CHƯƠNG 04 (tiếp theo)
BÀI TOÁN VẬN DỤNG CAO SỐ PHỨC
CHỦ ĐỀ 2.
PHƯƠNG TRÌNH SỐ PHỨC.

Bài 26: Tập hợp điểm biểu diễn số phức $|z-2i|=3$ là đường tròn tâm I. Tất cả giá trị m thỏa mãn khoảng cách từ I đến $\Delta: 3x+4y-m=0$ bằng $\frac{1}{5}$ là:

A. $m=-7; m=9$ **B.** $m=-8; m=8$ **C.** $m=7; m=9$ **D.** $m=8; m=9$

Lời giải

$$|z-2i|=3 \Leftrightarrow |x+(y-2)i|=3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-2)^2}=3 \Leftrightarrow x^2+(y-2)^2=9 \Rightarrow I(0;2)$$

$$d(I,\Delta)=\frac{|3.0+4.2-m|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{5}|8-m|$$

$$d(I,\Delta)=\frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{5}|8-m|=\frac{1}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8-m=1 \\ 8-m=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=7 \\ m=9 \end{array}\right.$$

Chọn C.

Bài 27: Trong mặt phẳng phức, cho M là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi, M\neq 0$. Xem số phức $Z=\frac{1}{2}\left(z^2-\frac{1}{z^2}\right)$. Tìm tập hợp điểm M sao cho Z là một số thực.

A. Trục tung (hay trục hoành) , không kể điểm O.
B. Trục tung hay trục hoành
C. Đường thẳng $y=1$
D. Đường thẳng $x=1$

Lời giải

Trường hợp Z là một số thực $\Leftrightarrow$ Phần ảo bằng 0.

$$\Leftrightarrow \frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\left[\left(x^2+y^2\right)^2+1\right]=0 \Leftrightarrow xy=0, x^2+y^2\neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y\neq 0 \\ y=0, x\neq 0 \end{array}\right.$$

Tập hợp điểm M trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z là

- Trục tung , không kể điểm O.
- Trục hoành, không kể điểm O.

Chọn A.

Bài 28: Trong mặt phẳng phức, cho M là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi, M\neq 0$. Xem số phức $Z=\frac{1}{2}\left(z^2-\frac{1}{z^2}\right)$. Tìm tập hợp điểm M sao cho Z là một số thuần ảo.

A. Đường tròn tâm $O,$ bán kính $R=1$

B. Đường tròn tâm $I\left(0;1\right)$ bán kính $R=1$

C. Đường thẳng $y=1$

D. Đường thẳng $x=1$

Lời giải

Trường hợp Z là một số thuần ảo $\Leftrightarrow$ Phần thực bằng 0.

$\Leftrightarrow\left(x^2+y^2\right)^2-1=0\Leftrightarrow x^2+y^2=1$

Tập hợp điểm M là đường tròn tâm $O,$ bán kính $R=1$.

Chọn A.

Bài 29: Cho $Z=\dfrac{1-iz}{1+iz},z\in\mathbf{C}$, $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbf{R}$. Tìm tập hợp điểm M sao cho Z là một số thực.

A. Trục tung ngoại trừ điểm $A\left(0;1\right)$

B. Trục hoành ngoại trừ điểm $A\left(0;1\right)$

C. Đường thẳng $y=1$

D.Đường thẳng $x=1$

Lời giải

Ta có: $z=x+yi;x,y\in R\Rightarrow Z=\dfrac{1-zi}{1+zi}=\dfrac{1-i\left(x+yi\right)}{1+i\left(x+yi\right)}$

$\Rightarrow Z=\dfrac{1-yi^2-xi}{1+yi^2+xi}=\dfrac{1+y-xi}{1-y+xi}=\dfrac{\left(1+y-xi\right)\left(1-y-xi\right)}{\left(1-y+xi\right)\left(1-y-xi\right)}$

$=\dfrac{\left(1-xi\right)^2-y^2}{\left(1-y\right)^2-x^2i^2}=\dfrac{1+x^2i^2-2xi-y^2}{\left(1-y\right)^2+x^2}=\dfrac{1-x^2-y^2-2xi}{\left(1-y\right)^2+x^2}$

Z là một số thực $\Leftrightarrow x=0,y\neq 0$

Ta có $z=yi,y\neq 1$.

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là trục tung ngoại trừ điểm $A\left(1;0\right)$.

Chọn A.

Bài 30: Cho $Z=\dfrac{1-iz}{1+iz},z\in\mathbf{C}$, $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbf{R}$. Tìm tập hợp điểm M sao cho Z là một số thuần ảo.

A. Đường tròn tâm $O,$ bán kính $R=1$ ngoại trừ điểm $A\left(0;1\right)$

B. Đường tròn tâm $O,$ bán kính $R=1$

C. Đường thẳng $y=1$

D. Đường thẳng $x=1$

Lời giải

Số phức Z là một số thuần ảo khi và chỉ khi: $\begin{cases}1-x^2-y^2=0\\ \left(1-y\right)^2+x^2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x\neq 0,y\neq 0\end{cases}$

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $O,$ bán kính $R=1$ ngoại trừ điểm $A\left(0;1\right)$

Chọn A.

Bài 31: Trong mặt phẳng phức, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z sao cho: Số phức z có mô đun bằng 1.

A. Đường tròn tâm $O,$ bán kính $R=1$

B. Đường tròn tâm $O(2;2),$ bán kính $R=1$

C. Đường thẳng $y=1$

D. Đường thẳng $x=1$

Lời giải

Gọi M là điểm nằm trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbf{R}$

Ta có: $|z|=1\Leftrightarrow OM=1$

Tập hợp điểm M là đường tròn tâm $O,$ bán kính $R=1$

Chọn A.

Bài 32: Trong mặt phẳng phức, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z sao cho: Số phức z có phần thực bằng 1.

A. Đường tròn tâm $O,$ bán kính $R=1$

B. Đường tròn tâm $O(2;2),$ bán kính $R=1$

C. Đường thẳng $y=1$

D. Đường thẳng $x=1$

Lời giải

Ta có: $a=1$

Tập hợp điểm M là đường thẳng $D:x=1$

Chọn D.

Bài 33: Trong mặt phẳng phức, tập hợp điểm M biểu diễn các số phức z sao cho: Số phức z có phần ảo bằng -1.

A. Đường tròn tâm $O,$ bán kính $R=1$

B. Đường tròn tâm $O(2;2),$ bán kính $R=1$

C. Đường thẳng $y=-1$

D. Đường thẳng $x=1$

Lời giải

Ta có: $b=-1$

Tập hợp điểm M là đường thẳng $\Delta:y=-1$

Chọn C.

