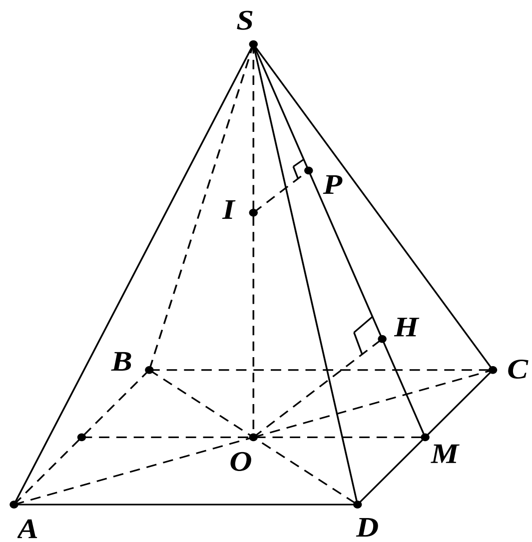
ĐỀ SỐ 2

Bài 1: Một kiến trúc sư muốn thiết kế một kim tự tháp Ai Cập có dạng là một hình chóp tứ giác đều ngoại tiếp một mặt cầu có bán kính bằng $6m$. Để tiết kiệm nguyên liệu xây dựng thì kiến trúc sư đó phải thiết kế kim tự tháp sao cho có thể tích nhỏ nhất. hãy tính chiều cao của kim tự tháp đó.?

A. 12m B. 18m C. 36m D. 24m

Giải:



Theo định lý Ta-lét:

$$\frac{SI}{SO}=\frac{IP}{OH}\Leftrightarrow\frac{h-6}{h}=\frac{6}{OH}$$

$$\Leftrightarrow OH=\frac{6h}{h-6}, SO=h, OM=\frac{a}{2}$$

Mặt khác:

$$OH=\frac{SO.OM}{\sqrt{SO^2+OM^2}}\Leftrightarrow\frac{6h}{h-6}=\frac{ah}{2\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}}$$

$$\Leftrightarrow a(h-6)=12\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}\Leftrightarrow a^2\left(h^2-12h+36\right)=144\left(h^2+\frac{a^2}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow a^2=\frac{144h^2}{h^2-12h}=\frac{144h}{h-12}$$

$$V=\frac{1}{3}.\frac{144h}{h-12}.h$$

Xét $f(h)=\dfrac{h^2}{h-12}$

$$f'(h)=\frac{h(h-24)}{(h-12)^2}\Rightarrow f'(h)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}h=0\\h=24\end{array}\right.$$

BBT

h	0		24		$+\infty$
$f'(h)$		$-$	0	$+$	
$f(h)$		↘	min	↗	

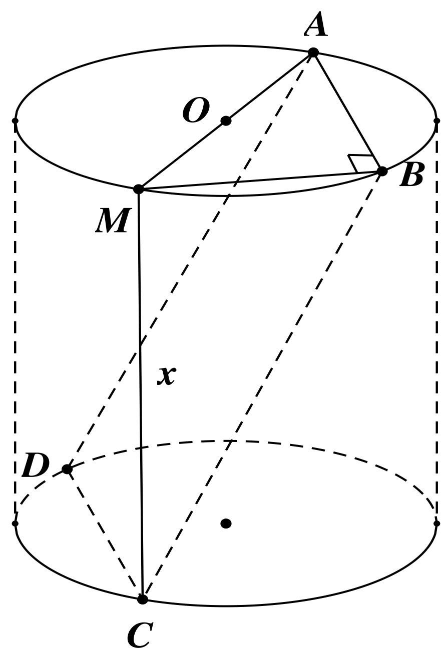
Vậy h=24 thì $V_{\min}$ .Chọn D.

Bài 2: Cho hình trụ (T) có bán kính và chiều cao thay đổi; (T) có hai đường tròn đáy(O) và (O') sao cho có một hình vuông ABCD nội tiếp trong hình trụ (T) (trong đóA, B thuộc đường tròn (O) và C, D thuộc đường tròn (O')). Biết hình vuông ABCD có diện tích $400cm^2$. Thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của hình trụ (T) là?

A. $V_{\max} = \dfrac{8000\pi\sqrt{6}}{3}$ B. $V_{\max} = \dfrac{8000\pi\sqrt{3}}{9}$

C. $V_{\max} = \dfrac{8000\pi\sqrt{6}}{9}$ D. $V_{\max} = \dfrac{8000\pi\sqrt{3}}{3}$

Giải:



Kẻ $BM \perp AB$ và cắt (O) tại M, nối MC.

Khi đó: $OA = OM = r, MC = h$

Hình vuông ABCD có:

$S + 400cm^2 \Rightarrow AB = BC = 20cm$

Gọi chiều cao hình trụ:

(T): $MC = h = x \quad (0 < x < 20)$

$\Rightarrow MB^2 = 20^2 - x^2$

$\Rightarrow AM^2 = 20^2 + 20^2 - x^2 = 800 - x^2$

Suy ra $MO^2 = r^2 = \dfrac{800 - x^2}{4}$

Ta có: $V_{(T)} = \pi.r^2.h = \pi.\dfrac{1}{4}\left(800 - x^2\right).x$

$V_{(T)}$ lớn nhất khi hàm số $y = \left(800 - x^2\right).x$ đạt GTLN.

$y' = -3x^2 + 800; y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 800 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{20\sqrt{6}}{3}$

BBT

x	0		$\dfrac{20\sqrt{6}}{3}$		20
Y'		+	0	$-$	
y		↗	$\dfrac{8000\sqrt{6}}{9}$	↘	

Bài 3: Một ngọn hải đăng đặt ở vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 5(km)$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là $7(km)$. Người canh hải đăng có thể chèo đó từ A đến điểm M trên bờ biển với vận tốc $4(km/h)$ rồi đi bộ đến C với vận tốc $6(km/h)$. Xác định vị trí của điểm M để người đó đến kho nhanh nhất.

A. $\dfrac{\sqrt{74}}{4}$ B. $\dfrac{29}{12}$

C. $\sqrt{29}$ D. $2\sqrt{5}$

Giải:

Đặt $x = BM; 0 \le x \le 7$. Khi đó $AM = \sqrt{x^2+25}, MC = 7-x$.

Thời gian người canh hải đăng đi từ A đến C là $T(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4} + \dfrac{7-x}{6}$ (giờ), $0 \le x \le 7$

Người canh hải đăng tới kho nhanh nhất khi thời gian T nhỏ nhất:

$y = \dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4} + \dfrac{7-x}{6}$ đạt GTNN.

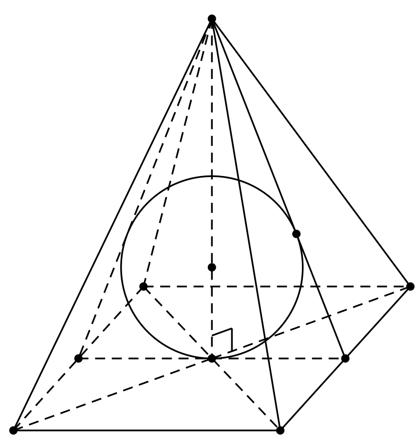
$$y' = \frac{6x - 4\sqrt{x^2+25}}{24\sqrt{x^2+25}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x - 4\sqrt{x^2+25} = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5}$$

Lập BBT suy ra:

Hàm số T đạt GTNN tại điểm $x = 2\sqrt{5} \approx 4,472\,(km)$. Chọn D.

Bài 4: Một công trình nghệ thuật kiến trúc công viện có dạng là một tòa nhà hình chóp tứ giác đều ngoại tiếp một mặt cầu có bán kính là 5m. Toàn bộ tòa nhà đó được trang bị hệ thống điều hòa làm mát do vậy để tiết kiệm điện người ta đã xây dựng tòa nhà sao cho có thể tích nhỏ nhất. Tìm chiều cao tòa nhà này.

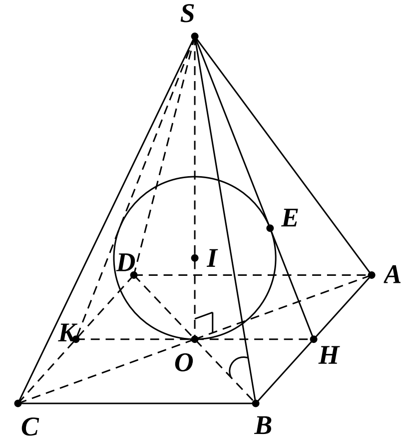


A. $SO = 20m$ B. $SO = 19m$ C. $SO = 18m$ D. $SO = 17m$

Giải:

Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp, mặt cầu tiếp xúc với mặt (SAB) tại E, suy ra E thuộc SH.

