f_2(x)\\ x=a\\ x=b\end{cases}$.

(Trong đó $f_1(x), f_2(x)$ liên tục trên đoạn [$a;b$]),

thì diện tích S được tính theo công thức $S=\int_a^b \left|f_1(x)-f_2(x)\right|dx$.

**2. Thể tích khối tròn xoay**

**Quay quanh trục Ox**: Cho hình phẳng giới giới hạn bởi các đường $\begin{cases} y=f(x)\\ Ox\\ x=a\\ x=b\end{cases}$.

(Trong đó $f(x)$ liên tục trên đoạn [$a;b$]), quay quanh trục Ox, ta được khối tròn xoay.

Thể tích $V_x$ của khối tròn xoay được tính theo công thức $V_x=\pi\int_a^b [f(x)]^2dx$.

**Quay quanh trục Oy**: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $\begin{cases} x = f(y) \\ Oy \\ x = a \\ x = b \end{cases}$

(Trong đó $f(y)$ liên tục trên đoạn [*a;b*]), quay quanh trục Oy, ta được khối tròn xoay.

Thể tích $V_y$ của khối tròn xoay được tính theo công thức $V_y = \pi\int_a^b [f(\mathrm{y})]^2 dx$.

# BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1:

(1) Cho $y = f(x)$ là một hàm liên lục trên đoạn [*a;b*] thì diện tích $S(H)$ của hình thang cong H giới hạn bởi đồ thị hàm số , trục hoành và các đường thẳng $x = a, y = b$ được cho bởi công thức $S(H) = \int_a^b f(x)dx$.

(2) Nếu $f(x) < 0$ trên đoạn [*a;b*] và $f(x)$ liên lục trên [*a;b*] thì có diện tích hình K giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và các đường $x = a, y = b$ được tính theo công thức $S(K) = \int_a^b -f(x)dx$.

Trong hai khẳng định trên:

A. Chỉ có (1) đúng.
B. Chỉ có (2) đúng.
C. Cả hai khẳng định đều đúng.
D. Cả hai khẳng định đều sai.

Giải:

Chỉ có (2) đúng. (1) đúng nếu thêm giả thiết $f(x) > 0$ trên [*a;b*].

Chọn B.

Bài 2: Diện tích hình L tạo bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 - 1$, đường thẳng $x = 2$, trục tung và trục hoành là:

A. 3,5 (đvdt).
B. 2,5 (đvdt).
C. 1,5 (đvdt).
D. 6 (đvdt).

Giải:

Ta thấy $f(x) < 0$ trên [0; 1] và $f(x) > 0$ trên [1; 2]. Đồ thị $f(x)$ gồm hai phần: phần nằm dưới trục hoành $(L_1)$ và phần nằm trên trục hoành $(L_2)$, do đó $S(L) = S(L_1) + S(L_2)$. Ta có:

$$S(L_1) = \int_0^1 (1 - x^3)dx = \frac{3}{4}$$

$$S(L_2) = \int_1^2 (x^3 - 1)dx = \frac{11}{4}$$

Vậy $S(L) = \frac{3}{4} + \frac{11}{4} = \frac{14}{4} = 3.5$ (đvdt)

Chọn A.

Bài 3: Diện tích miền giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 1$ và $y = 3$ là:

A. $\frac{32}{3}$.    B. $\frac{15}{4}$.    C. 11.    D. 10.

Giải:

Diện tích miền cần tính là:

$$S = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx = \left(4x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{2} = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}.$$

Chọn A.

Bài 4: Gọi H là hình tạo bởi đồ thị hàm số $y = 4 - x^2$, đường thẳng $x = 3$, trục tung và trục hoành. Khi đó, diện tích của H là:

A. $\frac{1}{2}$.    B. $\frac{19}{3}$.    C. $\frac{23}{3}$.    D. 4.

Giải:

Ta xác định đực hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = 4 - x^2$ với trục hoành trên đoạn [0; 3] là $x = 2.$ Diện tích cần tính là $\int_0^3 |4 - x^2|dx$, chúng ta có thể tiếp tục vẽ bảng xét dấu của $4 - x^2$ trên [0;3] để tính, ta có:

$$S(H)=\int_0^2\left(4-x^2\right)dx+\int_2^3\left(x^2-4\right)dx=\frac{16}{3}+\frac{7}{3}=\frac{23}{3}.$$

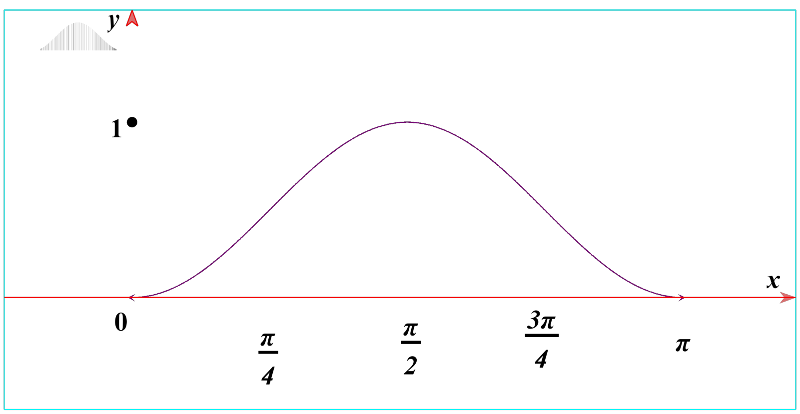
Chú ý: để tính $\int_0^3\left|4-x^2\right|dx$ ta biết rằng $x=2$ là nghiệm của $y=4-x^2$ với trục hoành trên đoạn [0;3] nên ta có thể làm như sau:

$$\int_0^3\left|4-x^2\right|dx=\int_0^2\left|4-x^2\right|dx+\int_2^3\left|4-x^2\right|dx=\left|\int_0^2\left(4-x^2\right)dx\right|+\left|\int_2^3\left(4-x^2\right)dx\right|=\frac{23}{3}.$$

Chọn C.