Bài 34: Tìm trong mặt phẳng tập hợp (λ) các điểm M biểu diễn số phức z sao cho $Z=z+\dfrac{4}{z}$ là một số thực.

A. Trục hoành $x'Ox$ ngoại trừ điểm gốc và đường tròn tâm O, bán kính $R=2$

B. Trục hoành $x'Ox$ ngoại trừ điểm gốc và đường tròn tâm O, bán kính $R=1$

C. Đường tròn tâm O, bán kính $R=1$

D. Trục hoành $x'Ox$ ngoại trừ điểm gốc

Lời giải

Đặt $z=x+yi,(z\neq 0)$ với $x,y\in\mathbf{R}.$

Ta có: $Z=z+\dfrac{4}{z}=x+yi+\dfrac{4}{x+yi}=x+yi+\dfrac{4(x-yi)}{x^2+y^2}$

$$\Rightarrow Z=\frac{x\left(x^2+y^2+4\right)+y\left(x^2+y^2-4\right)i}{x^2+y^2}$$

Z là một số thực: $\Leftrightarrow \begin{cases} y\left(x^2+y^2+4\right)=0 \\ x^2+y^2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \vee x^2+y^2=4 \\ x^2+y^2\neq 0 \end{cases}$

Do đó (λ) gồm :

- Trục hoành $x'Ox$ ngoại trừ điểm gốc.
- Đường tròn tâm $O,$ bán kính $R=2.$

Chọn A.

Bài 35: Trong mặt phẳng phức, tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z sao cho: $|z|=2|z-i|.$

A. $x^2+y^2-\frac{8}{3}y+\frac{4}{3}=0$ **B.** $(x+1)^2+(y-1)^2=4$

C. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ **D.** $3x^2+4y^2-36=0$

Lời giải

Cách 1. Đặt $z=x+yi,(z\neq 0)$ với $x,y\in R$

Ta có: $|z|=2|z-i| \Leftrightarrow x^2+y^2=4\left(x^2+(y-1)^2\right) \Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{8}{3}y+\frac{4}{3}=0$

Cách 2. Ta có: $|z|=2|z-i| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{OM}\right|=2\left|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{OM}\right|=2\left|\overrightarrow{BM}\right|$

Với $B(1;0)$ là điểm biểu diễn số $i.$

Do đó ta có: $OM=2BM \Leftrightarrow \frac{MO}{MB}=2$

Ta suy ra tập hợp các điểm M là đường tròn Apollonius đường kính IJ , với I,J thuộc trục tung và:

$\begin{matrix} \overrightarrow{OI}=2\overrightarrow{IB} \\ \overrightarrow{OJ}=-2\overrightarrow{JB} \end{matrix} \Rightarrow I\left(0;\frac{2}{3}\right)$ và $J(0;2)$

Phương trình đường tròn : $x^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2(y-2)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{8}{3}y+\frac{4}{3}=0$

Chọn A.

Bài 36: Trong mặt phẳng phức, tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z sao cho: $|1-z|=|z-i|.$

A. Đường thẳng $y=x$

B. Đường tròn tâm $I(0;1),$ bán kính $R=1$

C. Đường thẳng $y=1$

D. Đường thẳng $x=1$

Lời giải

Cách 1. Đặt $z=x+yi,(z\neq 0)$ với $x,y\in R$

Ta có: $|1-z|=|z-i| \Leftrightarrow (1-x)^2+y^2=x^2+(y-1)^2 \Leftrightarrow y=x.$

Cách 2. Gọi A là ảnh của 1 và B là ảnh của $i: A(1;0), B(0;1).$

Ta có: $|1-z|=|z-i| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MB}\right| \Leftrightarrow MA=MB$

Do đó tập hợp các điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng $AB \Rightarrow y=x$

Chọn A.

Bài 37: Trong mặt phẳng phức, cho số phức a bất kì, tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z sao cho: $|z-a|.|\bar{z}-\bar{a}|=a\bar{a}.$

A. Đường tròn tâm A , bán kính $R=AO$

B. Đường tròn tâm A , bán kính $R=2$

C. Một hyperbol vuông góc

D. Đường thẳng $x=1$

Lời giải

Ta có: $|z-a|.|\overline{z}-\overline{a}|=a\overline{a} \Leftrightarrow |z-a|^2=|a|^2$ $\quad (1)$

Gọi A là điểm biểu diễn số phức a trong mặt phẳng phức.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow |\overrightarrow{MA}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2 \Leftrightarrow AM^2=OA^2 \Rightarrow AM=AO$

Do đó, tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A , bán kính $R=AO$.

Chọn A.

Bài 38: Trong mặt phẳng phức, cho số phức a bất kì, tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z sao cho: $z^2-a^2=\overline{z}^2-\overline{a}^2$.

A. Đường tròn tâm A , bán kính $R=AO$

B. Đường tròn tâm A , bán kính $R=2$

C. Một hyperbol vuông góc

D. Đường thẳng $x=1$

Lời giải

Ta có: $z^2-a^2=\overline{z}^2-\overline{a}^2 \Leftrightarrow z^2-\overline{z}^2=a^2-\overline{a}^2 \Leftrightarrow (z+\overline{z})(z-\overline{z})=(a+\overline{a})(a-\overline{a})$ $\quad (2)$

Đặt: $\begin{cases} z=x+yi \\ a=\alpha+\beta i \end{cases}$

Ta có: $(2) \Leftrightarrow 2x(2yi)=2\alpha(2\beta i) \Leftrightarrow xy=\alpha\beta$

Do đó, tập hợp các điểm M là một hyperbol vuông góc.

Chọn C.

Bài 39: Trong mặt phẳng phức, tìm tập hợp các điểm M là ảnh của số phức z sao cho: Ảnh của các số i, z, iz thẳng hàng.

A. Đường tròn $x^2+y^2-x-y=0,$ có tâm $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ngoại trừ điểm $(0;1)$

B. Đường tròn $x^2+y^2-x-y=0,$ có tâm $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. Một hyperbol vuông góc

D. Đường thẳng $x=1$

Lời giải

Cách 1: Gọi điểm biểu diễn số phức z là $M(x;y)$.

Gọi điểm biểu diễn số phức i là $N(0;1)$.

Gọi điểm biểu diễn số phức iz là $P(-y;x)$.

$\overrightarrow{NM}=(x;y-1); \overrightarrow{NP}=(-y;x-1)$

Vì 3 điểm M, N, P thẳng hàng nên ta có: $x(x-1)=-y(y-1) \Leftrightarrow x^2+y^2-x-y=0.$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn $x^2+y^2-x-y=0,$ có tâm $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ngoại trừ điểm $(0;1)$.

