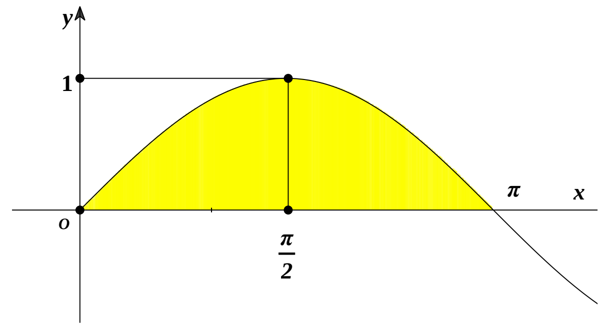
CHƯƠNG 3 (Tiếp theo)
ỨNG DỤNG NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN
Chủ đề 3 : (tiếp theo)
ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH – THỂ TÍCH

Bài 49: Thể tích của vật thể tròn xoay sinh ra bởi phép quay xung quanh trục Ox của hình giới hạn bởi trục Ox và đường $y = \sin x, \left(0 \le x \le \pi\right)$. Ta được kết quả:



A. $\dfrac{\pi^2}{2}$. B. $\dfrac{\pi^2}{4}$.

C. $\dfrac{\pi^2}{6}$. D. $\dfrac{\pi^2}{2}$.

Giải:

Ta có: $V = \pi\int\limits_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi\int\limits_0^{\pi} \dfrac{1-\cos 2x}{2} dx = \dfrac{\pi}{2}\left(x - \dfrac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \dfrac{\pi^2}{2}$

Chọn A.

Bài 50: Cho đường cong có phương trình, trong đó $g\left(y\right)$ là hàm số liên tục trê đoạn $\left[e;d\right]$. Xét hình giới hạn bởi đường cong $x = g\left(y\right)$, đường cong $y = e, y = d$ và $x = 0$. Quay hình đó xung quanh trục tung $x = 0$ ta được một khối tròn xoay có thể tích bằng:

A. $\pi^3\int\limits_e^d g\left(x\right)dx$. B. $\pi\int\limits_e^d g\left(y\right)dy$. C. $\pi^2\int\limits_e^d g\left(x\right)dx$. D. $\pi\int\limits_e^d g^2\left(y\right)dy$.

Giải:
Theo công thức SGK. D đúng
Chọn D.

Bài 51: Gọi K là phần mặt phẳng được giới hạn bởi hai trục tọa độ, đường thẳng $x = 1$ và đường cong có phương trình $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - x^6}}$. Khi đó, diện tích hình K là:

A. π. B . $\dfrac{\pi}{2}$. C. $\dfrac{\pi}{3}$. D. $\dfrac{\pi}{4}$.

Giải:

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ta có: $S = \int\limits_0^1 \left|\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - x^6}}\right| dx = \dfrac{\pi}{4}$.

Chọn D.

Bài 52: Cho hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và các đường $x=1; y=xe^2$. Thể tích của vật thể tròn xoay khi cho hình này quay xung quanh trọc Ox là:

A. $\frac{1}{3}\pi e^4$. B. $2\pi(e+1)$. C. $\pi(e-3)$. D. $2\pi(e+3)$.

Giải:

Thể tích cần tính: $V=\pi\int_0^1\left(xe^2\right)^2dx=\frac{1}{3}\pi e^4$.

Chọn A.

Bài 53: Gọi K là hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và đường parabol $y=-3x^2+3x+6$. Cho Q quay xung quanh trục Oy, ta nhận được hình tròn xoay có thể tích bằng:

A. $10,5\pi$. B. 66π. C. $68,9\pi$. D. $72,9\pi$.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm $-3x^2+3x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Thể tích cần tính $V=\pi\int_{-1}^{2}\left(-3x^2+3x+6\right)^2dx=72,9\pi$.

Chọn D.

Bài 54: Thể tích của khối tròn xoay sinh ra bởi phép quay xung quanh trục Oy của hình giới hạn bởi đường hypebol $x=\frac{2}{y}$, đường thẳng $y=1, y=4$ và $x=0$. Kết quả tình được là:

A. 3π. B. 5π. C. 8π. D. 10π.

Giải:

$$V=\pi\int_1^4\left(\frac{2}{y}\right)^2dy=3\pi .$$

Chọn A.