Đặt $SO = x$, xét hai tam giác vuông đồng dạng SEI và SOH ta có:

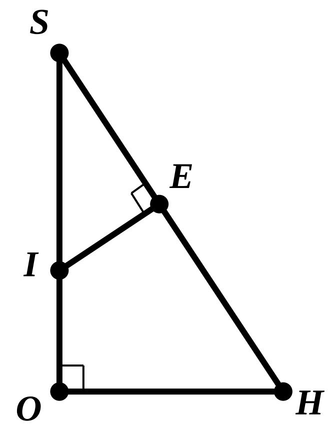


$$\frac{IE}{HO}=\frac{SE}{SO}\Leftrightarrow SO.IE=SE.OH\Leftrightarrow 5x=\left(SH-EH\right).\frac{AB}{2}$$

$$=\left(SH-OH\right).\frac{AB}{2}=\left(\sqrt{SO^2+\frac{AB^2}{4}}-\frac{AB}{2}\right).\frac{AB}{2}$$

Suy ra

$$x.AB=5\left(2\sqrt{x^2+\frac{AB^2}{4}}+AB\right)$$



$$\Leftrightarrow 10\sqrt{x^2+\frac{AB^2}{4}}=\left(x-10\right)AB$$

$$\Rightarrow AB^2=\frac{100x}{x-10}$$

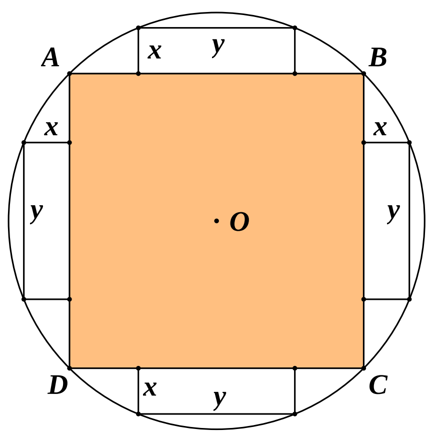
$$\Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.\mathrm{SO}.\mathrm{AB}^2=\frac{1}{3}.\frac{100.SO^2}{\left(SO-10\right)}$$

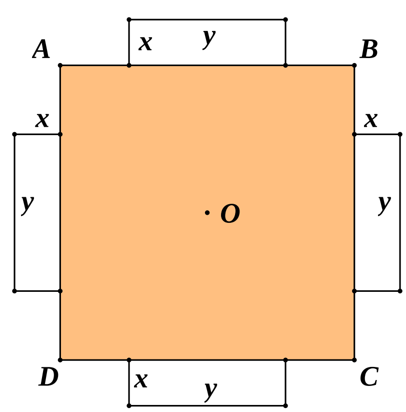
Xét $f(x)=\dfrac{100x^2}{3\left(x-10\right)}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-20x}{\left(x-10\right)^2}=0\Leftrightarrow x=20$

Vậy chiều cao của tòa nhà là $SO=20m$. chọn A.

Bài 5:

Từ một mảnh bìa hình tròn tâm O, bán kính R=4cm, người ta cắt ra một hình gồm 1 hình vuông và 4 hình chữ nhật bằng nhau. Các hình chữ nhật có kích thước là $x\left(cm\right)$ và $y\left(cm\right)$. Tìm x, y để diện tích hình được cắt ra là lớn nhất.





Giải:

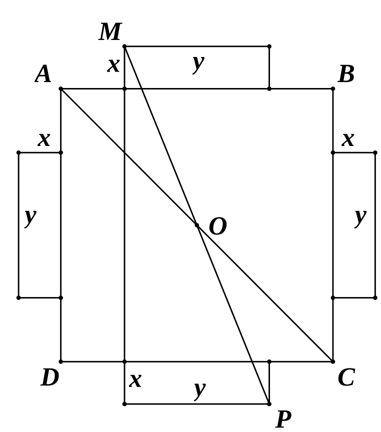
Đường tròn đường kính $2R=8cm$

$$\Rightarrow AC=8cm\Rightarrow AB=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$$

Diện tích hình được cắt ra là:

$$\left(4\sqrt{2}\right)^2+4xy=4xy+32$$

Xét tam giác MNP:



$$NP^2 = MP^2 - MN^2$$

$$\Rightarrow y^2 = 8^2 - \left(4\sqrt{2} + 2x\right)^2 = -4x^2 - 16\sqrt{2}x + 32$$

$$\Rightarrow y = 2\sqrt{-x^2 = 4\sqrt{2}x + 8}$$

$$f\left(x\right) = 4x.2.\sqrt{-x^2 - 4\sqrt{2}x + 8} + 32 = 8x\sqrt{-x^2 - 4\sqrt{2}x + 8} + 32 \quad \left(0 < x < 2\right)$$

$$f'\left(x\right) = 8\sqrt{-x^2 - 4\sqrt{2}x + 8} - \frac{4x\left(2x + 4\sqrt{2}\right)}{\sqrt{-x^2 - 4\sqrt{2}x + 8}}$$

$$f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_{max} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{34} - 3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y$$

Bài 6: Một xưởng cơ khí nhận làm những chiếu thùng phi với thể tích theo yêu cầu là $2\pi\left(m^3\right)$ mỗi chiếu. Hỏi thùng phải có kích thước thế nào để tiết kiệm vật liệu nhất?

A. $R = 1m, h = 2m$ B. $R = 1m, h = 3m$ C. $R = 3m, h = 2m$ D. $R = 1m, h = 4m$

Giải:

Do thùng phi có dạng hình trụ kín hai đầu nên:

Gọi R: là bán kính đáy thùng (m).

h: là chiều cao của thùng (m).

ĐKXĐ R,h >0

Ta có: $V_{th} = \pi R^2 h = 2\pi \Leftrightarrow h = \frac{2}{R^2}\left(*\right)$

Diện tích toàn phần của thùng là:

$S_{tp} = 2\pi R\left(h + R\right) \quad \left(**\right)$

Thay (*) vào (**), ta có:

$$S_{tp} = 2\pi R\left(\frac{2}{R^2} + R\right) = 2\pi\left(\frac{2}{R} + R^2\right)$$

$$S'_{tp} = 2\pi\left(\frac{-2}{R^2} + R\right) = \frac{4\pi}{R^2}\left(R^3 - 1\right) = \frac{4\pi}{R^2}\left(R - 1\right)\left(R^2 + R + 1\right)$$

Cho S’=0, Ta có R=1

BBT

R	0		1		$+\infty$
S’	||	$-$	0	$+$	
S	||	$\searrow$	min	$\nearrow$	

Vậy cần chế tạo thùng với kích thước: R=1m,h=2m. Chọn A.

Bài 7: Một nhà máy dự định sản xuất một loại thùng hình trụ có chiều cao là h, bán kính đáy là r. Biết rằng chi phí sản xuất cho mỗi thùng như vậy được xác định theo công thức: $C = 5\pi r^2 + 60\pi rh$. Hãy xác định r, h sao cho thùng có thể tích mong muốn là $1125cm^3$ với chi phí sản xuất là thấp nhất?

A. $r=\frac{15\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\pi}}$ và $h=\frac{5}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{\pi}}$ B. $r=\frac{15\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\pi}}$ và $h=\frac{6}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{\pi}}$

C. $r=\frac{15\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\pi}}$ và $h=\frac{7}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{\pi}}$ D. $r=\frac{15\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\pi}}$ và $h=\frac{8}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{\pi}}$

Giải:

Thể tích mỗi thùng: $V=\pi r^2h=1125\Rightarrow h=\frac{1125}{\pi r^2}$

Chi phí: $C=5\pi r^2+60\pi rh=5\pi r^2+60\pi r\frac{1125}{\pi r^2}=5\pi r^2+\frac{67500}{r}$

Tính đạo hàm $C'(r)=10\pi r-\frac{67500}{r^2}$

$C'(r)=0\Leftrightarrow 10\pi r^3=67500\Leftrightarrow r=\sqrt{\frac{67500}{\pi}}=\frac{15\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\pi}}$

Với: $r=\frac{15\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\pi}}\Rightarrow C(r)=3375.\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{\pi}$ $và\ h=\frac{5}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{\pi}}$

BBT

r	0		$\frac{15\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\pi}}$		$+\infty$
$C'(r)$		$-$	0	$+$	
$C(r)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

Suy ra: Với $r=\frac{15\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{\pi}}$ $và\ h=\frac{5}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{\pi}}$ thì chi phí sản xuất là thấp nhất và bằng $C(r)_{\min}=3375.\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{\pi}$. chọn A.