Bài 5: Gọi N là hình phẳng xác định bởi đồ thị hàm số $y=\sin^2 x$ với $0\le x\le\pi$ và trục Ox. Diện tích hình N là:

A. $\frac{\pi}{2}$. B. $\frac{\pi}{4}$. C. $\pi$. D. $2\pi$.




Giải:

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ta có:

$$S=\int_0^\pi \sin^2 x dx=\int_0^\pi\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^\pi=\frac{\pi}{2}.$$

Chọn A.

Bài 6:

1) cho $y_1=f_1(x)$ và $y_2=f_2(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn [a;b]. Giả sử: $\alpha$ và $\beta$, với $a\le\alpha<\beta\le b$, là các nghiệm của phương trình $f_1(x)-f_2(x)=0$. Khi đó diện tích của hình phẳng

giới hạn bởi 2 đường thẳng và đồ thi của hàm số được cho bởi công thức $S=\int_{a}^{\alpha}\left|f_1(x)-f_2(x)\right|dx+\int_{\alpha}^{\beta}\left|f_1(x)-f_2(x)\right|dx+\int_{\beta}^{b}\left|f_1(x)-f_2(x)\right|dx.$

(2) Cũng với giải thiết như (1), nhưng:
$S=\left|\int_{a}^{\alpha}\left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx\right|+\left|\int_{\alpha}^{\beta}\left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx\right|+\left|\int_{\beta}^{b}f_1(x)-f_2(x)dx\right|.$

A. (1) đúng nhưng (2) sai. B. (2) đúng nhưng (1) sai.
C. Cả (1) và (2) đều đúng. D. Cả (1) và (2) đều sai.
Giải:

Chú ý rằng với mọi $x\in(\alpha;\beta), f_1(x)-f_2(x)\neq 0$ và $f_1(x)$ và $f_2(x)$ đều liên tục trên khoảng $(\alpha;\beta)$, nên $f_1(x)-f_2(x)$ giữ nguyên dấu.

Nếu $f_1(x)-f_2(x)>0$ thì ta có:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left|f_1(x)-f_2(x)\right|dx=\int_{\alpha}^{\beta}\left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx=\left|\int_{\alpha}^{\beta}\left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx\right|$$

Nếu $f_1(x)-f_2(x)<0$ thì ta có:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left|f_1(x)-f_2(x)\right|dx=\int_{\alpha}^{\beta}\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx=\left|\int_{\alpha}^{\beta}\left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx\right|$$

Vậy trong mọi trường hợp ta đều có:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left|f_1(x)-f_2(x)\right|dx=\left|\int_{\alpha}^{\beta}\left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx\right|$$

Tương tự như thế đối với 2 tích phân còn lại. vì vậy, hai công thức (1) và (2) là như nhau:
Chọn C.

Bài 7: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đường $y=x$, trục hoành và đường thẳng $y=4-x$ là:
A. 5. B. 3. C. 4. D. 6.

Giải:

Vẽ đồ thị ba đường $y=x, y=0, y=4-x$ và tìm các giao điểm:

$$\begin{cases} y = 4 - x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(4;0)$$

$$\begin{cases} y = 4 - x \\ y = x \end{cases} \Rightarrow B(2;2)$$

$$S = \int_0^2 x dx + \int_2^4 (4 - x) dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^2 + \left. \left( 4x - \frac{x^2}{2} \right) \right|_2^4 = 4$$

Từ đó

Chọn C.

Bài 8: Gọi M là hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 5x^4 + 3x^2 + 3$. Diện tích hình M là:

A. 5. B. 10. C. 6. D. 12.

Giải:

Ta có: trên đoạn [0;1]

$$S = \int_0^1 \left( 5x^4 + 3x^2 + 3 \right) dx = \left. \left( x^5 + x^3 + 3x \right) \right|_0^1 = 5$$

Vậy . Chọn A.

Bài 9: Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi trục hoành các đường $y = \frac{x}{4},\ x = a,\ x = 3a\ \ (a > 0)$. Diện tích hình H là:

A. $a^2$. B. $2a^2$. C. $\frac{a^2}{2}$. D. $\frac{a}{3}$.

Giải:

$$S = \int_a^{3a} \left| \frac{x}{4} \right| dx = \int_a^{3a} \left( \frac{x}{4} \right) dx = \left. \frac{x^2}{8} \right|_a^{3a} = a^2$$

Ta có:

Chọn A.