Bài 55: cho hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và các đường $y=\frac{\pi}{4}, y=\sin x$. Thể tích của vật thể tròn xoay khi cho hình này quay xung quanh trục Ox là:

A. $\pi(\pi-2)$. B. $\frac{\pi}{8}(\pi-2)$. C. $\frac{\pi}{2}(\pi-1)$. D. $\frac{\pi}{3}\left(\pi-\frac{1}{2}\right)$.

Giải:

Ta có: $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 xdx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2x)dx=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}(\pi-2)$.

Chọn B.

Bài 56: Cho hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và các đường $y=\cos x, x=\frac{\pi}{4}$. Thể tích của vaath thể tròn xoay khi cho hình này quay xung quanh trục Ox là:

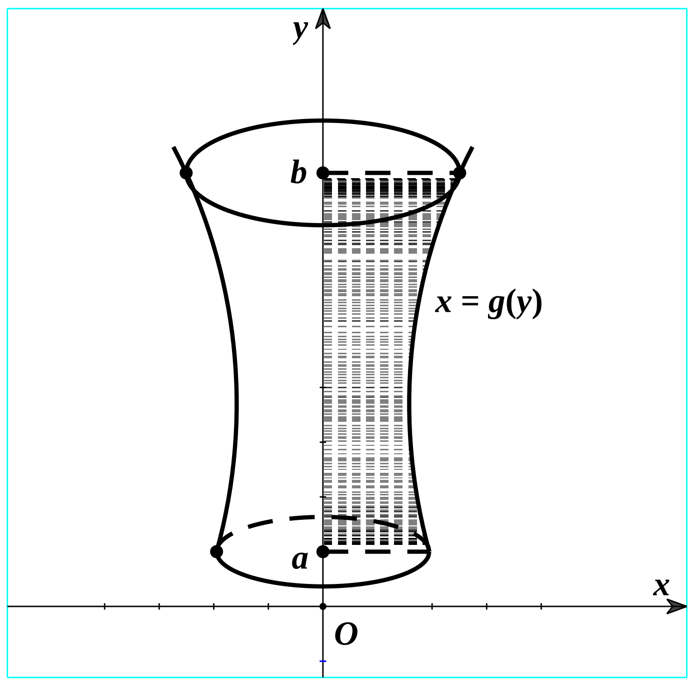
A. $\frac{3\pi^2}{7}$. B. $\frac{16\pi^2}{15}$. C. $(\pi+2)\frac{\pi}{8}$. D. $\frac{3(\pi+1)^2}{4}$.

Giải:

Ta có: $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 xdx=(\pi+2)\frac{\pi}{8}$.

Chọn C.

Bài 57: Cho đường cong có phương trình $x=g(y)$ trong đó $x=g(y)$ là một hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Nếu hình giới hạn bởi các đường $x=g(y), y=a, y=b$ và $x=0$ quay xung quanh trục Oy thì thể tích V của vật thể tròn xoay sinh ra được tính theo công thức:



A. $V=\int_a^b y^2dy$

B. $V=\pi\int_a^b y^2dy$.

C. $V=2\pi\int_a^b y^2dy$.

D. $V=\pi\int_a^b x^2dy$.

Giải:

$V=\pi\int_a^b x^2dy$.

Chọn D.

Bài 58: Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình elip $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$ khi elip này quay xung quanh trục Ox là:

A. 6. B. 13. C. $\frac{4}{3}\pi ab^2$. D. 22.

Giải:

Ta có: $V=\pi\int\limits_{-a}^{a} y^2dx = 2\pi\int\limits_{b}^{a}\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)dx = \frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi ab^2$.

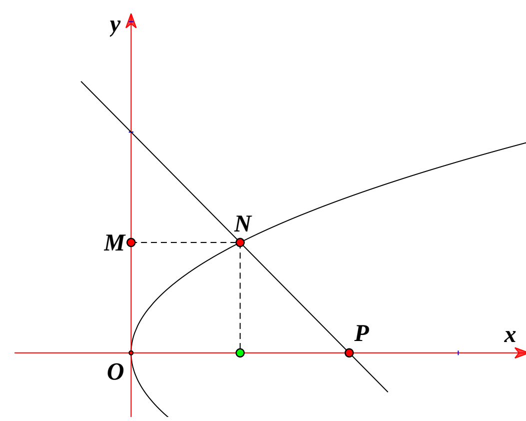
Chọn C.

Bài 59: a)

Cho D là miền kín giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}, y=2-x$ và $y=0$. Diện tích của miền D là:

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{7}{6}$. D. $\frac{8}{7}$.