Bài 8: Một sợi dây cứng dài 1m được cắt thành 2 đoạn, 1 đoạn được cuộn thành hình tròn, đoạn kia thành hình vuông. Tìm độ dài mỗi đoạn nếu tổng diện tích hình tròn và hình vuông là nhỏ nhất?

A. Cuộn thành hình tròn: $x=\frac{\pi}{4+\pi}m$, cuộn thành hình vuông: $\frac{4}{4+\pi}m$

B. Cuộn thành hình tròn: $x=\frac{\pi}{4+\pi}m$, cuộn thành hình vuông: $\frac{5}{4+\pi}m$

C. Cuộn thành hình tròn: $x=\frac{\pi}{4+\pi}m$, cuộn thành hình vuông: $\frac{6}{4+\pi}m$

D. Cuộn thành hình tròn: $x=\frac{2\pi}{4+\pi}m$, cuộn thành hình vuông: $\frac{4}{4+\pi}m$

Giải:

Gọi x là chiều dài của đoạn dây cuộn thành hình tròn $(0<x<1)$. Suy ra chiều dài đoạn dây cuộn thành hình vuông là: $1-x$.

Chu vi hình tròn với bán kính R là: $2\pi R = x \Rightarrow R = \dfrac{x}{2\pi}$

Diện tích hình tròn: $S_{tron} = \pi R^2 = \dfrac{x^2}{4\pi}$

Diện tích hình vuông $S_{hv} = \left(\dfrac{1-x}{4}\right)^2$

Tổng diện tích hai hình: $S = S_{tron} + S_{hv} = \dfrac{x^2}{4\pi} + \left(\dfrac{1-x}{4}\right)^2 = \dfrac{(4+\pi)x^2 - 2\pi x + \pi}{16\pi}$

$S' = \dfrac{(4+\pi)x - \pi}{8\pi}$

$$\left.\begin{array}{l} S' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4+\pi} \text{ (t/ m)} \\ S'' = \dfrac{4+\pi}{8} > 0, \forall \text{ x} \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4+\pi}$ là điểm cực tiểu của hàm số $S(x)$

Vậy tổng diện tích hình tròn và hình vuông là nhỏ nhất thì chiều dài đoạn cuộn thành hình tròn là $x = \dfrac{\pi}{4+\pi} m$, cuộn thành hình vuông là: $\dfrac{4}{4+\pi} m$. Chọn A.

Bài 9: Một chuyến xe bus có sức chứa tối đa là 60 hành khách. Nếu 1 chuyến xe chở được x hành khách thì giá cho mỗi hành khách $\left(3 - \dfrac{x}{40}\right)$ đô. Tính số hành khách trên mỗi chuyến để thu được trên mỗi chuyến lợi nhuận lớn nhất?

A. 40 hành khách B. 45 hành khách. C. 50 hành khách D. 55 hành khách

Giải:

Gọi x là số hành khách trên mỗi chuyến xe để tiền thu được là lớn nhất $(0 < t \le 60)$.

Số tiền thu được là:

$F(t) = \left(3 - \dfrac{t}{40}\right)^2 t = 9t - \dfrac{3}{20}t^2 + \dfrac{t^3}{1600} \Rightarrow F'(t) = 9 - \dfrac{3}{10}t + \dfrac{3t^2}{1600}$

Cho $F'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 40(N) \\ t = 120(L) \end{array}\right.$

BBT

t	0		40		60
$F'(t)$		+	0	−	
$F(t)$		↗	160	↘	

Vậy để thu được tiền lớn nhất thì số khách trên mỗi chuyến xe là 40 hành khách. Chọn A.

Bài 10: Người ta muốn làm một cái hộp chữ nhật không có nắp và có chiều dài gấp đôi chiều rộng và có thể tích $10cm^3$. Giả sử giá tiền vật liệu làm đáy thùng là 100.000 đồng/m^2 và vật liệu làm mặt bên là 5.000đồng/m^2. Hãy xác định kích thước của thùng để chi phí của thùng nhỏ nhất.

A. Dài là $2.\sqrt[3]{(15/4)}$; rộng là: $\sqrt[3]{(15/4)}$; cao là: $y=5/\sqrt[3]{(15/4)}$

B. Dài là $2.\sqrt[3]{(15/4)}$; rộng là: $3\sqrt[3]{(15/4)}$; cao là: $y=6/\sqrt[3]{(15/4)}$

C. Dài là $2.\sqrt[3]{(15/4)}$; rộng là: $\sqrt[3]{(15/4)}$; cao là: $y=7/\sqrt[3]{(15/4)}$

D. Dài là $2.\sqrt[3]{(15/4)}$; rộng là: $4\sqrt[3]{(15/4)}$; cao là: $y=8/\sqrt[3]{(15/4)}$

Giải:

Gọi S: chi phí, x: chiều rộng, $2x$: chiều dài, y: chiều cao.

Từ giả thiết đề bài Ta có:

$S=2x.x.10000+2\left(xy+2xy\right).5000=20000x^2+30000xy$

Mà $V=2x^2y=10\Rightarrow y=\dfrac{5}{x^2}$

Suy ra:

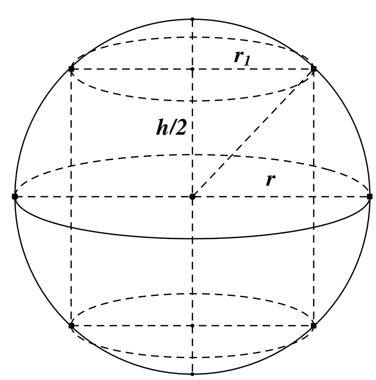
$S=20000x^2+30000.\dfrac{5}{x}=20000x^2+\dfrac{150000}{x}$

$S'=40000x-\dfrac{150000}{x^2}$

$S'=0\Leftrightarrow 40000x-\dfrac{150000}{x^2}=0\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\left(\dfrac{15}{4}\right)}\Rightarrow y=\dfrac{5}{\sqrt[3]{\dfrac{15}{4}}}$

Vậy: Dài là $2.\sqrt[3]{(15/4)}$; rộng là: $\sqrt[3]{(15/4)}$; cao là: $y=5/\sqrt[3]{(15/4)}$. chọn A.

Bài 11: Cho hình trụ nội tiếp trong hình cầu bán kính r. Xác định chiều cao và bán kính để hình trụ có thể tích lớn nhất.



A. $h=\dfrac{2\sqrt{3}r}{3};r_1=\dfrac{\sqrt{6}}{3}r$ B. $h=\dfrac{3\sqrt{3}r}{3};r_1=\dfrac{\sqrt{6}}{3}r$

C. $h=\dfrac{2\sqrt{3}r}{5};r_1=\dfrac{\sqrt{6}}{3}r$ D. $h=\dfrac{2\sqrt{3}r}{3};r_1=\dfrac{\sqrt{6}}{3}r$

Giải:

Goi h là chiều cao của hình trụ.

r_1 là bán kính đáy của hình trụ.

Ta có:

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2+r_1^2=r^2$$

Thể tích hình trụ là:

$$V=\pi r_1^2h=\pi\left(r^2-\frac{h}{4}\right)h=\pi r^2h-\pi\frac{h^3}{4}$$

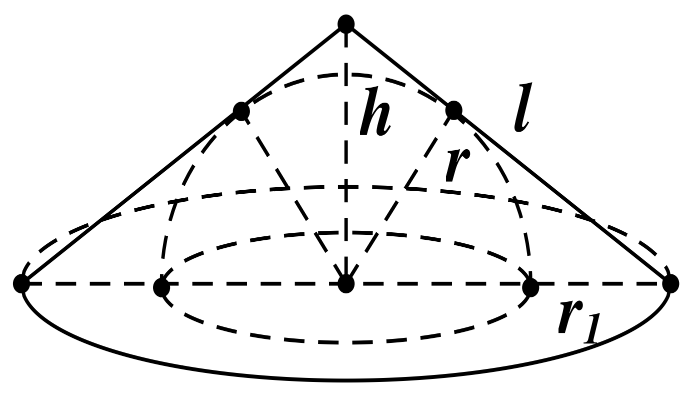
Xét hàm $V(h)=\pi r^2h-\pi\dfrac{h^3}{4}$

$$\Rightarrow V'(h)=\pi r^2-\frac{3\pi}{4}h^2$$

$$V'(h)=0\Leftrightarrow \pi r^2-\frac{3\pi}{4}h^2\Leftrightarrow h^2=\frac{4r^2}{3}\Rightarrow h=\frac{2\sqrt{3}r}{3}$$

Dễ thấy điểm $h=\dfrac{2\sqrt{3}r}{3}$ là điểm cực đại của hàm số $V(h)$ và tại $h=\dfrac{2\sqrt{3}r}{3}$ thì V(h) đạt giá trị lớn nhất. Vậy, thể tích hình trụ lớn nhất khi và chỉ khi $h=\dfrac{2\sqrt{3}r}{3}\rightarrow r_1=\dfrac{\sqrt{6}}{3}r$. Chọn A.