Bài 10: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1$ là:

A. $2e$. B. $3e$. C. $e + \frac{1}{e} - 2$. D. $e + \frac{1}{e} - 1$.

Giải:

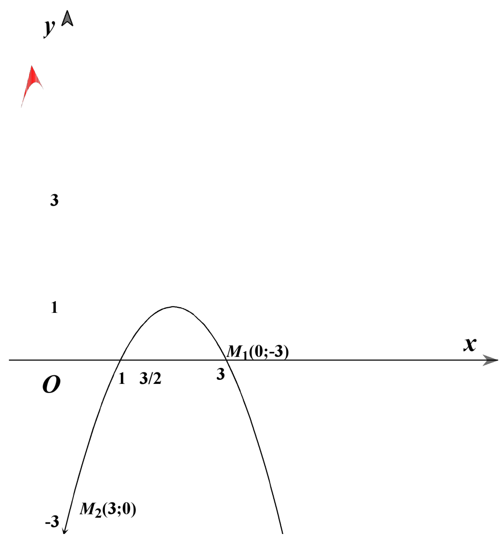
Ta có: $x=0$ là hoành độ giao điểm của hai đường cong. Diện tích cần tìm là: $\int_0^1 \left(e^x+e^{-x}\right)dx=\left(e^x+e^{-x}\right)\Big|_0^1=e+\frac{1}{e}-2$.

Chọn C.

Bài 11: Ở hình bên dưới, ta có parabol $y=-x^2+4x-3$ và các tiếp tuyến của nó tại các điểm $M_1\left(0;-3\right)$ và $M_2\left(3;0\right)$. Khi đó, diện tích phần gạch chéo là:

A. 1,6. B. 1,35. C. 2,25. D. 2,5.

Hình:




Giải:

Ta có: $f'\left(x\right)=-2x+4\Rightarrow f'(0)=4, f'\left(3\right)=-2$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_1\left(0;-3\right)$ là: $y+3=4\left(x-0\right)\Leftrightarrow y=4x-3$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_2\left(3;0\right)$ là: $y=-2\left(x-3\right)=-2x+6$

Gia điểm của hai tiếp tuyến trên có hoành độ thỏa mãn phương trình: $4x-3=-2x+6\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

Diện tích phải tìm là:

$$S=\int_0^{\frac{3}{2}}\left|(4x-3)-\left(-x^2+4x-3\right)\right|dx+\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left|(-2x+6)-\left(-x^2+4x-3\right)\right|dx$$

$$=\int_0^{\frac{3}{2}}x^2dx+\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left(x^2-6x+9\right)dx=\frac{9}{4}=2,25$$

Chọn C.

Bài 12: Gọi K là hình tạo bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x^2-2x$ trên đoạn [-1;2] và trục hoành. Khi đó diện tích của K bằng:

A. $\frac{4}{7}$ (đvdt). B. $\frac{1}{2}$ (đvdt). C. $\frac{25}{37}$ (đvdt). D. $\frac{37}{12}$ (đvdt).

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3-x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Đồ thị gồm hai phần, phần nằm trên trục hoành ứng với x thuộc đoạn [-1;0] và phần nằm dưới trục hoành ứng với x thuộc đoạn [0;2].

Do đó:

$$S=\int_{-1}^{0}\left(x^3-x^2-2x\right)dx+\int_0^2\left(-x^3+x^2+2x\right)dx=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$$ đvdt

Chọn D.

Bài 13: Gọi M là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+1,\ x+y=3$. Diện tích hình N là

A. 5,1. B. 4,5. C. 6,25. D. 4,75.

Giải:

$f(x)_1=x^2+1,\ f_2(x)=3-x$

$$f_1(x)-f_2(x)=\left(x^2+1\right)-(3-x)=x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\end{array}\right.$$

$$S=\int_{-2}^{1}\left|f_1(x)-f_2(x)\right|dx=\int_{-2}^{1}\left|x^2+x-2\right|dx=\left|\int_{-2}^{1}\left(x^2+x-2\right)dx\right|$$

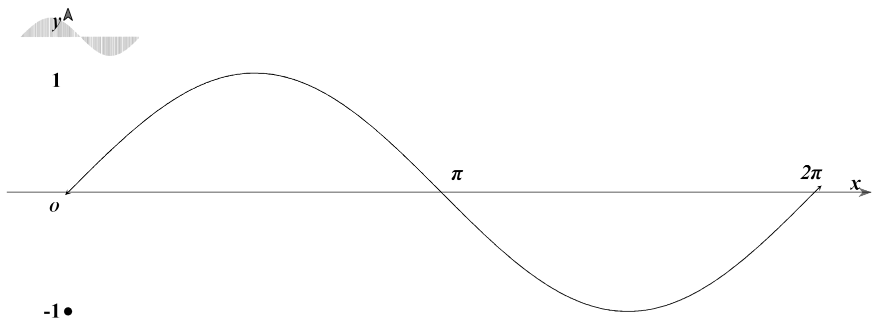
$$=\left|\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\right|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}$$

Chọn B.

Bài 14: : Gọi M là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $\left[0;2\pi\right]$ và trục hoành. Diện tích hình M là

A. 6. B. 4. C. 8. D. 10.

Hình:




Giải:

$$S = \int_0^{2\pi} \left|\sin x\right| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} \left(-\sin x\right) dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} = 4$$

Chọn B.

Bài 15: Xét hai phát biểu:

(1) Cho hai hàm $y = f\left(x\right)$ và $y = g\left(x\right)$ có đồ thị cắt nhau tại hai điểm A, B. Giả sử a, b tương ứng là hoành độ các giao điểm A, B (với a<b). Khi đó diện tích hình phẳng nằm giwuax hai đồ thị ấy bằng $S\left(M\right) = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx$.