Giải:

Hoành độ giao điểm của hai đường thẳng $y=\sqrt{x}, y=2-x$ là $x_0=1$. Ta có: $D=B+C$, trong đó B là miền kín giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}, x=1, y=0$ và C là miền kín giới hạn bởi các đường $y=2-x, x=1, y=0$

Diện tích miền B $=\int\limits_0^1\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}$(dvdt)

Diện tích miền C $=\frac{1}{2}$(dvdt).

Vậy diện tích miền D là $\frac{7}{6}$ (đvdt).

Chọn C.

Bài 59: b)

Cho D là miền kín giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}, y=2-x$ và $y=0$. Thể tích vaath thể tạo thành khi ta quay D quanh trục Oy là:

A. $\frac{32\pi}{15}$. B. $\frac{7\pi}{4}$. C. $\frac{5\pi}{3}$. D. $\frac{9\pi}{4}$.

Giải:

Đặt $M(0;1), N(1;1), P(2;0)$, Gọi V_1 là thể tích của vật thể sinh ra khi quay hình thang OMNP quanh trục Oy (xem hình ở đề bài), V_2 là thể tích của vật thể sinh ra khi quay phần mặt phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}; x=0; y=0; y=1$ và V là thể tích cần tìm, Ta có:

$V=V_1-V_2$

$V_1 = \frac{7\pi}{3}$ (đvtt). $V_2 = \pi\int_0^1 y^2 dy = \frac{\pi}{5}$ (đvtt)

$V = \frac{32\pi}{15}$ (đvtt).

Chọn A.

Bài 60: Tính diện tích S của miền phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sin^2 x + \sin x + 1$; $y = 0; x = 0; x = \frac{\pi}{2}$.

A. $S = \frac{3}{4}$. B. $S = \frac{3\pi}{4}$. C. $S = \frac{4\pi + 3}{3}$. D. Đáp án khác.

Giải:

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng Ta có: $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x + \sin x + 1\right) dx$.

Chọn B.

Bài 61: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{1+\cos x}; y = 0; x = 0; x = \frac{\pi}{2}$.

A. $S = \frac{\pi}{2}$. B. $S = 1$. C. $S = \frac{\pi}{4}$. D. $S = \frac{1}{3}$.

Giải:

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng Ta có: $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x} dx$.

Chọn D.

Bài 62: thể tích của vật thể tròn xoay sinh ra bởi các hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^{\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{2}}; x = 1; x = 2; y = 0$. Khi nó quay xung quanh trục Ox là:

A. $2\pi e^2$. B. $3\pi e^2$. C. $4\pi e^2$. D. πe^2 .

Giải:

Áp dụng CT tính thể tích khi quay hình phẳng xung quanh trục Ox Ta có: $V = \pi \int_1^2 \left(x^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}} \right)^2 dx = \pi e^2$.

Chọn D.

Bài 63: Gọi M là hình phẳng tạo bởi trục hoành và các đường $y = \ln x, x = 1, x = 2, y = 0$. Khi cho hình M quay xung quanh trục Ox. Ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $2\pi\left(\ln^2 x - 2\ln 2 + 1\right)$. B. $\pi\left(\ln 2 - \ln 4 + 1\right)$.

C. $\pi\left(\ln 2 + 1\right)$. D. $\pi^2\left(\ln 2 - 3\right)$.

Giải:

Áp dụng công thức tính thể tích khi quay hình phẳng xung quanh trục Ox ta có: $V=\pi\int_1^2(\ln x)^2dx=\pi e^2$.

Chọn A.

Bài 64: Gọi M là hình được sinh ra bởi phép quay xung quanh Oy của hình giới hạn bởi các đường $y=\frac{x^2}{2}$, $y=2$; $y=4$; và $x=0$.

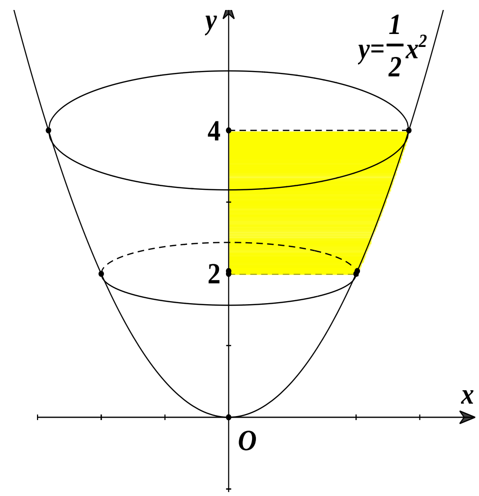
Thể tích của hình M là:

A. 6π .

B. 12π .

C. $2\pi^3$.

D. $4\pi^3$.



Giải:

Ta có: $V=\pi\int_2^4 2ydy=\left(\pi y^2\right)\Big|_2^4=12\pi$.