Bài 12: Cho nửa hình cầu bán kính r không đổi. Một hình nón có chiều cao h, bán kính đáy là r_1. Hãy xác định h và r_1 để diện tích xung quanh của hình nón là nhỏ nhất biết rằng mặt ngoài của hình nón tiếp xúc của mặt cầu và 2 đường tròn đáy đồng tâm và cùng thuộc 1 mặt phẳng.



A. $r_1=\dfrac{\sqrt{6}}{2}r\Rightarrow h=\sqrt{3}r$

B. $r_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}r\Rightarrow h=\sqrt{5}r$

C. $r_1=\dfrac{\sqrt{7}}{2}r\Rightarrow h=\sqrt{5}r$

D. $r_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}r\Rightarrow h=\sqrt{5}r$

Giải:

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{h^2}=\frac{1}{r^2}\Rightarrow\frac{1}{h^2}=\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r_1^2}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{h^2}=\frac{r_1^2-r^2}{\left(r.r_1\right)^2}\Rightarrow h^2=\frac{\left(r.r_1\right)^2}{r_1^2-r^2}$$

Gọi ℓ là đường sinh của của hình nón ta có:

$$l^2=h^2+r_1^2=\frac{\left(r.r_1\right)^2}{r_1^2-r^2}+r^2=\frac{r_1^4}{r_1^2-r^2}\ \Rightarrow l=\frac{r_1^2}{\sqrt{r_1^2-r^2}}$$

Vậy diện tích xung quanh của hình nón là: $S=2\pi l r_1=\frac{2\pi r_1^3}{\sqrt{r_1^2-r^2}}$

Xét hàm: $S\left(r_1\right)=\frac{2\pi r_1^3}{\sqrt{r_1^2-r^2}}$

$$\Rightarrow S'=2\pi\left(\frac{3r_1^2\sqrt{r_1^2-r^2}-\frac{r_1^4}{\sqrt{r_1^2-r^2}}}{r_1^2-r^2}\right)=2\pi\left(\frac{3r_1^2\left(r_1^2-r^2\right)-r_1^4}{\left(r_1^2-r^2\right)\sqrt{r_1^2-r^2}}\right)$$

$$\Rightarrow S'=0\Leftrightarrow 3r_1^2\left(r_1^2-r^2\right)-r_1^4=0$$

$$\Leftrightarrow 2r_1^4-3r_1^2r^2=0\Rightarrow r_1^2=\frac{3}{2}r^2\Rightarrow r_1=\frac{\sqrt{6}}{2}r\Rightarrow h=\sqrt{3}r$$

Vậy diện tích xung quanh của hình nón có giá trị nhỏ nhất khi $r_1=\frac{\sqrt{6}}{2}r\Rightarrow h=\sqrt{3}r$. Chọn A.

Bài 13: Người ta muốn mạ vàng cho một cái hộp có đáy là hình vuông không có có nắp có thể tích là $4l$. Tìm kích thước của thùng để lượng vàng mạ là ít nhất. Giả sử độ dày dmm của lớp mạ tại mọi nơi trên mặt ngoài hộp là như nhau:

A. Cạnh đáy hộp: $x=2$, chiều cao hộp $h=1$.

B. Cạnh đáy hộp: $x=3$, chiều cao hộp $h=2$

C. Cạnh đáy hộp: $x=1$, chiều cao hộp $h=1$.

D. Cạnh đáy hộp: $x=3$, chiều cao hộp $h=3$

Giải:

Gọi: *x* là cạnh của đáy lộp (dm); *h* là chiều cao của hộp (dm); *S(x)* là diện tích xung quanh của phần hộp cần mạ $\left(dm^2\right)$

Ta có: $m=\left(P_{vang}.d\right).S\left(x\right)=k.S\left(x\right)$. Trong đó k = Hằng số (với P_{vang}: khối lượng riêng của vàng).

Suy ra: khối lượng m tỉ lệ thuận với S(x).

Ta có: $S\left(x\right)=4xh+x^2\qquad(1)$

Và $V=x^2h=4\Rightarrow h=\frac{4}{x^2}\qquad(2)$

Từ (1) và (2), ta có: $S\left(x\right)=x^2+\frac{16}{x}$

Lấy đạo hàm 2 vế: $S'(x)=2x-\frac{16}{x^2}=\frac{2x^3-16}{x^2}; S''(x)=2+\frac{32}{x^3}$

Cho $S'(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3-16=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ h=1 \end{cases}$

Với $x=2$, ta có: $\begin{cases} S'(2)=0 \\ S''(2)=6 \end{cases} \Rightarrow S(x)$ đạt cực tiểu tại $x=2 \Rightarrow$ khối lượng m cũng là nhỏ nhất.

Vậy để tiết kiệm nhất lượng vàng cần mạ thì ta cần sản xuất hộp với kích thước $\begin{cases} x=2 \\ h=1 \end{cases}$

Chọn A.

Bài 14: Giả sử một hãng hàng không vận chuyển 8.000 lượt hành khách mỗi tháng với giá vé 1 triệu đồng một lượt. Hãng hàng không muốn tăng giá vé, tuy nhiên bộ phận nghiên cứu thị trường cho biết cứ tăng giá vé thêm 20 nghìn đồng thì lượng khách hàng giảm đi 100 người. Xác định giá vé thích hợp để doanh thu của hãng đạt lợi nhuận cao nhất.

Giải:

Gọi x là giá tiền tăng thêm (nghìn đồng) suy ra số khách giảm đi $\frac{x}{22}.100=5x$

Lợi nhuận: $(1000+x)(800-5x)=f(x)$

$f'(x)=3000-10x$

$\Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=3000$

BBT

X	0	300	1600
F'(x)	+	0	−
F(X)	↗	Max	↘

Vậy giá vé thích hợp là 1300 (nghìn đồng)

Bài 15: Khi xây nhà mới chủ nhà muốn xây một bể nước sạch bằng gạch và xi măng có dạng hình hộp đứng đáy là hình chữ nhật có chiều dài d gấp hai lần chiều rộng r và không có nắp, chiều cao h và có thể tích $\frac{4m^3}{3}$. Khi đó kích thước của hồ nước sao cho chi phí thấp nhất là

A. $r=1, d=2, h=\frac{2}{3}$ B. $r=\frac{1}{3}, d=\frac{2}{3}, h=6$

C. $r=\frac{1}{2}, d=1, h=\frac{8}{3}$ D. Kết quả khác.

Giải

$$h=\frac{2}{3r^2}$$

$$S=S_d+S_{xq}=2r^2+2hd+2hr=2r^2+6hr=2r^2+6r.\frac{2}{3r^2}=2r^2+\frac{4}{r}$$

$$=2r^2+\frac{2}{r}+\frac{2}{r}\geq 3\sqrt[3]{2r^2.\frac{2}{r}.\frac{2}{r}}=6$$

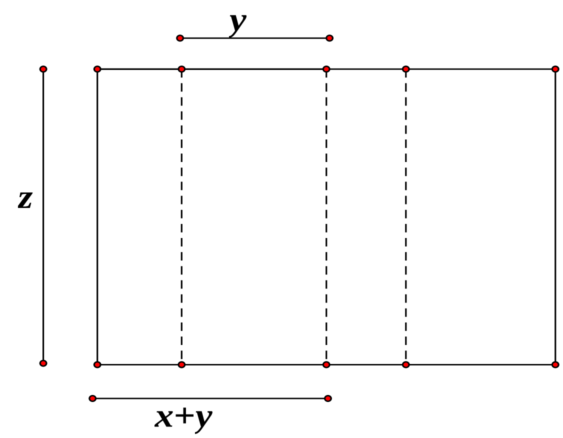
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$2r^2=\frac{2}{r}\Rightarrow 2r^3=2\Leftrightarrow r=1$$

$$\Rightarrow d=2\Rightarrow h=\frac{2}{3}$$

Chọn A.

ĐỀ SỐ 3



Bài 1: một tấm tôn hình chữ nhật có chu vi bằng 8, người ta gập tấm tôn theo các đường như hình vẽ để tạo ra hình hộp chữ nhật. Với kích thước nào của x, y, z thì thể tích hình hộp chữ nhật là lớn nhất.