Cách 2: Kí hiệu $M(z)$ dùng để chỉ M là điểm biểu diễn số phức z hay ảnh của số phức z.

Giả sử các điểm $A(i), M(z), M'(iz)$ thẳng hàng:

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = k\overrightarrow{MA}, k \in R \Leftrightarrow iz - z = k(i - z) \Leftrightarrow k = \dfrac{iz - z}{i - z}$

Đặt $z = x + yi \Rightarrow k = \dfrac{i(x+yi) - (x+yi)}{i - (x+yi)} \Rightarrow k = \dfrac{[(-y-x)+(x-y)i][-x+(y-1)i]}{[-x-(y-1)i][-x+(y-1)i]}$

$\Leftrightarrow k = \dfrac{x^2+y^2+x-y}{x^2+(y-1)^2} - \dfrac{x^2+y^2-x-y}{x^2+(y-1)^2}i$

k là một số thực . Do đó ta có: $\begin{cases} x^2+y^2-x-y=0 \\ x^2+(y-1)^2 \neq 0 \end{cases}$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn $x^2+y^2-x-y=0,$ có tâm $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ngoại trừ điểm $(0;1)$.

Chọn A.

Bài 40: Trong mặt phẳng phức, tìm tập hợp các điểm M là ảnh của số phức z sao cho: Ảnh của các số z, z^2, z^4 thẳng hàng.

A. Đường tròn $x^2+y^2-x-y=0,$ có tâm $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, bán kính $R=1$ ngoại trừ điểm $(0;1)$

B. Đường tròn $x^2+y^2-x-y=0,$ có tâm $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C. Một hyperbol vuông góc và trục hoành Ox

D. Đường thẳng $x = -\dfrac{1}{2}$ và trục hoành Ox

Lời giải

Các điểm $M(z), M'(z^2), M''(z^4)$ thẳng hàng.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MM''} = k\overrightarrow{MM'}, k \in R \Leftrightarrow z^4 - z = k(z^2 - z) \Leftrightarrow z(z^3-1) - kz(z-1) = 0$

$\Leftrightarrow z(z-1)(z^2+z+1-k) = 0, z \neq 0,1 \Leftrightarrow z^2+z+1-k=0$

Đặt $z = x+yi; x, y \in R$

Ta có: $k = z^2+z+1 = (x+yi)^2 + (x+yi)i + 1 \Leftrightarrow k = x^2-y^2+x-1+(2xy+y)i$

$k \in R \Leftrightarrow 2xy + x = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee x = -\dfrac{1}{2}$

Vậy tập hợp điểm M gồm:

+ Trục hoành Ox.

+ Đường thẳng $x = -\dfrac{1}{2}$.

Chọn D.

Bài 41: Trong mặt phẳng phức, cho m và M là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi, M \neq 0.$ $Z = X + Yi = \dfrac{1}{2}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)$. Tìm tập hợp điểm M sao cho Z là một số thực.

A. Đường tròn tâm O, bán kính $R=1$ và trục hoành Ox, không kể điểm gốc O

B. Đường tròn tâm O, bán kính $R=1$

C. Đường thẳng $y=1$.

D. Đường thẳng $x=-\frac{1}{2}$ và trục hoành Ox

Lời giải

Ta có: $Z=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\left(x+yi+\frac{1}{x+yi}\right)=\frac{\left(x^2+y^2+1\right)x}{2\left(x^2+y^2\right)}+\frac{\left(x^2+y^2-1\right)x}{2\left(x^2+y^2\right)}$

Z là số thực khi và chỉ khi: $Y=0\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x^2+y^2-1\right)y=0\\x^2+y^2\neq 0\end{cases}\qquad(1)$

Ta có: $(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\\x^2+y^2-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\\x^2+y^2=1\end{array}\right.$

Tập hợp các điểm M phải gồm:

+ Trục hoành Ox, không kể điểm gốc O.

+ Đường tròn tâm O, bán kính $R=1$

Chọn A.

Bài 42: Trong mặt phẳng phức, cho m và M theo thứ tự là điểm biểu diễn của số phức $z=x+yi$ và $Z=\frac{z-1}{z+2i}$. Tìm tập hợp các điểm m sao cho: Z là một số thực.

A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Đường thẳng $y=2x-2$

D. Đường thẳng $x=1$

Lời giải

Ta có: $Z=\frac{z-1}{z+2i}=\frac{(x+yi)-1}{(x+yi)+2i}=\frac{x-1+yi}{x+(y+2)i}=\frac{(x-1+yi)(x-(y+2)i)}{(x+(y+2)i)(x-(y+2)i)}$

$\Rightarrow Z=\frac{x(x-1)+y(y+2)+(y-2x+2)i}{x^2+(y+2)^2}$

Z là một số thực khi và chỉ khi $y-2x+2=0$

Tập hợp các điểm m biểu diễn số phức $z=x+yi$ là đường thẳng $y-2x+2=0\Leftrightarrow y=2x-2$

Chọn C.

Bài 43: Trong mặt phẳng phức, cho m và M theo thứ tự là điểm biểu diễn của số phức $z=x+yi$ và $Z=\frac{z-1}{z+2i}$. Tìm tập hợp các điểm m sao cho: Z là một số thuần ảo.

A. Đường tròn tâm $I\left(\frac{1}{2};-1\right)$, bán kính $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Đường thẳng $y=2x-2$

D. Đường thẳng $x=1$

Lời giải

Ta có: $Z=\frac{z-1}{z+2i}=\frac{(x+yi)-1}{(x+yi)+2i}=\frac{x-1+yi}{x+(y+2)i}=\frac{(x-1+yi)(x-(y+2)i)}{(x+(y+2)i)(x-(y+2)i)}$

$\Rightarrow Z=\frac{x(x-1)+y(y+2)+(y-2x+2)i}{x^2+(y+2)^2}$

Z là một số thuần ảo khi và chỉ khi: $x(x-1)+y(y+2)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-x+2y=0$

Tập hợp các điểm m là đường tròn tâm $I\left(\frac{1}{2};-1\right)$, bán kính $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Chọn A.

Bài 44: Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z sao cho: $z+\bar{z}=k|z|$. Với k là một số thực cho trước.

A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Nửa trục Ox, nửa trục $\mathrm{Ox'}$

D. Nửa trục $\mathrm{Ox'}$

Lời giải

Đặt $z=x+yi; x,y\in R$

Ta có: $z+\bar{z}=k|z|$ $(1) \Leftrightarrow 2x=k\sqrt{x^2+y^2}$ (2)

Nếu $k=0,$ ta có: $x=0$

Tập hợp các điểm M là trục tung.