Chọn B.

Bài 65:

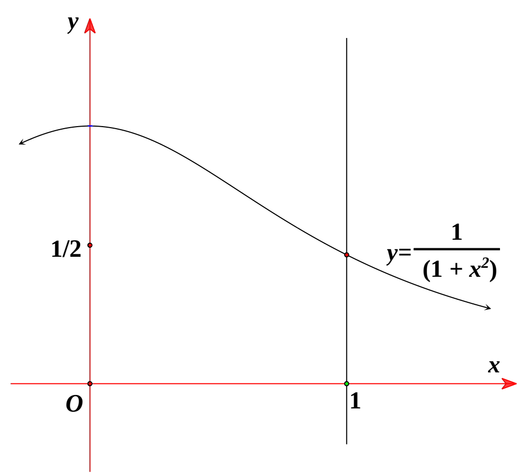
Gọi M là phần mặt phẳng hữu hạn được giới hạn bởi hai trục tọa độ, đường thẳng $x=1$ và đường cong có phương trình $y=\frac{1}{1+x^2}$. Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi M quay quanh trục Oy là:

A. $\pi\ln 3$.

B. $\pi\ln 4$.

C. $0,2\pi$.

D. $\pi\ln 2$.



Giải:

Phương trình $y=\frac{1}{1+x^2}\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{y}-1$

Gọi V là thể tích cần tìm, Ta có: $V = X + Y$ với X là thể tích hình trụ tròn xoay bán kính đáy bằng 1 và chiều cao bằng $\frac{1}{2}$, ta có $X = \frac{\pi}{2}$ và $Y = \pi\int_{0.5}^{1}\left(\frac{1}{y} - 1\right)dx = \pi\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$.

Vậy $V = \pi\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi\ln 2(\text{dvdt})$.

Chọn D.

Bài 66: Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x^2$ và $y = x^3$ xung quanh trục Ox là:

A. $\frac{\pi}{2}$. B. $\frac{123\pi}{7}$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. $\frac{256\pi}{35}$.

Giải:

Ta có: $2x^2 = x^3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

$$V = \pi\int_0^2\left(2x^2\right)^2dx - \pi\int_0^2\left(x^3\right)^2dx = \pi\left(\int_0^2\left(4x^4\right)dx - \int_0^2 x^6dx\right).$$

$$= \pi\left|\left(\frac{4x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right)\right|_0^2 = \frac{256\pi}{35}$$. chọn D.

Bài 67: Một dòng điện xoay chiều $i = I_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$ chạy qua một đoạn mạch có điện trở thuần R. Nhiệt lương Q tỏa ra trên mạch đó trong thời gian một chu kì T là:

A. $3\frac{I_0^2}{2}$. B. $\frac{RI_0^2}{2}$. C. $\frac{R^2I_0^2}{4}T$. D. $\frac{RI_0^2}{2}T$.

Giải:

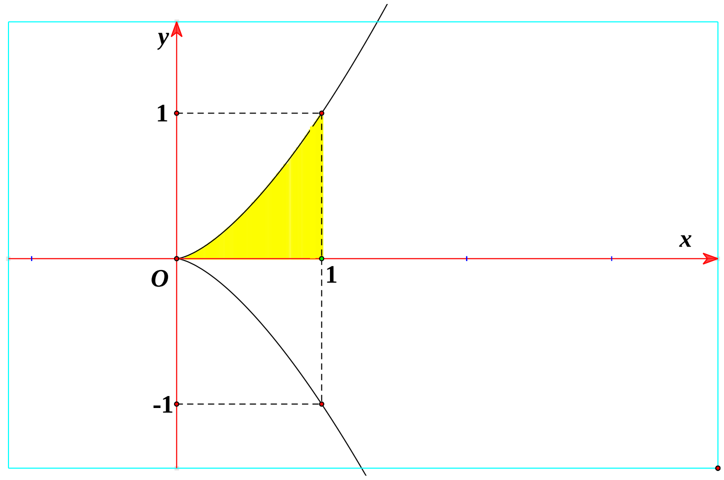
Ta có: $Q = \int_0^T Ri^2dt = \int_0^T RI_0^2\sin\left(\frac{2\pi}{T}.t + \pi\right)dt$

$$= RI_0^2\int_0^T\frac{1 - \cos 2\left(\frac{2\pi}{T}.t + \pi\right)}{2}dt = \frac{RI_0^2}{2}\left(t - \frac{T}{4\pi}\sin 2\left(\frac{2\pi}{T}.t + \pi\right)\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Chọn D.