(2) Giả sử $S\left(x\right)$ là diện tích thiết diện của vaath thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x. Khi đó, thể tích $V\left(B\right)$ của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với Ox tại các điểm a và b là $V\left(B\right) = \int_a^b S\left(x\right) dx$.

Trong hai phát biểu trên.

A. Chỉ có (1) đúng. B. Chỉ có (2) đúng.

C. Cả hai phát biểu đều đúng. D. Cả hai phát biểu đều sai.

Giải:

Cả hai đều sai vì giả thiết.

Bài (1), phải giả thiết thêm: $f(x) > g(x)$ với mọi $x \in [a;b]$.

Bài (2), phải giả thiết thêm: $S(x)$ là một hàm liên tục trên đoạn [a;b].

Chọn D.

Bài 16: Gọi K là hình giới hạn bởi parabol $y = 2 - x^2$ và đường thẳng $y = -x$. Khi đó, K có diện tích bằng:

A. 4,5 (đvdt). B. 4,11 (đvdt).

C. 3,5 (đvdt). D. 4,55 (đvdt).

Giải:

Trước hết ta tìm hoành độ các giao điểm bằng cách giải phương trình $2 - x^2 = -x$. Suy ra $x = -1$ và $x = 2$, trên đoạn [-1;2] đồ thị hàm số $f(x) = 2 - x^2$ nằm trên đồ thị hàm số $g(x) = -x$. Từ đó diện tích cần tìm là:

$$\int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))dx = \int_{-1}^{2} (2 + x - x^2)dx = \left.\left(2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\right|_{-1}^{2} = 4,5(dvdt)$$

Chọn A.

Bài 17: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 2x + 3$ và $y = 5 - x$ là:

A. 6,5 (đvdt). B. 3,5 (đvdt).

C. 4,5 (đvdt). D. 5,5 (đvdt).

Giải:

Tương tự bài 16. Chọn C.

Bài 18: Gọi P là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 2, y = 3x$. Diện tích hình P là:

A. $\frac{2}{5}$. B. $\frac{3}{7}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{4}{5}$.

Giải:

Tương tự bài 16. Chọn C.

Bài 19: Gọi *P* là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3;\ y = 0;\ x = -1;\ x = 2$. Diện tích hình *P* là:

A. 3,45. B. 2,5. C. 4. D. 4,25.

Giải:

Đặt $f_1(x) = x^3, f_2(x) = 0$

$f_1(x) = f_2(x) = x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \in [-1;2]$

.

Diện tích phải tìm là:

$$S = \int_{-1}^{2} |f_1(x) - f_2(x)| dx = \int_{-1}^{0} |x^3| dx + \int_{0}^{2} |x^3| dx$$

$$= \left| \int_{-1}^{0} x^3 dx \right| + \left| \int_{0}^{2} x^3 dx \right| = 4,25$$

Chọn D.

Bài 20: Gọi Q là hình phẳng giới hạn bởi đường $y = 4x - x^2$ và trục hoành. Diện tích hình Q là:

A. $\frac{4}{9}$. B. $\frac{23}{15}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{32}{3}$.

Giải: Tương tự bài 16. Chọn D.

Bài 21: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$ là:

A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{3}{7}$. C. $\frac{12}{27}$. D. $\frac{5}{3}$.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$. Diện tích cần tính là:

$$S = \int_{0}^{2} |2x - x^2| dx = \frac{4}{3}$$

. Chọn C.

Bài 22: Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \ln x$ tại giao điểm của đồ thị đó với trục Ox. Diện tích của hình tam giác tạo bởi hai trục tọa độ và đường thẳng d được xác định bởi tích phân:

A. $\int_{0}^{1} \ln x dx$. B. $\int_{0}^{1} \frac{\ln x}{x} dx$. C. $\int_{0}^{1} (x-1) dx$. D. $\int_{0}^{1} (x-1) dx$

Giải:

Tọa độ giao điểm của đồ thị y=lnx với trục Ox là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = \ln x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ta có: $y'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x},\ y'(1)=1$.

Vậy phương trình của tiếp tuyến d là: $y-0=1(x-1)\Leftrightarrow y=x-1$.

Diện tích phải tìm : $S=\int\limits_0^1|x-1|dx=\int\limits_0^1(1-x)dx=\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}$.

Chọn D.

Bài 23: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=-\dfrac{\pi}{2};\ x=\pi;\ y=0;\ y=\cos x$. Ta được kết quả:

A. 6. B. 2. C. 3. D. 12.

Giải:

Trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$, phương trình cos$x$=0 có các nghiệm $x_1=\dfrac{-\pi}{2};x_2=\dfrac{\pi}{2}$.

Vậy: $S=\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\pi}|\cos x|dx=\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos x|dx+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}|\cos x|dx=\left|\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)dx\right|+\left|\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos x)dx\right|=3$.

Chọn C.

Bài 24: Gọi H là hình phẳng nằm giữa hai đồ thị các hàm số $f(x)=x^3-3x$ và $g(x)=x$. Khi đó H có diện tích bằng:

A. 8. B. 12. C. 32. D. 40.

Giải:

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là $x=0,x=2$ và $x=-2$.

Ta có: $S(H)=\int\limits_{-2}^{0}(x^3-3x-x)dx+\int\limits_{0}^{2}(x-x^3+3x)dx=8$.