A. $2x=2y=z=\frac{4}{3}$.

B. $x=y=\frac{1}{2}$ và $z=2$.

B. $x=y=\frac{3}{4}$ và $z=\frac{5}{2}$.

D. Kết quả khác.

Giải:

Chu vi hình chữ nhật = $2(2x+2y+z)=8$

$\Leftrightarrow 2x+2y+z=4$

$V_{khcn}=S_{day}$.chiều cao

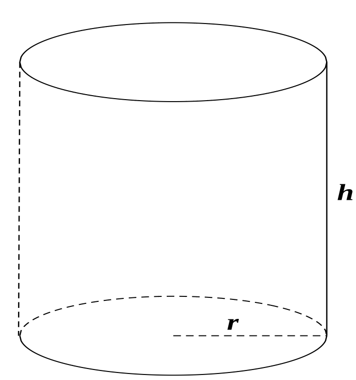
$$=y.z.x=\frac{1}{4}.2x.2y.z\leq\frac{1}{4}\left(\frac{2x+2y+z}{3}\right)^3$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{4^3}{3}\right)=\frac{16}{27}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2x=2y=z=\frac{4}{3}$. Chọn A.

Bài 2: Một chiếc lon hình trụ làm từ các miếng kim loại chứa được 1 lít chất lỏng ở trong, nhưng nhà sản xuất muốn tổng diện tích các miếng kim loại cần dùng là nhỏ nhất.

Khi đó kích thước của chiếc lon sẽ như thế nào?



A. Diện tích đáy lon bằng $\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}\left(dm^2\right)$.

B. Tổng diện tích các miếng kim loại là $\sqrt[3]{2\pi}\left(m^2\right)$.

C. Đường kính đáy lon là: $\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}(dm)$.

D. Thể tích của lon bằng $1m^3$.

Giải:

$+ V = 1 \Leftrightarrow \pi r^2 h = 1 \Leftrightarrow h = \frac{1}{\pi r^2}$

$S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi^2$

$= \frac{2}{r} + 2\pi r^2 = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + 2\pi^2 \geq 3\sqrt[3]{2\pi}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{r} = 2\pi r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$

$\Rightarrow 2r = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$

Chọn C.

Bài 3: Để đo chiều cao h (khoảng cách cao nhất từ đỉnh đến mặt đất) của cổng Parapol của trường Đại học Bách khoa Hà Nội, người ta tiến hành đo khoảng cách L giữa hai chân cổng được L = 9m. Người này thấy rằng nếu đứng cách chân cổng (gần nhất) 0,5m thì đầu chạm cổng, biết người này cao 1,6m. Tính chiều cao h của cổng Parapol.

A. $h = \frac{625}{78}m$. B. $\frac{648}{85}m$. C. $h = \frac{639}{91}m$. D. $h = \frac{652}{93}m$.

Giải:

Giả sử pt parapol $y = ax^2 + bx + c$

Theo Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1.x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{b}{a} \quad (x_2 = 9) \\ c = 0 \quad (do\ x_1 = 0) \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} 9a + b = 0 \\ y = ax^2 + bx \end{cases}$

Mà $A\left(\frac{1}{2}; \frac{8}{5}\right)$ thuộc đồ thị (đề bài)

$\Rightarrow \begin{cases} 9a + b = 0 \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b = \frac{8}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-32}{85} \\ b = \frac{288}{85} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{32}{85}x^2 + \frac{288}{85}x = -\frac{32}{85}\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{648}{85}$

Chọn B.

Bài 4: Chiều dài bé nhất của cái thang AB để nó có thể tựa vào tường AC và mặt đất BC, ngang qua cột đỡ DH cao 4m, song song và cách tường CH=0,5m là:

A. xấp xỉ $5,4902$. B. Xấp xỉ $5,602$.

C. xấp xỉ $5,5902$.　　　　D. Xấp xỉ $6,5902$.

Giải:

Đặt $CB = x; CA = y$ khi đó bằng cách xét các tam giác đồng dạng ta có hệ thức:

$$\frac{1}{2x} + \frac{4}{y} = 1$$

Bài toán quy về tìm min của $x^2 + y^2$

Giải hệ $\begin{cases} 2x - \dfrac{a}{2x^2} = 0 \\ 2y - \dfrac{4a}{y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2x$

Do đó hàm đạt min tại $x = \frac{5}{2}; y = 5$ hay $AB_{\min} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$

Chọn C.

Bài 5: Một cửa hàng bánh nhỏ vào dịp lễ khai trương đặt ra giá như sau: Nếu 1 lượt khách trong quán có a khách thì giá cho mỗi người sẽ là: $\left(3 - \frac{a}{30}\right)^3$ (đô la). Hỏi với lượng khách bao nhiêu thì cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất?

A. 10.　　　　B. 20.　　　　C. 15.　　　　D. 23.

Giải:

Số tiền cửa hang thu được lafL $a.\left(3 - \frac{a}{30}\right)^3$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$a.\left(3 - \frac{a}{30}\right)^3 = 10.\frac{a}{10}.\left(3 - \frac{a}{30}\right)^3 \le 10.\left(\frac{9}{4}\right)^4 = \frac{9^4.5}{128}$$

Dấu "=" xẩy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{10} = 3 - \frac{a}{30} \Leftrightarrow a = 22,5$.

Vậy cửa hang có 23 khách thì sẽ thu lợi nhuận cao nhất.

Chọn D.

Bài 6: Một người thợ xây, muốn xây dựng một bồn chứa nước hình trụ tròn với thể tích là $150m^3$ (như hình vẽ). Đáy làm bằng bê tông, thành làm bằng tôn và nắp làm bằng nhôm. Tính chi phí thấp nhất để bồn chưa nước (làm tròn đến hàng nghìn). Biết giác thành các vật liệu như sau: Bê tông 100 nghìn đồng một m^2, tôn 90 nghìn đồng một m^2 và nhôm 120 nghìn đồng một .

A. 15 037 000 đồng.　　　　B. 15 038 000 đồng.

C. 15 039 000 đồng.　　　　D. 15 040 000 đồng.

Giải:

Ta có: $V = 150m^3 = \pi r^2 l \Rightarrow \frac{150}{r} = \pi r l$

Giá tiền để xây bồn nước là::

$$90.10^2.2\pi rl+100.10^3.\pi r^2+120.10^3.\pi r^2$$

$$=10^3.90.2\pi \text{rl}+220.10^3.\pi r^2$$

$$=10^3.\frac{90.2.150}{r}+10^3.220.\pi r^2$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số:

$$220\pi r^2+\frac{90.150}{r}+\frac{90.150}{r}\ge 3\sqrt[3]{220\pi(90.150)^2}\approx 15038,3$$

Vậy giá tiền khoảng bằng 15038000 đồng.

Chọn B.

Bài 7: Một công ty kinh doanh thực phẩm ước tính rằng số tiền thu vào ở việc kinh doanh rau được tính xấp xỉ bằng công thức $h(x)=x^2-29000x+1000100000$ và tiền lãi được tính bằng công thức $g(x)=1000x+100000$ với x là số tiền cho mỗi kg ra. Tìm x để số tiền bỏ ra là ít nhất.

A. 15000 đồng. B. 30000 đồng. C. 10000 đồng. D. 20000 đồng.

Giải:

Khi đó số tiền vốn bỏ ra sẽ được tính bằng công thức:

$$f(x)=h(x)-g(x)=x^3-10000x+1000\,000\,000$$

$$=(x-15000)^2+775000000\ge 775000000$$

Dấu "=" xảy ra khi x=15000.

Chọn A.

Bài 8:

Trong giai đoạn từ năm 1980 đến năm 1994, tỉ lệ phần tram những hộ gia đình ở Mỹ có ít nhất một đầu máy video (VCR) đã được mô hình hóa bởi hàm số sau: $V(t)=\frac{75}{1+75.e^{-0.6t}}$, trong đó t là thời gian được tính bằng năm $0\le t\le 14$. Thời điểm mà con số VCR tăng nhanh nhất gần với giá trị nào nhất sau đây?

A. $t=14$. B. $t=10$. C. $t=9$. D. $t=7$.

Giải:

Để $V(t)=\frac{75}{1+75.e^{-0.6t}}\longrightarrow max$ thì $f(t)=1+74.e^{-0,6t}\longrightarrow \min$

Để $f(t)\longrightarrow \min: 1+74.\left(\frac{1}{e^{0,6}}\right)^t\ge 1+74\left(\frac{1}{e^{0,6}}\right)^{14}$

Vì $\left(\frac{1}{e^{0,6}}\right)^t$ là hàm nghịch biến.

Vậy t = 14 thì $V(t)\longrightarrow \max$. chọn A.