Bài 68: Đường cong trong hình vẽ bên có phương trình $y^2 = x^3$. Cho $A(1;1)$ và $B(0;1)$. Gọi H là phần gạch chéo.

Hình:



Khi cho hình H quay xung quanh trục Ox, ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $\frac{\pi}{3}$.   B. $\frac{\pi}{4}$.   C. $\frac{\pi}{5}$.   D. $\frac{\pi}{6}$.

Giải:

Ta có: $V=\pi\int_0^1 y^2dx=\pi\int_0^1 x^3dx=\pi\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1=\frac{\pi}{4}$.

Chọn B.

Bài 69: Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2;x=y^2$ quay quanh trục Ox là:

A. $\frac{3\pi}{19}$.   B. $\frac{3\pi}{16}$.   C. $\frac{3\pi}{13}$.   D. $\frac{3\pi}{10}$ ./

Giải:

Ta có: $x=y^2\Leftrightarrow\sqrt{x}=y$. Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{x}=x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$. Trên [0;1] ta luôn có $\left(\sqrt{x}\right)^2\ge\left(x^2\right)^2$. do đó thể tích cần tìm là:

$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}\right)^2dx-\pi\int_0^1\left(x^2\right)^2dx .$$

Chọn D.

Bài 70: Tính (bằng cm^2) diện tích phần giới hạn bởi parabol có phương trình $y=x^2$ và đường thẳng $y=1$.

A. $\frac{8}{3}cm^2$.   B. $\frac{16}{3}cm^2$.   C. $\frac{4}{3}cm^2$.   D. $\frac{1}{3}cm^2$.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1$, do đó diện tích cần tính là: $S=\int_{-1}^{1}\left|x^2-1\right|dx=\frac{4}{3}$.

Chọn C.

Bài 71: Tính diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi hai đường biểu diễn của các hàm số $y_1 = x^2 - 4$ và $y_2 = 2x - x^2$.

A. 9 đvdt.
B. 36 đvdt.
C. 18 đvdt.
D. 9 đvdt.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 4 = 2x - x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$, do đó diện tích cần tính là:

$$S = \int_{-1}^{1} \left| x^2 - 4 - \left(2x - x^2\right) \right| dx = \int_{-1}^{1} \left| 2x^2 - 2x - 4 \right| dx = 9 .$$

Chọn D.

Bài 72: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{e^{-2x}}, y = e^{-x}$ và $x = 1$ là:

A. $\frac{1}{e^2} - 5$.
B. $\frac{e^2}{2} + \frac{1}{e} - \frac{3}{2}$.
C. $5e$.
D. $8e$.

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{1}{e^{-2x}} = e^{-x} \Leftrightarrow e^{-3x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$, vậy:

$$S = \int_{0}^{1} \left| \frac{1}{e^{-2x}} - e^{-x} \right| dx = \left| \int_{0}^{1} \left(e^{2x} - e^{-x}\right) dx \right| = \left| \left(\frac{e^{2x}}{2} + e^{-x} \right) \Bigg|_0^1 \right| = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{e} - \frac{3}{2} .$$

Chọn B.

Bài 73: Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{x}, y = 0, x = 1$ và $x = a, (a > 1)$ quay quanh trục Ox là:

A. $\left(\frac{1}{a} - 1\right)$.
B. $\left(\frac{1}{a} - 1\right)\pi$.
C. $\left(1 - \frac{1}{a}\right)\pi$.
D. $\left(1 - \frac{1}{a}\right)$.

Giải:

Áp dụng CT tính thể tích khi quay hình phẳng quanh trục Ox, Ta có:

$$V = \pi \int_{1}^{a} \frac{dx}{x^2} = \left(1 - \frac{1}{a}\right)\pi .$$

Chọn C.

Bài 74: Diện tích phần mặt phẳng được giới hạn bởi các đường thẳng $x = 1; x = 2$, trục Ox và đường cong $y = \frac{1}{x\left(1 + x^3\right)}$ là:

A. $\frac{1}{4}\ln\frac{7}{3}$.
B. $\frac{1}{3}\ln\frac{16}{9}$.
C. $\frac{1}{3}\ln\frac{7}{3}$.
D. $\frac{1}{4}\ln\frac{16}{9}$.