Chọn A.

Bài 25: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường parabol $y=x^2-2x+2$ và $y=-x^2-x+3$ là:

A. $\dfrac{9}{8}$. B. $\dfrac{5}{4}$. C. 1,5. D. 1,25.

Giải:

Tương tự bài 24. Chọn A.

Bài 26: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đường cong $y=x(x-1)(x-2)$. Ta được kết quả:

A. 9. B. 10,2. C. 31. D. 1,5.

Giải:

$$x(x-1)(x-2)=0 \Leftrightarrow x=\{0;1;2\}$$

Ta có: .

$$S=\int_0^2 |x(x-1)(x-2)|dx=\int_0^1 |x(x-1)(x-2)|dx+\int_1^2 |x(x-1)(x-2)|dx$$

$$=\left|\int_0^1 (x^3-3x^2+2x)dx\right|+\left|\int_1^2 (x^3-3x^2+2x)dx\right|$$

$$\left|\left(\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right)\Big|_0^1\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right)\Big|_1^2\right|=\frac{1}{2}$$

Chọn D.

Bài 27: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y=6$ và đường cong $y=2x^3-x^2-8x+1$ là:

A. $\frac{2305}{12}$. B. $\frac{2401}{96}$. C. 144,5. D. 25,5.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $6-(2x^3-x^2-8x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{5}{2} \end{array}\right.$.

$$S=\int_{-1}^{\frac{5}{2}} |6-(2x^3-x^2-8x+1)|dx=\frac{2401}{96}$$

Chọn B.

Bài 28: Trong mặt phẳng Oxy, diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x^2;\ x=y^2$ được tính bằng tích phân:

A. $\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}} (2x^2-x)dx$. B. $\int_0^1 (\sqrt{x}-2x^2)dx$

C. $\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}\left(\sqrt{x}-2x^2\right)dx$.

D. $\int_{0}^{1}\left(2x^2-x\right)dx$

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm có hai nghiệm là $x=0, x=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

Diện tích cần tìm là: $\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}\left(\sqrt{x}-2x^2\right)dx$

Chọn C.

Bài 29: Một miền được giới hạn bởi parabol $y=3+x-x^2$ và đường thẳng $y=2x+1$. Diện tích của miền đó là:

A. 3. B. 4,5. C. 3,5. D. 4.

Giải:

Ta tìm giao điểm của hai đường đã cho bằng cách giải phương trình hoành độ giao điểm:

$$3+x-x^2=2x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Trên đoạn [-2;1] ta có: $3+x-x^2 \geq 2x+1$ do đó:

$$S=\int_{-2}^{1}\left|3+x-x^2-(2x+1)\right|dx=\int_{-2}^{1}\left(2-x-x^2\right)dx=\left(2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=\frac{9}{2}=4,5$$

Chọn B.

Bài 30: Gọi Q là hình phẳng nằm giữa hai đường $f_1(x)=x^3-3x-8$ và $f_2(x)=x-8$. Diện tích hình Q là:

A. 8. B. 12. C. 14. D. 20.

Giải:

Ta có:

$$f_1(x)-f_2(x)=x^3-4x=x\left(x^2-4\right)=0 \Leftrightarrow x=-2, x=0, x=2$$

.

Diện tích phải tìm là:

$$S=\int_{-2}^{2}\left|x^3-4x\right|dx=\int_{-2}^{0}\left|x^3-4x\right|dx+\int_{0}^{2}\left|x^3-4x\right|dx=\left|\int_{-2}^{0}\left(x^3-4\right)dx\right|+\left|\int_{0}^{2}\left(x^3-4\right)dx\right|$$

$$=\left|\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Big|_{-2}^{0}\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Big|_{0}^{2}\right|=8$$

Chọn A.

Bài 31: Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=-x^2+6x-8$, tiếp tuyến tại đỉnh của parabol này và trục tung. Diện tích hình H là:

A. 8. B. 8,5. C. 9. D. 9,5.

Giải:

Hàm số $y=-x^2+6x-8$ có hệ số a<0 nên parabol úp xuống. Hoành độ đỉnh của parabol là: $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{6}{-2}=3$. Phương trình tiếp tuyến của parabol tại đỉnh là $y=y'(3)(x-3)+y(3)=0(x-3)+1=1$

Do đó diện tích cần tìm là $\int_0^3\left|1-\left(-x^2+6x-8\right)\right|dx=9$ (có thể sử dụng MTCT)

Chọn C.

Bìa 32:

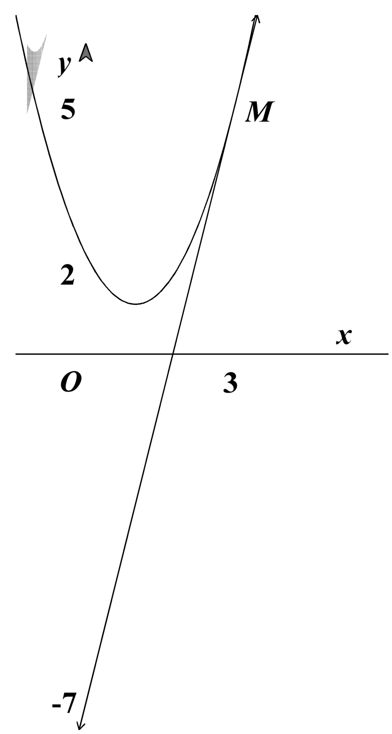
Ở hình bên ta có parabol $y=x^2-2x+2$, tiếp tuyến với nó tại điểm $M(3;5)$.