Xét $k\neq 0$:

Ta có: $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2=k^2(x^2+y^2) \\ kx\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-k^2)x^2=k^2y^2 \\ kx\geq 0 \end{cases}$

Với $-2\leq k\leq 2$ và $k\neq 0,$ ta có:

$y^2=\frac{4-k^2}{k^2}x^2 \Leftrightarrow y=\pm\frac{\sqrt{4-k^2}}{k}x \quad (kx\geq 0)$

Do đó, tập hợp M phải tìm là:

- Các đường thẳng $y=\pm\frac{\sqrt{4-k^2}}{k}x$

  + Giới hạn bởi $0<k<2, x\geq 0.$

  + Hoặc giới hạn bởi $-2<k<0, x\leq 0.$

- Nửa trục Ox nếu $k=2.$
- Nửa trục $\mathrm{Ox'}$ nếu $k=-2.$

Chọn C.

Bài 45: Cho hai số phức: $p=a+bi;\ q=c+di$

Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z sao cho số $(z-p)(z-q)$ là số thực.

A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Một hyperbol vuông góc có tiệm cận là $x=\frac{a+c}{2}; y=\frac{b+d}{2}$

D. Các đường thẳng $y=2x,$ trừ gốc tọa độ $O(0;0)$

Lời giải

Đặt $z=x+yi; x,y\in R$

Ta có: $z-p=x-a+(y-b)i$; $\quad z-q=x-c+(y-d)i$

$\Rightarrow (z-p)(z-q) = [x-a+(y-b)i][x-c+(y-d)i]$

$= (x-a)(x-c)-(y-b)(y-d)+[(x-a)(y-d)+(x-c)(y-b)]i$

$(z-p)(z-q)$ là một số thực.

$\Leftrightarrow (x-a)(x-c)-(y-b)(y-d)=0$

$\Leftrightarrow [(x-a)+(x-c)]y = (x-a)d+(x-c)b$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{(b+d)x-(ad+bc)}{2x-(a+c)}$ với $x \neq \dfrac{a+c}{2}$

Do đó ta có tập hợp các điểm M là một hyperbol vuông góc có tiệm cận là $x=\dfrac{a+c}{2}; y=\dfrac{b+d}{2}$

Chọn C.

Bài 46: Tìm trong mặt phẳng phức tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z sao cho: Số phức z có mô đun $|z| \le 1$.

A. Hình tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Một hyperbol vuông góc có tiệm cận là $x=\dfrac{a+c}{2}; y=\dfrac{b+d}{2}$

D. Các đường thẳng $y=2x$, trừ gốc tọa độ $O(0;0)$

Lời giải

Xem số phức z có $|z| \le 1$.

Tập hợp các điểm M là hình tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$.

Chọn A.

Bài 47: Tìm trong mặt phẳng phức tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z sao cho: Số phức z có mô đun $|z| \in [1;2]$.

A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Hình vành khăn gồm giữ hai hình tròn $(O;1)$ và $(O;2)$

D. Các đường thẳng $y=2x$, trừ gốc tọa độ $O(0;0)$

Lời giải

Xem số phức z có $|z| \in [1;2]$.

Tập hợp các điểm M là hình vành khăn gồm giữ hai hình tròn $(O;1)$ và $(O;2)$.

Chọn C.

Bài 48: Tìm trong mặt phẳng phức tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z thỏa điều kiện: $|z|=4$.

A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=4$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=4$

C. Một hyperbol vuông góc có tiệm cận là $x=\dfrac{a+c}{2}; y=\dfrac{b+d}{2}$

D. Các đường thẳng $y=2x$, trừ gốc tọa độ $O(0;0)$

Lời giải

Ta có: $OM = |z| \Rightarrow OM = 4$

Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=4$.

Chọn A.

Bài 49: Tìm trong mặt phẳng phức tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z thỏa điều kiện: $|z|\le 2.$

A. Hình tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=2$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Một hyperbol vuông góc có tiệm cận là $x=\frac{a+c}{2};y=\frac{b+d}{2}$

D. Các đường thẳng $y=2x,$ trừ gốc tọa độ $O(0;0)$

Lời giải

Ta có: $|z|\le 2\Leftrightarrow OM\le 2.$

Tập hợp các điểm M là hình tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=2$.

Chọn A.

Bài 50: Tìm trong mặt phẳng phức tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z thỏa điều kiện: $1<|z|\le 2.$

A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$

B. Hình vành khăn gồm các điểm giữa hai hình tròn $(O;1)$ và $(O;2)$ kể cả các điểm nằm trên đường tròn $(O;2)$; không kể các điểm nằm trên đường tròn $(O;1)$

C. Hình vành khăn gồm các điểm giữa hai hình tròn $(O;1)$ và $(O;2)$ kể cả các điểm nằm trên đường tròn $(O;2)$; $(O;1)$

D. Các đường thẳng $y=2x,$ trừ gốc tọa độ $O(0;0)$

Lời giải

$1<|z|\le 2\Leftrightarrow 1<OM\le 2$

Tập hợp các điểm M là hình vành khăn gồm các điểm giữa hai hình tròn $(O;1)$ và $(O;2)$ kể cả các điểm nằm trên đường tròn $(O;2)$; không kể các điểm nằm trên đường tròn $(O;1)$.

Chọn B.

Bài 51: Tìm trong mặt phẳng phức tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z thỏa điều kiện: $|z|=2$ và phần thực của z bằng 1.

A. Có 2 điểm: $M:M_1\left(1;\sqrt{3}\right),M_2\left(1;-\sqrt{3}\right)$

B. Chỉ có 1 điểm $M_1\left(1;\sqrt{3}\right)$

C. Chỉ có 1 điểm $M_2\left(1;-\sqrt{3}\right)$

D. Đường tròn (α) tâm O bán kính $R=2$

Lời giải

Ta có: $|z|=2\Leftrightarrow OM=2\Rightarrow M$ nằm trên đường tròn (α) tâm O bán kính $R=2$.

Phần thực của $z=1\Rightarrow M$ nằm trên đường thẳng $x=1.$

Có 2 điểm: $M:M_1\left(1;\sqrt{3}\right),M_2\left(1;-\sqrt{3}\right)$.

Chọn A.

Bài 52: Tìm tập hợp (T) các điểm M biểu diễn các số phức z sao cho $\log_{\frac{1}{2}}|z-2|>\log_{\frac{1}{2}}|z|$.