Giải:

Gọi S là diện tích cần tìm, Ta có: $S=\int_1^2 \frac{1}{x\left(1+x^3\right)}dx=\int_1^2 \frac{x^2}{x^3\left(1+x^3\right)}dx$.

$$=\frac{1}{3}\int_1^2 \frac{d\left(x^3\right)}{x^3\left(1+x^3\right)}dx=\frac{1}{3}\left[\int_1^2 \frac{d\left(x^3\right)}{x^3}-\int_1^2 \frac{d\left(x^3\right)}{1+x^3}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\ln\frac{x^3}{1+x^3}\Bigg|_1^2=\frac{1}{3}\ln\frac{16}{9}\text{(dvtt)}$$

Chọn B.

Bài 75: Gọi H là phần mặt phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y=mx$ với $m<2$ và parabol (P) có phương trình $y=x\left(2-x\right)$. H có diện tích:

A. $\frac{\left(2-m\right)^2\left(2-5m\right)}{6}$.

B. $\frac{\left(2-m\right)^2\left(5-2m\right)}{6}$.

C. $\frac{\left(2-m\right)^2}{6}$.

D. $\frac{\left(m-2\right)^2}{6}$.

Giải:

Gọi diện tích cần tính là S , Ta có: $S=\int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$

Đặt $u=1+\ln x,$ khi $x=1$ thì $u=1,x=e$ thì $u=2,du=\frac{1}{x}dx$

$$S=\int_1^2 \sqrt{u}dx=\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^2=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

Chọn C.

Bài 76: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=\frac{1}{1+x^2};y=\frac{1}{2}$ là:

A. $\frac{\pi}{2}-1$.

B. $\frac{\pi}{2}+1$.

C. $\frac{5\pi}{6}+1$.

D. $\frac{5\pi}{6}-1$.

Giải:

Tính tích phân $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$ bằng cách đặt $x=\tan t,t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ hoặc có thể sử dụng máy tính cầm tay để tìm kết quả.

Chọn A.

Bài 77: Gọi S_1 là diện tích của mặt phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y = mx$ với m < 2 và parabol (P) có phương trình $y = x(2-x)$. Gọi S_2 là diện tích giới hạn bởi (P) và Ox. Với trị số nào của m thì $S_1 = \frac{1}{2}S_2$?

A. $2-\sqrt[3]{4}$. B. $2+\sqrt[3]{2}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $\frac{1}{4}$.

Giải:

Ta tính S_2 trước, phương trình hoành độ giao điểm:

$x(2-x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$, do đó $S_2 = \int_0^2 \left|2x-x^2\right|dx = \frac{4}{3}$.

Ta tính S_1 , phương trình hoành độ giao điểm:

$mx = 2x - x^2 \Leftrightarrow x^2 + (m-2)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2-m \end{array}\right.$, do đó:

$$S_1 = \int_0^{2-m} \left|2x - x^2 - mx\right|dx = \int_0^{2-m} \left(-x^2 + (2-mx)\right)dx = \left.\left(-\frac{x^3}{3} + \frac{(2-m)x^2}{2}\right)\right|_0^{2-m} .$$

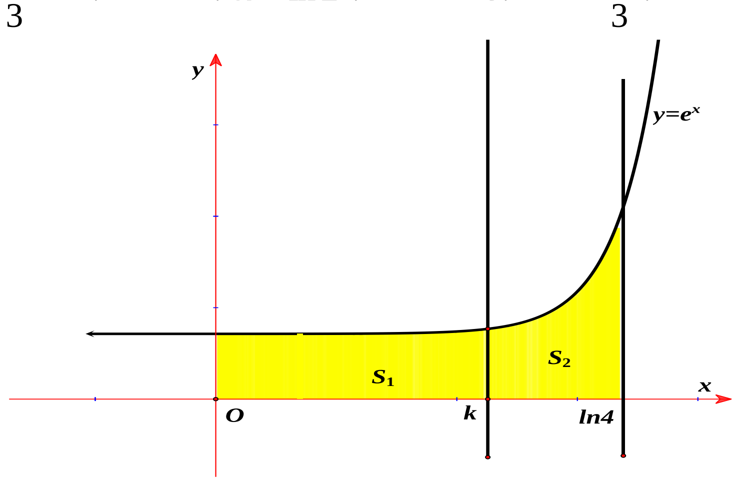
$$= \frac{(2-m)^3}{6} = \frac{1}{2}.\frac{4}{3} \Leftrightarrow m = 2-\sqrt[3]{4}$$

(**Chú ý**: muốn đường thẳng cắt parabol tại 2 điểm phân biệt thì trong tinhd huống này parabol phải có phần chứa đỉnh nằm trên đường thẳng) .

Chọn A.

Bài 78: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x; y = 0; x = 0$ và $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k, (0 < k < \ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.