Diện tích phần gạch chéo là:

A. 9. B. 10.

C. 12. D. 15.

Hình:



Giải:

$f_1(x) = x^2 - 2x + 2$ $f_1'(x) = 2x - 2, f_1'(3) = 4$

Đặt: . Ta có: .

Tiếp tuyến của parabol đã cho tại điểm M(3;5) có phương trình

$y - 5 = 4(x - 3) \Leftrightarrow y = 4x - 7$

$f_2(x) = 4x - 7$

Đặt:

Đường thẳng phải tìm là:

$$\int_0^3 |f_1(x) - f_2(x)| dx = \int_0^3 \left|\left(x^2 - 2x + 2\right) - (4x - 7)\right| dx$$

$$= \int_0^3 \left|\left(x^2 - 6x + 9\right)\right| dx = \int_0^3 (x - 3)^2 dx = \left(\frac{(x-3)^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = 9$$

Chọn A.

Bài 33: Gọi K là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^3 - 3x$ và tiếp tuyến với đường cong này tại điểm có hoành độ $x = \frac{-1}{2}$. Diện tích hình K là:

A. $\frac{8}{15}$. B. $\frac{31}{7}$. C. $\frac{9}{16}$. D. $\frac{27}{64}$.

Giải:

Tiếp tuyến của đường cong tại điểm $x = -\frac{1}{2}$ có phương trình:

$$y = -\frac{9}{4}\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{11}{8} \Leftrightarrow y = -\frac{9}{4}x + \frac{1}{4}$$

Tiếp tuyến này cắt đường cong tại điểm có hoành độ x =1. Vậy diện tích hình phẳng K là:

$$\int_{\frac{-1}{2}}^{1} \left[-\frac{9}{4}x + \frac{1}{4} - x^3 + 3x\right] dx = \frac{27}{64}$$

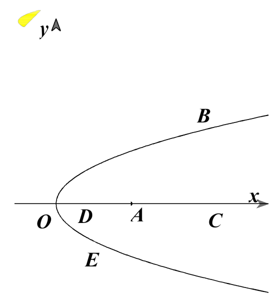
.

Chọn D.

Bài 34: Tính diện tích của hình giới hạn bởi đường cong có phương trình $x=y^2$ và đường thẳng $y=x-2$. Kết quả là:

A. 1,5. B. 2,5. C. 3. D. 4.

Giải:




Ta có: $x=y^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\sqrt{x} \\ y=-\sqrt{x} \end{array}\right.$. Ta tìm giao điểm của $y=\sqrt{x}$ và $y=-\sqrt{x}$ với $y=x-2$:

Giải phương trình $\sqrt{x}=x-2$ và $-\sqrt{x}=x-2$.

$$x=x^2-4x+4 \Leftrightarrow x=1, x=4$$

Suy ra:

$$S=\left[\int_0^4 \sqrt{x}dx - S(\Delta ABC)\right] + \left[\int_0^1 \left|-\sqrt{x}\right|dx + S(\Delta ADE)\right]$$

Từ đó ta có:

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 - 2 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 + \frac{1}{2} = \frac{10}{3} - 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

Chọn B.

Bài 35: Diện tích của miền được giới hạn bởi hai đường cong $y=\cos x$ và $y=\sin 2x$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ là:

A. 0,3. B. 0,4. C. 0,5. D. 0,6.

Giải:

Đầu tiên giải phương trình $\cos x=\sin 2x$ trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

$$\cos x = 2\sin x\cos x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \\ \sin x=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{6} \end{array}\right.$$

Ta có:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos x - \sin 2x)dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - \cos x)dx$$

Suy ra diện tích cần tìm bằng :

$$= \left(\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \left(-\frac{1}{2}cos2x - \sin x\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} + \left(\frac{-1}{2} - 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = 0,5$$

Chọn C.

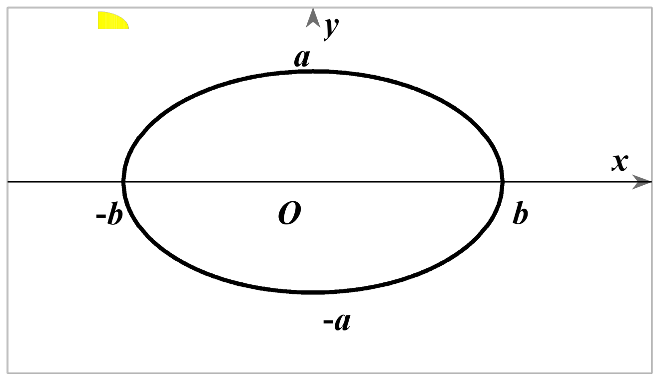
Bài 36: Diện tích của phần hình elip như hình vẽ là:

A. $ab$

B. $\pi ab$ .

C. $\pi a^2 b^2$

D. $\frac{\pi a^2 b^2}{2}$ .




Giải:

Phương trình elip là: $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$. Diện tích cần tìm là: $S = 4S_1, (S_1)$ là diện tích của một phần tư elip) ứng với $y \geq 0$ nên $S_1$ được giwois hạn bởi đồ thị hàm số

$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, (0 \leq x \leq a)$, đường thẳng x =0 và trục Ox.