Bài 9: Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\frac{x^2-2x+3}{x-1}$ hợp với 2 trục tọa độ 1 tam giác có diện tích S bằng:

A. $S=1,5$. B. $S=2$. C. $S=3$. D. $S=1$.

Giải:

Ta có kết quả: Nếu đồ thị hàm số $y=\frac{u(x)}{v(x)}$ có điểm cực trị $(x_0;y_0)$ thì $y_0=\frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$

Suy ra phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $y=2x-2\quad(d)$

(d) cắt 2 trục tọa độ tại 2 điểm $A(0;-2),B(1;0)$ nên diện tích tam giác OAB bằng 1.

Chọn D.

Bài 10: tìm m để phương tình $e^{2x}-me^{x}+3-m=0$ có nghiệm

A. $m\ge 2$. B. $m>2$. C. $m<3$. D. $m>0$.

Giải:

Đặt $t=e^x,t>0$. Biến đổi phương trình về dạng: $\frac{t^2+3}{t+1}=m$

Khảo sát hàm $f(t)=\frac{t^2+3}{t+1},t>0$ ta có: $f(t)\ge 2$. Suy ra $m\ge 2$. Chọn A.

(Dùng casio để tìm nhanh hơn).

Bài 11: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(1-m)x+m$ có đồ thị (C). Giá trị của m để (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt x_1,x_2,x_3 sao cho $x_1^2+x_2^2+x_3^2<4$ là:

A. $m<1$ B. $\begin{cases}-\frac{1}{4}<m<1\\ m\ne 0\end{cases}$ C. $-\frac{1}{4}<m<1$ D. $\frac{1}{4}<m<1$

Giải:

Phương trình hoành độ gaio điểm của (C) và trục hoành là:

$$x^3-2x^2+(1-m)x+m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x^2-x-m=0\end{array}\right.$$

(C) và trục hoành cắt nhau tại 3 điểm pb $\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne 0\\ m>-\frac{1}{4}\end{cases}$

Ta có:

$x_1^2+x_2^2+x_3^2<4\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+1<4\Leftrightarrow 1+2m+1<4\Leftrightarrow m<1$.

Chọn B.

Bài 12: cho hàm số $y=(x-m)^3-3x+m^2\quad(1)$. Gọi M là điểm cực đại của đồ thị hàm số (1) ứng với một giá trị m thích hợp đồng thời là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số (1) ứng với một giá trị khác của m. Số điểm M thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Giải: (KSHS)

Ta có: $y'=3(x-m)^2-3,y''=6(x-m)$

Suy ra $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m-1 \\ x=m+1 \end{array}\right.$

Vì $x=x_1=m-1, y''(m-1)<0$ nên hàm số đạt cực đại tại: $x=x_1=m-1$ và giá trị cực đại là $y_1=m^2-3m+2$

Tương tự, ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x=x_2=m+1$ và giá trị cực tiểu là $y_2=m^2-3m-2$.

Ta giả sử điểm M là điểm cực đại của đồ thị hàm số ứng với giá trị m_1 và là điểm cực tiểu ứng với giá trị m_2.

Từ YCBT suy ra hệ phương trình $\begin{cases} m_1-1=m_2+1 \\ m_1^2-3m_1+2=m_2^2-3m_2-2 \end{cases}$

Giải hệ ta tìm được nghiệm $m_1=\frac{3}{2}, m_2=-\frac{1}{2}$ và suy ra tồn tại duy nhất một điểm $M\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$ thỏa bài toán.

Chọn A.

Bài 13: Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+1$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 1 (O là gốc tọa độ).

A. $m=\pm 1$. B. $m=3$. C. $m=1$. D. $m=-1$.

Giải:

Ta có: $y'=3x^2-6mx=3x(x-2m)$. Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì $m\neq 0$

Khi đó hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0;1)$ và $B(2m;-4m^3+1)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm B trên trục tung, ta có $BH=|2m|$

Diện tích của tam giác OAB là $S=\frac{1}{2}BH.OA=\frac{1}{2}.|2m|$

Theo đề bài $S=1$ nên ta có $\frac{1}{2}|2m|=1$ suy ra $m=\pm 1$. Vậy $m=\pm 1$ là giá trị cần tìm. Chọn A.

Bài 14: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho bất phương tình sau có tập nghiệm $(-\infty;0]$: $m2^{x+1}+(2m+1)\left(3-\sqrt{5}\right)^x+\left(3+\sqrt{5}\right)^x<0$.

A. $m\le -\frac{1}{2}$. B. $m\le \frac{1}{2}$. C. $m<\frac{1}{2}$. D. $m<-\frac{1}{2}$.

Giải:

BPT đã cho tương đương:

$$2m+(2m+1)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x+\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x<0 \ (1)$$

Đặt $t=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x>0$ ta được:

$$2m+(2m+1)\frac{1}{t}+t<0 \Leftrightarrow f(t)=t^2+2mt+2m+1<0 \quad (2)$$

BPT (1) nghiệm đúng $\forall x \le 0$, nên BPT (2) có nghiệm $0<t\le 1$, suy ra phương tình f(t)=0 có 2 nghiệm t_1,t_2 thỏa.

$$t_1 \le 0 < 1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(0)\le 0 \\ f(1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1\le 0 \\ 4m+2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le -0,5 \\ m<-0,5 \end{cases}$$

Vậy $m<-\frac{1}{2}$ thỏa mãn. Chọn D.

Bài 15: Cho hàm số $y=\frac{x}{1-x}(C)$. Tìm m để đường thẳng $d: y=mx-m-1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho AM^2+AN^2 đạt giá trị nhỏ nhất với $A(-1;1)$.

A. $m=-1$. B. $m=0$. C. $m=1$. D. $m=2$.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d)

$$\frac{x}{1-x}=mx-m-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 1 \\ mx^2-2mx+m+1=0 \quad (1) \end{cases}$$

(d) cắt (C) tại hai điểm pb $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm pb khác 1 $\Leftrightarrow m<0$

Gọi I là trung điểm của MN $\Rightarrow I(1;-1)$ cố định.

Ta có: AM^2+AN^2 nhỏ nhất $\Leftrightarrow MN$ nhỏ nhất

$MN^2=(x_2-x_1^2)(1+m)^2=-4m-\frac{4}{m}\ge 8$. Dấu "=" xảy ra khi $m=-1$

Vậy $\min(AM^2+AN^2)=20$ khi $m=-1$. chọn A.

ĐỀ SỐ 4

Bài 1: Hai điểm M, N thuộc hai nhánh của đồ thị $y=\frac{3x-1}{x-3}$. Khi đó độ dài đoạn thẳng MN ngắn nhất bằng?

A. 8. B. 4. C. $x_M<3$ D. $8\sqrt{2}$.

Giải:

Giả sử $x_M<3, x_N>3,$ khi đó $M\left(3-m;3-\frac{8}{m}\right), N\left(3+n;3+\frac{8}{n}\right)$ với $m,n>0$

$$MN^2=(m+n)^2+\left(\frac{8}{m}+\frac{8}{n}\right)^2 \ge \left(2\sqrt{mn}\right)^2+64\left(2\sqrt{\frac{1}{m}.\frac{1}{n}}\right)^2=4\left(mn+\frac{64}{mn}\right)\ge 64$$

$\Rightarrow MN\ge 8.$ Kết luận MN ngắn nhất bằng 8. Chọn A.

Bài 2: Để hàm số $y=x^2(m-x)-m$ đồng biến trên khoảng (1; 2) thì giá trị của m phải là:

A. $m\ge 2$. B. $m\ge 3$. C. $2\le m\le 3$. D. Với mọi m.

Giải:

Vì $y' = -3x^2 + 2mx = -x(3x - m); y' = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = \dfrac{m}{3}$

Vì hệ số a<0 nên $x_1 = 0 < 1 < 2 \le \dfrac{2m}{3} = x_2 \Leftrightarrow m \ge 3$. Chọn B.

Bài 3: Hàm số $y = \left(x^2 - 2x + m + 1\right)^n$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi:

A. $m < -1$ hoặc $m > 0$. B. $m = 0$. C. $m > 0$. D. $0 < m < 3$.

Giải:

ĐK:

$x^2 - 2x + m + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow 1 - (m+1) < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

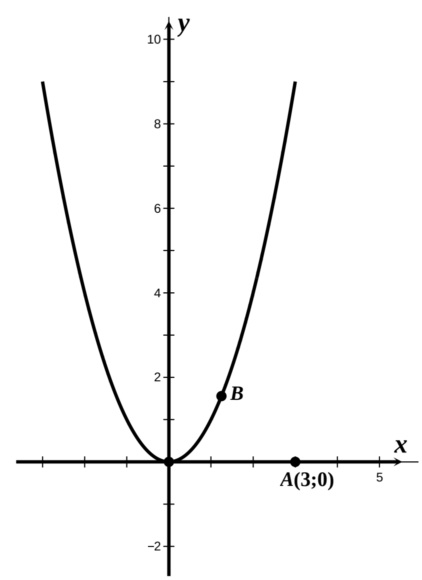
Chọn C.