A. $k = \frac{2}{3}\ln 4$. B. $k = \ln 2$. C. $k = \ln\frac{8}{3}$. D. $k = \ln 3$.



Trích đề Minh họa 2 - 2017

Giải:

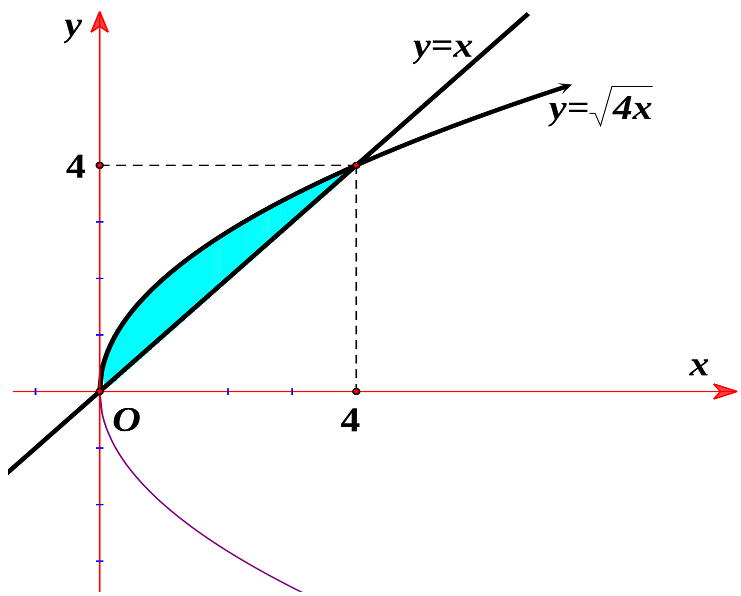
Ta có: $S_1=\int\limits_0^k e^x dx=e^x\Big|_0^k=e^k-1, S_2=\int\limits_k^{\ln 4} e^x dx=e^x\Big|_k^{\ln 4}=4-e^k$

Do đó: $S_1=2S_2 \Leftrightarrow e^k-1=2\left(4-e^k\right) \Leftrightarrow e^k=\frac{9}{3}=3 \Leftrightarrow k=\ln 3$.

Chọn D.

Bài 79: Ở hình bên, ta có đường parabol $y^2=4x$ và đường thẳng $y=x$. Cho phần gạch chéo quay quanh trục Ox, ta nhận được hình tròn xoay có thể tích bằng:

A. $\frac{15}{7}\pi$. B. $\frac{32}{3}\pi$. C. 10π . D. 11π .



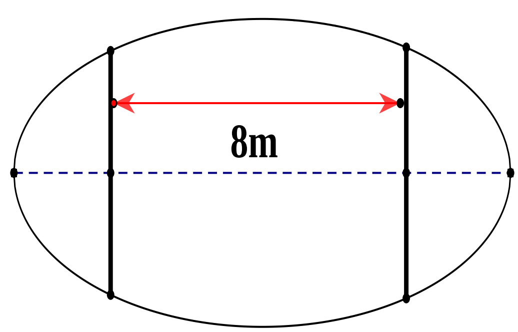
Giải:

Gọi V_1 là thể tích vật thể sinh ra bởi "hình thang cong" (giới hạn bởi các đường: $x=0$; $x=4$; $y=0$; $y=x$) quay xung quanh trục Ox và V_2 là thể tích vật thể sinh ra bởi "hình thang cong" (giới hạn bởi các đường: $x=0; x=4; y=0; y=2\sqrt{x}$) quay xung quanh trục Ox. Ta có $V=V_2-V_1$, do đó:

$$V=\pi\int\limits_0^4 4x dx-\pi\int\limits_0^4 x^2 dx=\pi\left[2x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^4=\frac{32}{3}\pi .$$

Chọn B.

Bài 80: Ông An có một mảnh vườn hình elip có độ dài trục lớn bằng 16m và độ dài trục bé bằng 10m. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng 8m và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/m^2. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).



A. 7.862.000 đồng. B. 7.653.000 đồng.

C. 7.128.000 đồng. D. 7.826.000 đồng.

Giải:

Chọn Hệ trục tọa độ Oxy, gốc tọa độ là tâm của elip.

Khi đó elip này có phương trình:

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=5\sqrt{1-\frac{x^2}{64}} \\ y=-5\sqrt{1-\frac{x^2}{64}} \end{array}\right. .$$

Diện tích cần tìm: $S=2\int_{-4}^{4}5\sqrt{1-\frac{x^2}{64}}dx \approx 76,529$

Do đó số tiền cần là: 76,529. 0,1 ~ 7.653 triệu đồng.