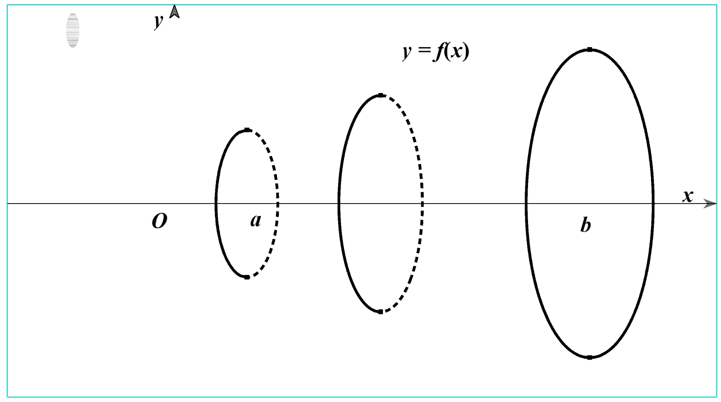
Do đó:

$$S = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx = 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$$

Ta có: $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{\pi a^2}{4}$ suy ra $S = \pi ab.$

Chọn B.

Bài 37: Hình phẳng gới hạn bởi các đường $f = f(x), x = a, x = b, y = 0$, quay xung quanh trục Ox tạo thành một vật thể tròn xoay T. Thể tích của T là:




A. $V = \int_a^b y^2 dx$.

B. $V = \pi \int_a^b y dx$.

C. $V = \pi \int_a^b y^2 dx$

D. $V = 2\pi \int_a^b y dx$.

Giải:

Theo công thức sách giáo khoa thì chọn C đúng.

Chọn C.

Bài 38: Gọi G là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$ và các tiếp tuyến với đường cong xuất phát từ điểm $M\left(\frac{5}{3}; -1\right)$. Diện tích hình G là:

A. $\frac{9}{8}$.  B. $\frac{31}{47}$.  C. $\frac{9}{16}$.  D. $\frac{27}{64}$.

Giải:

Phương trình đường thẳng đi qua điểm $M\left(\frac{5}{2}; -1\right)$ là: $y = kx - \frac{5}{2}k - 1$. Đường thẳng này tiếp xúc với parabol khi và chỉ khi $k = -1$ hoặc $k = 2$.

Với $k = -1$. Tiếp điểm có hoành độ $x_0 = 1$; với $k = 2$, tiếp điểm có hoành độ $x_1 = 4$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M_0\left(1; \frac{1}{2}\right)$ là $y = -x + \frac{3}{2}$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M_1(4; 2)$ là: $y = 2x - 6$.

Vậy diện tích hình phẳng là:

$$\int_1^{\frac{5}{2}}\left|\left(\frac{1}{2}x^2-2x+2\right)-\left(-x+\frac{3}{2}\right)\right|dx+\int_{\frac{5}{2}}^{4}\left|\left(\frac{1}{2}x^2-2x+2\right)-\left(2x-6\right)\right|dx=\frac{9}{8}$$

Chọn A.

Bài 39: Gọi Q là hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đường parabol $y=5x-x^2$. Cho Q quay quanh trục Ox, ta nhận được hình tròn xoay có thể tích bằng:

A. $\frac{625}{6}\pi.$ B. $166\pi.$ C. $126\pi.$ D. $122.9\pi$

Giải:

$$5x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=5\end{array}\right.$$

Ta có: . Vậy thể tích phải tìm là:

$$V=\pi\int_0^5 y^2dx=\pi\int_0^5\left(5x-x^2\right)^2dx=\pi\int_0^5\left(25x^2-10x^3+x^4\right)dx$$

$$=\pi\left(\frac{25}{3}x^3-\frac{5}{2}x^4+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^5=\frac{625}{6}\pi$$

Chọn A.

Bài 40: Cho hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đường $y=2x-x^2$. Thể tích của vật thể tròn xoay khi cho hình này quay xung quanh trục Ox là:

A. $\frac{2}{3}\pi.$ B. $\frac{16}{15}\pi.$ C. $\frac{10}{21}\pi.$ D. $\frac{3}{4}\pi.$

Giải:

$$2x-x^2=x\left(2-x\right)=0\Leftrightarrow x=0;x=2$$

Ta có:

$$V=\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2dx=\pi\int_0^2\left(4x^2-4x^3+x^4\right)dx=\pi\left|\left(\frac{4}{3}x^3-x^4+\frac{x^5}{5}\right)\right|_0^2=\frac{16\pi}{15}$$

.

Chọn B.

Bài 41: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường có phương trình $y=-\sqrt{4-x^2}$ và $x^2+3y=0$. Ta được kết quả:

A. $\frac{4\pi+\sqrt{3}}{3}$.
B. $\frac{4\pi}{3}$.
C. $\frac{\pi+\sqrt{3}}{3}$
D. $\frac{2\pi-\sqrt{3}}{3}$.

Giải:

$$S=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left|\frac{-x^2}{3}+\sqrt{4-x^2}\right|dx=2\int_0^{\sqrt{3}}\left[\frac{-x^2}{3}+\sqrt{4-x^2}\right]dx$$

Ta có:

$$=2\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}dx-\frac{2}{9}x^3\Big|_0^{\sqrt{3}}=2\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}dx-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$x=2\sin t\Rightarrow S=8\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 tdt-\frac{2\sqrt{3}}{3}=4\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)dx-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Đặt

$$=[4t+2\sin 2t]\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{4\pi+\sqrt{3}}{3}\text{(dvdt)}$$

Chọn A.