A. Miền phẳng nằm bên phải đường thẳng $x=1$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Hình vành khăn gồm các điểm giữa hai hình tròn $(O;1)$ và $(O;2)$ kể cả các điểm nằm trên đường tròn $(O;2)$; không kể các điểm nằm trên đường tròn $(O;1)$

D. Đường thẳng $x=1$

Lời giải

Điều kiện: $z\neq 0, z\neq 2$

Cách 1: Đặt $z=x+yi,(x,y\in R)$.

$\log_{\frac{1}{2}}|z-2|>\log_{\frac{1}{2}}|z|\Leftrightarrow|z-2|<|z|\Leftrightarrow(x-2)^2+y^2<x^2+y^2\Leftrightarrow x>1.$

Do đó, tập hợp (T) các điểm M biểu diễn các số phức z là miền phẳng nằm bên phải đường thẳng $x=1$.

Cách 2: Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}|z-2|>\log_{\frac{1}{2}}|z|\Leftrightarrow|z-2|<|z|$.

Gọi A là điểm biểu diễn số phức $z_1=2\Rightarrow A(2;0)$

Xét trường hợp $|z-2|=|z|\Leftrightarrow MA=MO$

Khi đó M chạy trên đường trung trực Δ của đoạn OA, có phương trình $x=1$.

Với trường hợp $|z-2|<|z|\Leftrightarrow MA<MB$

$\Rightarrow M$ nằm bên phải đường thẳng Δ.

Do đó, tập hợp (T) các điểm M biểu diễn các số phức z là miền phẳng nằm bên phải đường thẳng Δ, trung trực của đoạn thẳng OA là miền phẳng nằm bên phải đường thẳng $x=1$.

Chọn A.

Bài 53: Điểm nào sau đây biểu diễn số phức $\frac{\bar{z}+2}{z}=-2-i$?

A. $(3;-1)$ **B.** $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ **C.** $(-3;-1)$ **D.** $(-3;-3)$

Lời giải

Đặt $z=x+yi;(z\neq 0;x,y\in R)$

$$\frac{x-yi+2}{x+yi}=-2-i\Leftrightarrow x+2-yi=-2x+y+(-2y-x)i\Leftrightarrow\begin{cases}x+2=-2x+y\\-y=2y-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\y=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Chọn B.

Bài 54: Tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $|z+i|=|z-i|$ là:

A. $y=0$ **B.** $y=2$ **C.** $y=x$ **D.** $x=-1$

Lời giải

Cách 1: Đặt $z=x+yi;(z\neq 0;x,y\in R)$

$|z+i|=|z-i|\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=x^2+(y-1)^2\Leftrightarrow y=0$

Do đó tập hợp điểm cần tìm là trục Ox.

Cách 2: Nhận xét: nếu M_1,M_2 là điểm biểu diễn các số phức:

$z_1 = x_1 + y_1, z_2 = x_2 + y_2$ thì $M_1M_2 = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)}$

Xét 2 điểm $M_1(-i), M_2(i)$. Theo giả thiết ta có:

$|z+i| = |z-i| \Leftrightarrow MM_1 = MM_2, \forall M(z)$

Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực của đoạn M_1M_2 với $M_1(0;-1), M_2(0;1)$. Do đó tập hợp điểm cần tìm là trục Ox.

Chọn A.

Bài 55: Tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $|z-2| = 2$ là:

A. $x^2 + y^2 = 2$ **B.** $(x-2)^2 + y^2 = 4$ **C.** $x = 0$ **D.** $x + y = 0$

Lời giải

Xét điểm $I(2;0)$, theo giả thiết ta có: $|z-2| = 2 \Leftrightarrow MI = 2, \forall M(z)$.

Vậy tập hợp điểm M cần tìm là đường tròn tâm $I(2;0)$, bán kính $R = 2$.

Phương trình đường tròn: $(x-2)^2 + y^2 = 4$.

Chọn B.

Bài 56: Tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $|z+1| + |z-1| = 4$ là:

A. $x^2 + y^2 = 4$ **B.** $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$

C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ **D.** $3x^2 + 4y^2 - 36 = 0$

Lời giải

Xét hai điểm: $F_1(-1;0), F_2(1;0)$, theo giả thiết ta có:

$|z+1| + |z-1| = 4 \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 4, \forall M(z)$.

Vậy tập hợp điểm cần tìm là elip có các tiêu điểm $F_1(-1;0), F_2(1;0)$, nửa trục lớn $a = 2$, nửa trục nhỏ $b = \sqrt{3}$.

Phương trình elip $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

Chọn C.

Bài 57: Tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $|z-2| - |z+2| = 3$ là:

A. $x^2 - y^2 = 1$ **B.** $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 9$

C. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ **D.** $\frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = 1$

Lời giải

Xét hai điểm $F_1(-2;0), F_2(2;0)$, theo giả thiết ta có:

$|z-2| - |z+2| = 3 \Leftrightarrow MF_1 - MF_2 = 3, \forall M(z)$.

Vậy tập hợp các điểm cần tìm là hyperbol có các tiêu điểm $F_1(-2;0), F_2(2;0)$, nửa trục lớn $a = \frac{3}{2}$, nửa trục nhỏ $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Phương trình của hyperbol $\frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=1.$

Chọn D.

Bài 58: Tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $z\overline{z}+2z$ là số ảo là:

A. $2x+y+1=0,(y\neq 0)$ **B.** $2x-y+1=0,(x\neq 0)$

C. $x^2+y^2+2x=0,(y\neq 0)$ **D.** $x^2+y^2+2y=0,(x\neq 0)$

Lời giải

Đặt $z=x+yi$ thì $\overline{z}=x-yi.$ Ta có: $z\overline{z}+2z=x^2+y^2+2x+2yi$

Vì $z\overline{z}+2z$ là số ảo nên $\begin{cases}x^2+y^2+2x=0\\ y\neq 0\end{cases}$

Vậy tập hợp điểm cần tìm là $x^2+y^2+2x=0,(y\neq 0).$

Chọn C.

Bài 59: Tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $|2i-2\overline{z}|=|2z-1|$ là:

A. $4x-8y-3=0$ **B.** $4x+8y+3=0$

C. $8x-4y-1=0$ **D.** $8x+4y+1=0$

Lời giải

Đặt $z=x+yi,(x,y\in R)\Rightarrow \overline{z}=x-yi.$

$$|2i-2\overline{z}|=|2z-1|\Leftrightarrow |i-\overline{z}|=\left|z-\frac{1}{2}\right|\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\Leftrightarrow 4x+8y+3=0.(*)$$

Chọn B.