Bài 4: Trên sân bay có một máy bay cất cánh trên đường băng d (từ trái sang phải) và bắt đầu rời mặt đất tại điểm O. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với mặt đất và cắt mặt đất theo giao tuyến là đường băng d của máy bay. Dọc theo đường băng d cách vị trí máy bay cất cánh O một khoảng 300(m) về phía bên phải có 1 người quan sát A. Biết máy bay chuyển động trong mặt phẳng (P) và độ cao y của máy bay xác định bởi phương trình $y = x^2$ (với x là độ dời của máy bay dọc theo đường thẳng d và tính từ O). Khoảng cách ngắn nhất từ người A (đứng cố định) đến máy bay là:

A. 300(m). B. $100\sqrt{5}$ (m). C. 200(m). D. $100\sqrt{3}$ (m).

Giải:

Xét hệ trục Oxy với gốc tọa độ O là vị trí máy bay rời mặt đất, trục Ox trùng với đường thẳng d và chiều dương hướng sang phải, trục Oy vuông góc với mặt đất.



Gọi $B(t; t^2)$ $(t \ge 0)$. Là tọa độ của máy bay trong hệ Oxy. Tọa độ của người A là $A(3;0)$.

Khoảng cách từ người A đến máy bay B bằng $d = \sqrt{(3-t)^2 + t^4}$

.

Suy ra $d^2 = t^4 + t^2 - 6t + 9 = f(t)$

$f'(t) = 4t^3 + 2t - 6$.

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Lập BBT, ta thấy $d^2 = f(t)$ đạt GTNN bằng 5 khi t=1.

Vậy khoảng cách nhỏ nhất là $100\sqrt{5}(m)$.

Chọn B.

Bài 5: Cho hàm số $y = \dfrac{2x - 4}{x + 1}$ có dồ thị (C) điểm $A(-5;5)$. Tìm m để đường thẳng $y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt M và N sao cho tứ giác OAMN là hình bình hành (O là gốc tọa độ).

A. $m=0$. B. $m=0; m=2$. C. $m=2$. D. $m=-2$.

Giải:

Do các điểm O và A thuôc đường thẳng $\Delta: y=-x$ nên để OAMN là hình bình hành thì $MN=OA=5\sqrt{2}$.

Hoành độ của M và N là nghiệm của phương trình:

$$\frac{2x-4}{x+1}=-x+m \Leftrightarrow x^2=(3-m)x-(m+4)=0,\ (x\neq -1),\ (1).$$

Vì $\Delta=m^2-2m+25>0, \forall m,$ nên (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt, d luôn cắt (C) tại hao điểm pb.

Giả sử $x_1; x_2$ là nhgieemj của (1) ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=m-3 \\ x_1x_2=-(m+4) \end{cases}$

Gọi $M(x_1; -x_1+m), N(x_2; -x_2+m)$

$$\Rightarrow MN^2=2(x_1-x_2)^2=2\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]=2m^2-4m+50$$

$$MN=5\sqrt{2} \Leftrightarrow 2m^2-4m+50=50 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$$

+ $m=0$ thì O, A, M, N thẳng hang nên không thỏa mãn.

+ $m=2$ thỏa mãn.

Chọn C.

Bài 6: Một máy tính được lập trình để vẽ một chuỗi các hình chữ nhật ở góc phần tư thứ nhất của trục tọa độ Oxy, nội tiếp dưới đường cong $y=e^x$. Hỏi diện tích lớn nhất của hình chữ nhật có thể được vẽ bằng cách lập trình trên.

A. $0,3679$ (đvdt). B. $0,3976$ (đvdt). C. $0,1353$ (đvdt). D. $0,5313$ (đvdt).

Giải:

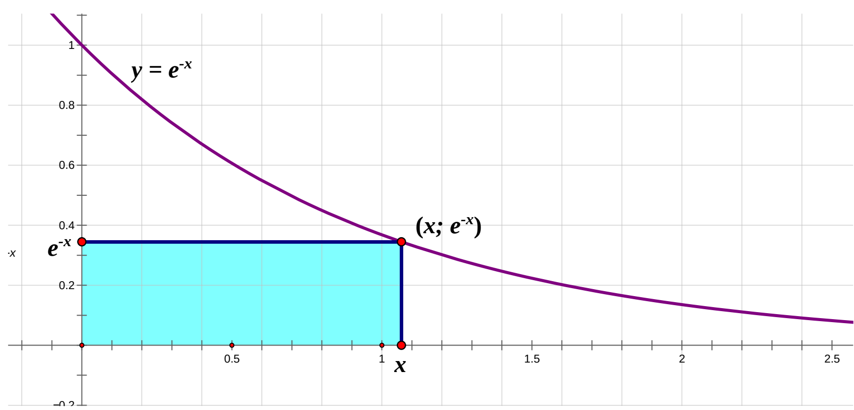
Diện tích hình chữ nhật tại điểm x là $S=xe^{-x}$

$S'(x)=e^{-x}(1-x)$

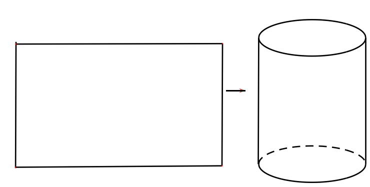
$S'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

Dựa vàoảng biến thiên ta có: $S_{\max}=e^{-1} \approx 0,3679$ khi x =1.

Chọn A.



Bài 7: Bạn An là một học sinh lớp 12, bố bạn là một thợ hàn. Bố bạn định làm một chiếc thùng hình trụ từ một mảnh tôn có chu vi 120 cm theo cách dưới đây:



Bằng kiến thức đã học em hãy giúp bố bạn chọn mảnh tôn để làm được chiếc thùng có thể tích lớn nhất, khi đó chiều dài, rộng của mảnh tôn lần lượt là:

A. $35cm;25cm$. B. $40cm;20cm$. C. $50cm;10cm$. D. $30cm;30cm$.

Giải:

Gọi một chiều dài là $x(cm),(0<x<60)$. Khi đó chiều dài còn lại là $60-x(cm)$, giả sử quấn cạnh có chiều dài là x lại thì bán kính đáy là $r=\dfrac{x}{2\pi};h=60-x$. Ta có:

$$V=\pi r^2 h=\frac{-x^3+60x^2}{4\pi}$$

Xét hàm số $f(x)=-x^3+60x^2, x\in(0;60)$

$$f'(x)=-3x^2+120x;\ f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=40\end{array}\right.$$

Lập BBT ta thấy $f(x)=-x^3+60x^2, x\in(0;60)$ lớn nhất khi x = 40.

Khi đó chiều dài là 40cm; chiều rộng là 20cm. chọn B.

Bài 8: Cho hàm số $y=x^3-\dfrac{1}{2}x^2$ có đồ thị là (C). Tím tất cả những điểm trên đồ thị (C) sao cho hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại những điểm đó là giá trị lớn nhất của hàm số: $g(x)=\dfrac{4x^2+3}{x^4+1}$.

A. $\left(\dfrac{1}{2};0\right)$. B. $\left(-1;-\dfrac{3}{2}\right);\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{40}{27}\right)$.

C. $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{1+\sqrt{2}}{4}\right);\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{2}}{4}\right)$. D. $\left(\dfrac{1}{2};0\right);(-2;-10)$.

Giải:

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $g(x)=\dfrac{4x^2+3}{x^4+1}$.

+ Đặt $t=x^2$, với $t\ge 0$. Ta có hàm số: $g(t)=\dfrac{4t+3}{t^2+1}$

+ $g'(t)=\dfrac{-4t^2-6t+4}{\left(t^2+1\right)^2};g'(t)=0\Leftrightarrow t=-2;t=\dfrac{1}{2}$

Ta lại có: $\lim\limits_{x\to-\infty}g(t)=0;\lim\limits_{x\to+\infty}g(t)=0$. BBT

t	$-\infty$		-2		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	↘	-1	↗	3	↗	4	↘	0

+ vậy GTLN của hàm số $g\left(x\right)=4$, đạt được khi $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

*Tìm các điểm thuộc đồ thị (C)

+ Ta có: $y'=3x^2-x$. Giả sử điểm $M_0\left(x_0;f\left(x_0\right)\right)\in\left(C\right)$, thì hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại M_0 là $f'\left(x_0\right)=3x_0^2-x_0$

+ Vậy $3x_0^2-x_0=4$, suy ra $x_0=-1;x_0=\frac{4}{3}$, tung độ tương ứng $f\left(-1\right)=-\frac{3}{2};f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{40}{27}$

+ Có hai điểm thỏa mãn giả thiết $\left(-1;\frac{-3}{2}\right);\left(\frac{4}{3};\frac{40}{27}\right)$.