Bài 42: Gọi H là phần mặt phẳng hữu hạn được giới hạn bởi hai trục tọa độ, đường thẳng $x=1$ và đường cong có phương trình $y=1+x^3$. Thể tích khối tròn xoay do H sinh ra khi quay quanh trục Ox là:

A. . $\frac{5}{3}\pi$.
B. $\frac{23}{14}\pi$.
C. $\frac{9}{14}\pi$.
D. $2\pi$.

Giải:

$$V=\pi\int_0^1\left(1+x^3\right)dx=\frac{23}{14}\pi$$

(sử dụng MTCT)

Chọn B.

Bài 43: Gọi M là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{4}{x}, y=0, x=1, x=4$. Thể tích hình tròn xoay khi M quay quanh trục Ox là:

A. $6\pi$.
B. $12\pi$.
C. $15\pi$.
D. $4\pi$.

Giải:

Tương tự bài 42.

Chọn B.

Bài 44: Khi quay hình phẳng tạo bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x},(x>0)$ và các đường thẳng $x=0,x=4$ xung quanh trục hoành, ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $\pi.$ B. $2\pi.$ C. $8\pi.$ D. $14\pi.$

Giải:

$$V=\pi\int_0^4 xdx=8\pi.$$

Ta có:

Chọn C.

Bài 45: Diện tích của hình phẳng giwois hạn bởi đường thẳng $y=x+4$ và parabol $y=x^2-2x+4$ là:

A. 4,5. B. 5,6. C. 5,4. D. 5,2.

Giải:

Hoành độ giao điểm của parabol $y=x^2-2x+4$ và đường thẳng $y=x+4$ là:

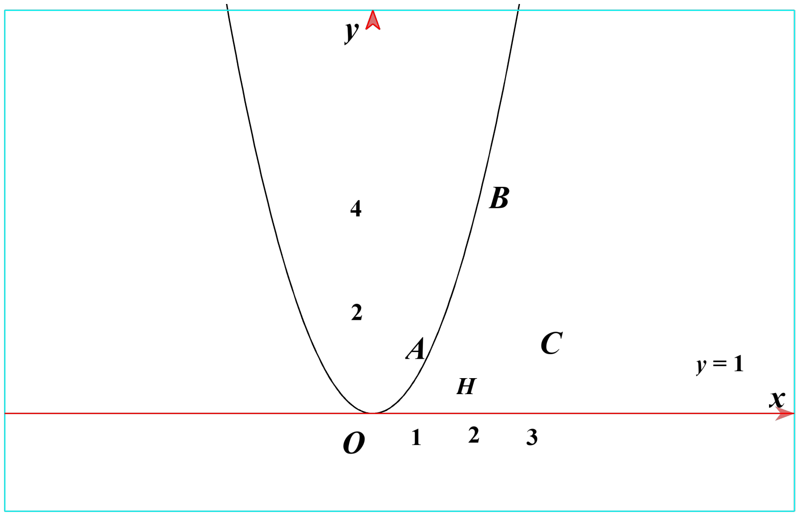
$$x^2-2x+4=x+4 \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$$

$$S=\int_0^3 \left|x^2-3x\right|dx=\frac{9}{2}$$

Chọn A.

Bài 46: Gọi D là miền được giới hạn bởi các đường $y=-3x+10, y=1, y=x^2$ và D nằm ngoài parabol $y=x^2$. Khi cho D quay xung quanh trục Ox, ta nhận được vaath thể tròn xoay có thể tích là:

A. $11\pi.$ B. $\frac{56}{5}\pi.$ C. $12\pi.$ D. $\frac{25}{3}\pi.$




Giải:

Gọi $V_1;V_2$ lần lượt là thể tích tam giác cong $ABH$ và tam giác HBC tạo nên khi xoay quanh trục Ox, phần diện tích được biểu diễn qua đồ thị sau:

$$V = V_1 + V_2 = \pi\int_1^2\left[(x^2)^2 - 1^2\right]dx + \pi\int_2^3\left[(-3x+10)^2 - (1)^2\right]dx = \frac{56\pi}{5}\text{(dvtt)}$$

Vậy

Chọn B.

Bài 47: Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung, đường thẳng x=1 và đường cong $y = x^3 + 1$. Cho H quay quanh trục Ox ta nhận được hình tròn xoay có thể tích bằng:

A. $5\pi.$ B. $6\pi.$ C. $\frac{23}{14}\pi.$ D. $\frac{1}{2}\pi.$

Giải:

$$V = \pi\int_0^1\left(x^3+1\right)^2dx = \frac{23}{14}\pi$$

Chọn C.

Bài 48: Cho hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung,và các đường $x = \pi, y = \sin^2 x$. Thể tích của vật thể tròn xoay khi cho hình này quay quanh trục Ox là:

A. $\frac{\pi^2}{8}$. B. $\frac{2\pi^2}{15}$. C. $\frac{2\pi^2}{8}$. D. $\frac{3\pi^2}{8}$.

Giải:

$$V = \pi\int_0^{\pi}\left(\sin^2 x\right)^2dx = \frac{3}{8}\pi^2$$

Chọn D.