Bài 60: Tập hợp điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $|z-\overline{z}+1-i|=2$ là:

A. $y=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ **B.** $y=\pm\frac{1}{2}$ **C.** $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** Trục Ox

Lời giải

Đặt $z=x+yi,(x,y\in R).$

$$|z-\overline{z}+1-i|=2\Leftrightarrow |1+(2y-1)i|=2\Leftrightarrow 1+(2y-1)^2=4\Leftrightarrow (2y-1)^2=3\Leftrightarrow y=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}.$$

Chọn A.

Bài 61: Trong mặt phẳng cho 3 điểm A,B,C lần lượt biểu diễn các số phức $i;2-3i;-3+4i.$ Trọng tâm G của tam giác ABC biểu diễn số phức nào sau đây?

A. $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$ **B.** $-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$ **C.** $\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i$ **D.** $-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i$

Lời giải

Ta có: $A(0;1),B(2;-3),C(-3;4).$ Trọng tâm ΔABC là $G\left(\frac{-1}{3};\frac{2}{3}\right).$

Vậy trọng tâm G biểu diễn số phức $z=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i.$

Chọn B.

Bài 62: Cho 3 số phức: $1;3i;-3-5i$ biểu diễn bởi các điểm A,B,C. Điểm I thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ biểu diễn số phức nào sau đây?

A. $4+19i$ **B.** $4-19i$ **C.** $-4-19i$ **D.** $4-6i$

Lời giải

Ta có: $A(1;0),B(0;3),C(-3;-5)$

$2\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OI}\right)-3\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OI}\right)+2\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OI}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OI}=2\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}\Rightarrow I(-4;-19)$

Vậy điểm I biểu diễn số phức $z=-4-19i.$

Chọn C.

Bài 63: Trong mặt phẳng phức, gọi A,B,C lần lượt là điểm biểu diễn các số phức $1+i;4+\left(\sqrt{3}+1\right)i;1+\left(2\sqrt{3}+1\right)i.$ Tam giác ABC là:

A. Tam giác vuông tại A **B.** Tam giác vuông tại B

C. Tam giác cân tại A **D.** Tam giác đều

Lời giải

Ta có: $A(1;1),B\left(4;\sqrt{3}+1\right),C\left(1;2\sqrt{3}+1\right).$

$\Rightarrow AB=BC=CA=2\sqrt{3}.$ Vậy tam giác ABC đều.

Chọn D.

Bài 64: Trong mặt phẳng phức, gọi A,B,C lần lượt là điểm biểu diễn các số phức $\frac{4i}{i-1};(1-i)(i+2);\frac{2+6i}{3-i}.$ Tam giác ABC là:

A. Tam giác đều **B.** Tam giác vuông tại A

C. Tam giác cân tại A **D.** Tam giác vuông tại B

Lời giải

Ta có: $\frac{4i}{-1+i}=2-2i;(1-i)(i+2)=3+i;\frac{2+6i}{3-i}=2i.$

Suy ra $A(2;-2),B(3;1),C(0;2).$ $AB=BC=\sqrt{10};AC=\sqrt{20}.$

Vậy tam giác ABC vuông cân tại B.

Chọn D.

Bài 65: A,B,C,D là 4 điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số phức $1+2i;1+\sqrt{3}+i;1+\sqrt{3}-i;1-\sqrt{2}.$ Khi đó tứ giác $ABCD$ là:

A. Hình vuông **B.** Hình thoi

C. Hình thang cân **D.** Hình bình hành

Lời giải

Vì $1+2i;1-2i$ và $1+\sqrt{3}+i;1+\sqrt{3}-i$ là các cặp số phức liên hợp nên hai điểm A,D và hai điểm B,C đối xứng nhau qua trục $\mathrm{Ox}.$ Hơn nữa $1\neq 1+\sqrt{3}$ nên $ABCD$ là hình thang cân.

Chọn C.

Bài 66: Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện sau: $|z-i|=1.$

A. Đường tròn tâm $A(0;1)$, bán kính $R=1$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=2$

C. Đường thẳng $y=1$

D. Đường thẳng $x=1$

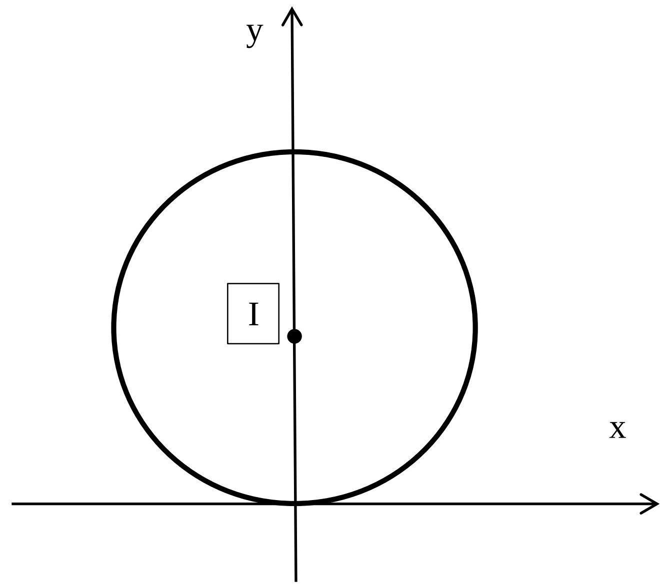
Lời giải

Giả sử: $z=x+yi, z-i=x+(y-1)i$

$|z-i|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}=1 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=1 \;(1)$

Như vậy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $z=x+yi$ thỏa mãn $|z-i|=1$ nằm trên đường tròn tâm $A(0;1)$, bán kính $R=1$

Chọn A.



Bài 67: Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện sau: $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right|=1.$

A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

C. Trục hoành

D. Đường thẳng $x=0$

Lời giải

Đặt $z=x+yi,(z\neq -i, x, y\in R).$

$\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right|=1 \Leftrightarrow |z-i|=|z+i| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+(y+1)^2} \Leftrightarrow y=0.$

Như vậy, tập hợp các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện đã cho là trục hoành.

Chọn A.