Chọn B.

Bài 9: cho hàm số $y=x^4-2mx^2+1-m$. Định m để đồ thị hàm số trên có ba điểm cực trị tạo thành tam giác nhận gốc tọa độ làm trực tâm.

A. -1. B. 0. C. 1. D. 2.

Giải:

Ta có: $y'=4x^3-4mx$, với m>0 thì đồ thị hàm số có ba cực trị là:

$A(0;1-m)$, $B\left(\sqrt{m},1-m-m^2\right)$, $C\left(-\sqrt{m};1-m-m^2\right)$

Theo đề bài: $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-1\\m=1\end{array}\right.$. Chọn C.

Bài 10: Nhà Nam có một chiếc bàn tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}\left(m\right)$. Nam muốn mắc một bóng điện ở phía trên và chính giữa chiếc bàn sao cho mép bàn nhận được nhiều ánh sáng nhất. Biết rằng cường độ sáng C của bóng điện được biểu thị bởi công thức $C=c\frac{\sin\alpha}{t^2}$ (α là góc tạo bởi tia sáng tới mép bàn và mặt bàn, c là hằng số tỷ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng, l là khoảng cách từ mép bàn tới bóng điện). Khoảng cách Nam cần treo bóng điện tính từ mặt bàn là:

A. $1m$. B. $1,2m$. C. $1,5m$. D. $2m$.

Giải:

Gọi : h là độ cao của bóng điện so với mặt bàn $\left(h>0\right)$.

D là bóng điện;

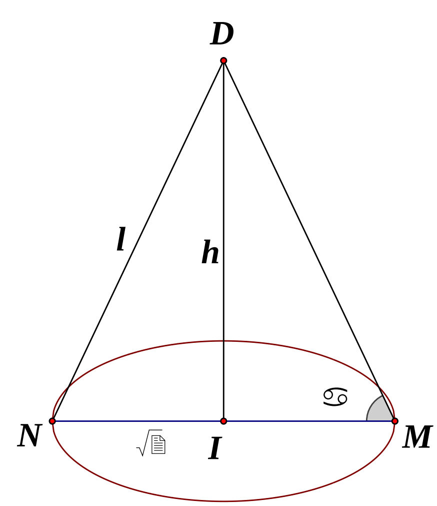
I là hình chiếu của D lên mặt bàn.

MN là đường kính của mặt bàn.

(như hình vẽ).

Ta có: $\sin\alpha=\frac{h}{l}$ và $h^2=l^2-2$,

suy ra cường độ sáng : $C\left(l\right)=c\frac{\sqrt{l^2-2}}{l^3}$ $\left(l>\sqrt{2}\right)$.



$C'(l) = c.\dfrac{6-l^2}{l^4.\sqrt{l^2-2}} > 0,\ \left(\forall l > \sqrt{2}\right)$

$C'(l) = 0 \Leftrightarrow l = \sqrt{6},\ \left(l > \sqrt{2}\right)$

Lập BBT ta thu được kết quả C lớn nhất khi $l = \sqrt{6}$, khi đó $h = 2$.

Chọn D.

Bài 11:

Cho x và y là hai số thực dương thay đổi sao cho: $x^2 - 2x + 4y^2 = 0$. Giá trị lớn nhất của tích xy gần nhất với số nào?

A. 0,5. B. 0,6. C. 0,7. D. 0,8.

Giải:

Ta có: $x^2 - 2x + 4y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}\sqrt{2x - x^2}$ (do y>0), suy ra: $xy = \dfrac{1}{2}x\sqrt{2x - x^2}$

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{1}{2}x\sqrt{2x - x^2}$ xác định trên $(0;2)$;

$g'(x) = \dfrac{\sqrt{6x^2 - 4x^3}}{4\sqrt{2x^3 - x^4}}; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Vậy $g(x)$ cũng là xy đạt giá trị lớn nhất khi $x = \dfrac{3}{2}$ và

GTLN của xy là $\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{2}.\sqrt{2.\dfrac{3}{2} - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0,64$

Chọn B.

Bài 12: Cho hàm số $y = x^4 - 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm này tạo thành một tam giác đều:

A. $2 - \sqrt[3]{3}$ B. $2 - \sqrt{3}$ C. $3 - \sqrt{2}$ D. $3 - \sqrt[3]{2}$

Giải:

Ta có: $y' = 4x^3 - 4(m-2)x;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2 - m \end{array}\right.$

Hàn số có CĐ, CT $\Leftrightarrow$ Pt $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm pb $\Leftrightarrow m < 2\ \ (*)$

Khi đó tọa độ các điểm cực trị là:

$A\left(0; m^2 - 5m + 5\right), B\left(\sqrt{2-m}; 1-m\right), C\left(-\sqrt{2-m}; 1-m\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{2-m}; -m^2 + 4m - 4\right), \overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{2-m}; -m^2 + 4m - 4\right)$

Do ΔABC cân tại A, nên bài thỏa mãn khi $A = 60^0 \Leftrightarrow \cos\hat{A} = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|} = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2} - \sqrt[3]{3}$. Chọn A.

Bài 13: Cho hàm số $y = x^3 + mx + 2$ có đồ thị (C_m). Tìm m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại một điểm duy nhất.

A. $m > -3$. B. $m < -3$. C. $m > 3$. D. $m < 3$.

Giải:

Số giao điểm của đồ thị (C_m) với Ox là số nghiệm của phương trình: $x^3 + mx + 2 = 0$

TH1: $m = 0$ luôn có 1 nghiệm.

TH2: $m \neq 0$

$$m = -x^2 - \frac{2}{x} = f(x) \qquad (*)$$

$$f'(x) = -2x + \frac{2}{x^2} = \frac{-2(x^3 - 1)}{x^2},$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

BBT

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm f(x) và đường thẳng $y = m$

Dựa vào BBT ta thấy $m > -3$ thì phương trình (*) có 1 nghiệm duy nhất.

Chọn A.

Bài 14. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{2\sin^2 x}{\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2}}$ là:

A. 0. B. 4. C. 8. D. 2.

Giải:

TXĐ $D = \mathbb{R}$, Ta có: $f(x) = \dfrac{2\sin^2 x}{\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2}} = \dfrac{2\sin^2 x}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x} = \dfrac{4\sin^2 x}{2 - \sin^2 x}$

Đặt $\sin^2 x = t, \left(t \in [0;1]\right)$, hàm số trở thành $g(t) = \dfrac{4t}{-t + 2}$ với $t \in [0;1]$,

Ta có: $g'(t) = \dfrac{8}{(-t+2)^2} > 0, \forall t \in [0;1]$.

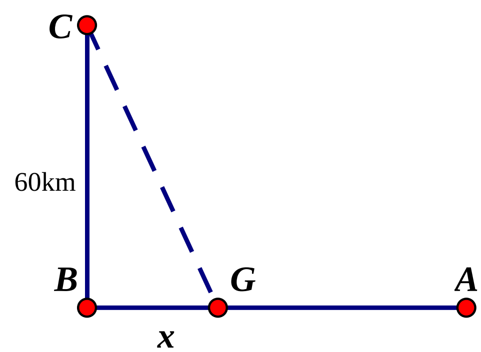
Suy ra hàm số đồng biến trên $[0;1]$, vậy $\max\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \max\limits_{t \in [0;1]} g(t) = g(1) = 4$.

Xảy ra khi $t = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$. Chọn B.

Bài 15: Đường dây điện 110KV kéo từ trạm phát điện (điểm A) trong đất liền ra Côn Đảo (điểm C). Biết khoảng cách ngắn nhất từ C đến B là 60km, khoảng cách từ A đến B là 100km, mỗi km dây diện dưới nước chi phí là 5000 USD, chi phí cho mỗi km dây điện trên bờ là 3000USD. Hỏi điểm G cách A bao nhiêu để mắc dây điện từ A đến G rồi từ G đến C chi phí ít nhất.

A. 40km. B. 45km. C. 55km. D. 60km.

Giải:



Gọi $BG = x\left(0 < x < 100\right) \Rightarrow AG = 100 - x$.

Ta có:

$GC = \sqrt{BC^2 + GC^2} = \sqrt{x^2 + 3600}$.

Chi phí mắc dây điện theo giả thiết là:

$f\left(x\right) = 3000.\left(100 - x\right) + 5000.\sqrt{x^2 + 3600}$

Khảo sát hàm ta được $x = 45$.

Chọn B.