Bài 68: Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện sau: $|z|=|\overline{z}-3+4i|.$

A. Đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=1$

B. Đường tròn tâm $I(0;1)$, bán kính $R=1$

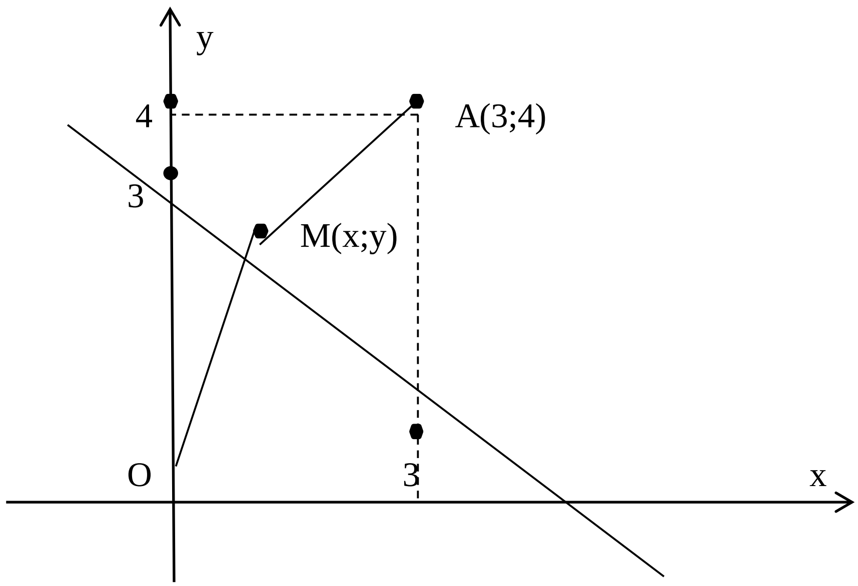
C. Đường thẳng $y=1$

D. Đường thẳng $6x+8y-25=0$

Lời giải

Cách 1: Đặt $z=x+yi,(x,y\in R).$

Ta có: $|z|=|\overline{z}-3+4i| \Leftrightarrow |x+yi|=|(x-3)+(4-y)i| \Leftrightarrow x^2+y^2=(x-3)^2+(4-y)^2 \Leftrightarrow 6x+8y-25=0.$



Cách 2: $|z| = |\bar{z} - 3 + 4i| \Leftrightarrow |x + yi| = |(x-3) + (4-y)i|$

Theo tính chất hai số phức liên hợp có mô đun bằng nhau, ta có:

$|z| = |(x-3)+(4-y)i| = |(x-3)-(4-y)i| = |(x-yi)-(3+4i)| = |z-(3+4i)|$

$|z-0| = |z-(3+4i)| \quad (2)$

Ta có, vế trái (2) là độ dài véc tơ $\overrightarrow{OM}$, vế phải (2) là độ dài véc tơ $\overrightarrow{AM}$ trong đó $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z, A(3;4)$ là điểm biểu diễn số phức $3+4i$. Hệ số (2) chứng tỏ tập hợp các số phức $z = x + yi$ có các điểm biểu diễn nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng OA là $6x + 8y - 25 = 0$.

Chọn D.

Bài 69: Trong mặt phẳng phức, cho 3 điểm A, B, C không thẳng hàng theo thứ tự biểu diễn các số phức z_1, z_2, z_3. Hỏi trong tâm tam giác ABC biểu diễn số phức nào?

A. $z = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) + \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)i$

B. $z = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3) + \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3)i$

C. $z = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3) + \frac{1}{2}(y_1 + y_2 + y_3)i$

D. $z = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) + \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)i$

Lời giải

Giả sử: $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i, z_3 = x_3 + y_3 i$ biểu diễn bởi A, B, C thì tọa độ của các điểm đó là $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$.

Trọng tâm G tam giác ABC có tọa độ $G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ biểu diễn số phức

$z = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) + \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)i.$

Chọn A.

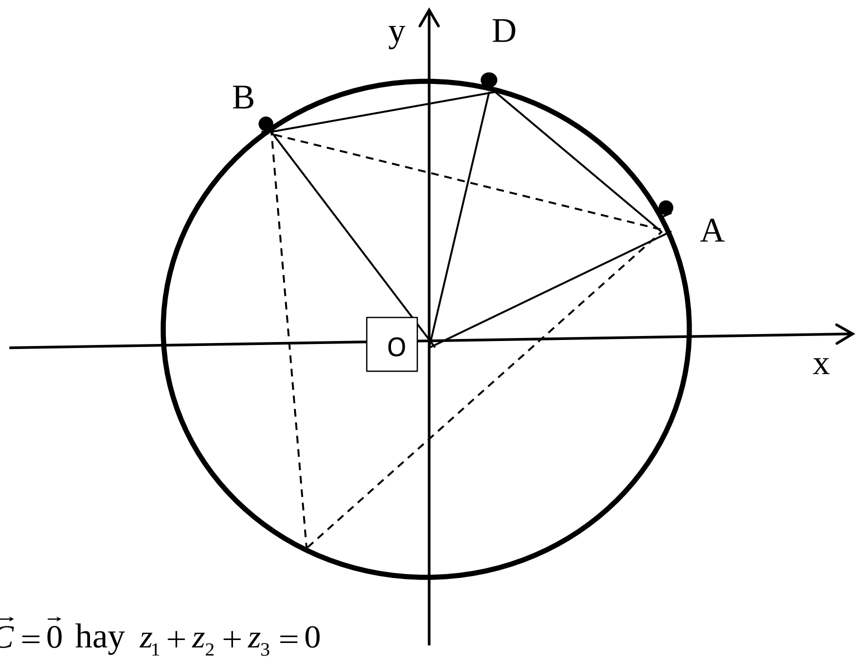
Bài 70: Xét 3 điểm A, B, C của mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn ba số phức phân biệt z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Nhận định nào sau đây đúng:

- **A.** Tam giác ABC đều
- **B.** O là tâm của tam giác ABC
- **C.** O là trọng tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC
- **D.** Trọng tâm của ΔABC là điểm biểu diễn của số phức $z_1 + z_2 + z_3$

Lời giải

Từ điều kiện $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ chứng tỏ A, B, C nằm trên một đường tròn tâm O bán kính $R = |z_1|$.

Nếu ABC là tam giác đều thì tâm O là trọng tâm của tam giác ABC. Theo tính chất trọng tâm ta có:



$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ hay $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

Đảo lại, nếu $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, ta có:

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = -\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = -\overrightarrow{OD}$

Điểm D cũng nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC (vì $\left|\overrightarrow{OC}\right| = -\left|\overrightarrow{OD}\right|, OADB$ là hình bình hành có $OA = OB = BD = DA$). Các tam giác OAD và OBD là các tam giác đều. Suy ra $\text{sd} AB = 120^0$.

Làm tương tự ta chứng minh được $\text{sd} AC = 120^0$.

Suy ra ΔABC đều.

Chọn A.

Bài 71: Trong mặt phẳng phức cho các điểm O (gốc tọa độ), A biểu diễn số 1, B biểu diễn số phức z không thực, A' biểu diễn số phức $z' \neq 0$ và B' biểu diễn số phức zz'. Nhận định nào sau đây đúng?

- **A.** Tam giác OAB đều
- **B.** Hai tam giác $OAB, OA'B'$ là hai tam giác đồng dạng
- **C.** O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác $AA'B'$
- **D.** Trọng tâm của ΔOAB là điểm biểu diễn của số phức $z_1 + z_2 + z_3$

Lời giải

Ta có $|z| = |\overrightarrow{OB}|, 1 = |\overrightarrow{OA}|, |z|' = |\overrightarrow{OA'}|, |zz|' = |z|.|z'| = |\overrightarrow{OB'}|$

Ta có: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}| = |z-1|$

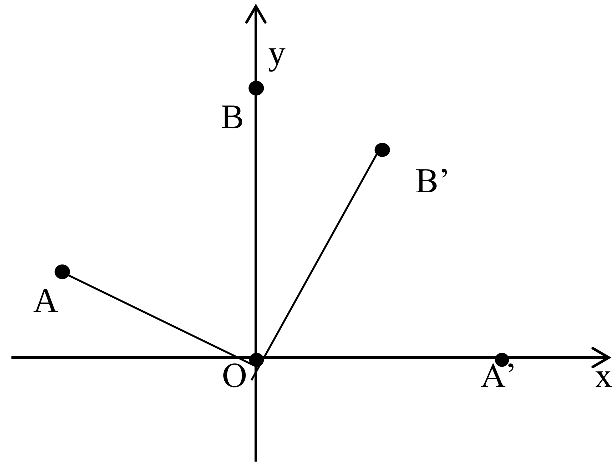
$|\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'}| = |zz' - z'| = |z'|.|z-1|$

Từ trên ta suy ra

$\dfrac{|z'|}{1} = \dfrac{|z|.|z'|}{|z|} = \dfrac{|z'|.|z-1|}{|z-1|} \Rightarrow \dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB} = \dfrac{A'B'}{AB}$

$\Rightarrow \Delta OA'B' \backsim \Delta OAB.$

Chọn B.



Bài 72: Một hình vuông tâm là gốc tọa độ O, các cạnh song song với các trục tọa độ và có độ dài bằng 4. Hãy xác định điều kiện của a và b để điểm biểu diễn số phức $z = a + bi$ nằm trên đường chéo của hình vuông.

A. $|a| > |b| > 2$ **B.** $|a| = |b| \geq 2$ **C.** $|a| = |b| \leq 2$ **D.** $|a| = |b| < 2$

Lời giải

Vì điểm biểu diễn số phức z nằm trên đường chéo của hình vuông nên

$-2 \leq a \leq 2; -2 \leq b \leq 2$ và $\left[\begin{array}{l} a = b \\ a = -b \end{array}\right.$

Vậy điều kiện là $|a| = |b| \leq 2$

Chọn C.

Bài 73: Cho $z_1 = 1 + i; z_2 = -1 - i$. Tìm $z_3 \in \mathbf{C}$ sao cho các điểm biểu diễn z_1, z_2, z_3 tạo thành tam giác đều.

A. $z_3 = -\sqrt{2}(1+i)$ và $z_3 = \sqrt{2}(1-i)$ **B .** $z_3 = -\sqrt{3}(1+i)$ và $z_3 = \sqrt{3}(1-i)$

C. $z_3 = \sqrt{2}(1+i)$ và $z_3 = -\sqrt{2}(1-i)$ **D.** $z_3 = \sqrt{3}(1+i)$ và $z_3 = -\sqrt{3}(1-i)$

Lời giải

Để giải bài toán này ta cần chú ý đến kiến thức sau:

Giả sử $M_1(x_1; y_1)$ biểu diễn số phức $z_1 = x_1 + y_1 i$

Giả sử $M_2(x_2; y_2)$ biểu diễn số phức $z_2 = x_2 + y_2 i$

Khi đó khoảng cách giữa 2 điểm M_1M_2 bằng mô đun của số phức $z_1 - z_2$.

Vậy $M_1M_2 = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Áp dụng vào bài toán: Giả sử $z_3 = x + yi$

Để các điểm biểu diễn của z_1, z_2, z_3 tạo thành một tam giác đều thì

$$\begin{cases} |z_1 - z_2| = |z_1 - z_3| \\ |z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4+4} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \\ \sqrt{4+4} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow 2y^2 = 6 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = \mp\sqrt{3}$

Vậy có hai số phức thỏa mãn là : $z_3 = \sqrt{3}(1+i)$ và $z_3 = -\sqrt{3}(1-i)$

Chọn D.

Bài 74: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm H và A,B,C,D,H lần lượt biểu diễn cho các số phức $a,b,c,d,h.$ Biết $a=-2+i;h=1+3i$ và số phức b có phần ảo âm. Khi đó mô đun của số phức b là:

A. $\sqrt{26}$ **B.** $\sqrt{13}$ **C.** $\sqrt{\frac{145}{13}}$ **D.** $\sqrt{10}$

Lời giải

Ta có: $A(-2;1);H(1;3)\Rightarrow C(4;5)$

Tam giác ABC vuông cân tại B nên : $\begin{cases} AB=BC \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0 \end{cases}$

Giải hệ tìm được $B\left(\frac{43}{13};\frac{-6}{13}\right).$

Suy ra mô đun của số phức b là $\sqrt{\frac{145}{13}}.$

Chọn C.

Bài 75: Gieo một con súc sắc cân đối đồng chất 2 lần. Ký hiệu $(a;b)$ là kết quả sẽ xảy ra sau khi gieo, trong đó a,b lần lượt là số chấm xuất hiện lần thứ nhất, thứ hai. Gọi A là biến cố số chấm xuất hiện trên hai lần gieo như nhau. Tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố A là tập hợp con của tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn điều kiện nào sau đây?

A. $|z+2+3i|\le 12$ **B.** $|z+2+3i|=10$

C. $|z+2+3i|\le 13$ **D.** $|z+2+3i|\le 11$

Lời giải

Ta có $A=\{(1;1),(2;2),(3;3),(4;4),(5;5),(6;6)\}$

Gọi $z=x+yi;x,y\in R$ khi đó $|z+2+3i|=\sqrt{(x+2)^2+(y+3)^2}$

Giả sử $|z+2+3i|\le R\Rightarrow\sqrt{(x+2)^2+(y+3)^2}\le R$

$\Rightarrow(x+2)^2+(y+3)^2\le R^2.$ Khi đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là những điểm thuộc miền trong và trên đường tròn tâm $I(-2;-3)$ và bán kính $R.$

Để tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố A là tập hợp con của tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thì $IM\le R,\forall M\in R.$

Khi đó ta được $R=13$

Chọn C.