Chọn B.

Bài 81: Đường cong được cho bởi phương trình $x=g(y)$, với đạo hàm $g'(y)$ là hàm liên tục, gọi $m,\ n\ (m<n)$ tương ứng là tung độ các điểm M và N thuộc đồ thị $x=g(y)$. Độ dài đường cong $x=g(y)$ từ điểm M tới điểm N là: $\int_{m}^{n}\sqrt{1+(g(y))^2}dx$. Áp dụng tính độ dài đường cong $y=x^2$ từ $(1;1)$ đến $(\sqrt{2};2)$.

A. 1,07. B. 1,06. C. 1. D. 2.

Giải:

Ta có: $y=x^2 \Leftrightarrow x=\sqrt{y} \Rightarrow x'=\frac{1}{2\sqrt{y}}$.

Do đó độ dài cần tính: $\int_{1}^{2}\sqrt{1+\frac{1}{4y^2}}dy \approx 1.06$.

Chọn B.

Bài 82: Đường cong được cho bởi phương trình $x=g(y)$, với đạo hàm $g'(y)$ là hàm liên tục, gọi $m,\ n\ (m<n)$ tương ứng là tung độ các điểm M và N thuộc đồ thị $x=g(y)$. Độ dài đường cong $x=g(y)$ từ điểm M tới điểm N là: $\int_{m}^{n}\sqrt{1+(g(y))^2}dx$. Áp dụng tính độ dài đường cong $x=y^2$ từ $(1;1)$ đến $(4;2)$.

A. 1,07. B. 7,27. C. 7,2 D. 2.

Giải:

Ta có: $x'=2y$

Độ dài cần tính là: $\int_{1}^{4}\sqrt{1+2y}dx \approx 7.27$.

Chọn B.

Bài 83: Đường cong được cho bởi phương trình $x=g\left(y\right)$, với đạo hàm $g'\left(y\right)$ là hàm liên tục, gọi $m,\ n\ \left(m<n\right)$ tương ứng là hoành độ các điểm M và N thuộc đồ thị $y=g\left(x\right)$. Độ dài đường cong $y=g\left(x\right)$ từ điểm M tới điểm N là: $\int\limits_m^n \sqrt{1+\left(g(y)\right)^2}dx$. Tìm độ dài của đường cong $y=4x^3$ từ điểm $\left(0;0\right)$ đến điểm $\left(2;4\sqrt{2}\right)$. Tích phân cần tính để giải bài này là:

A. $\int\limits_0^{4\sqrt{2}} \sqrt{1+9x}dx$.   B. $\int\limits_0^2 \sqrt{1+9x}dx$.

C. $\int\limits_0^{4\sqrt{2}} \sqrt{1+4x^3}dx$.   D. $\int\limits_0^{25} \sqrt{1+4x^3}dx$.

Giải:

Cung cần tính là phần của đường cong nằm trong góc vuông thứ nhất. Ta có:

$y=2x^{\frac{3}{2}}$ nên $y'=3x^{\frac{1}{2}}$. Độ dài cung cần tìm bằng:

$\int\limits_0^2 \sqrt{1+y'^2}dx=\int\limits_0^2 \sqrt{1+9x}dx$.

Chọn D.

Bài 84: Tính độ dài đường cong $y=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}-1$, từ điểm A có hoành độ $a=0$ đến điểm B có hoành độ $b=1$. Kết quả là:

A. $\dfrac{13}{6}$.   B. $\dfrac{21}{4}$.   C. $\dfrac{3}{2}$.   D. $\dfrac{14}{3}$.

Giải:

Ta có: $f'(x)=2\sqrt{2x},\Rightarrow\left(f'(x)\right)^2=8x.$ thay vào Công thức ta được

$T=\int\limits_0^1 \sqrt{1+8x}dx$. Đổi biến $u=1+8x$. Ta có:

Khi $\begin{cases} x=0\Rightarrow u=1. \\ x=1\Rightarrow u=9 \end{cases}$

Vậy $T=\dfrac{1}{8}\int\limits_1^9 \sqrt{u}du=\dfrac{1}{8}.\dfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9=\dfrac{13}{6}$.

Chọn A.

Bài 85: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{1}{\sin^2 x};y=\dfrac{1}{\cos^2 x};x=\dfrac{\pi}{3};x=\dfrac{\pi}{6}$. Ta được kết quả:

A. $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}-4$.

B. $\dfrac{7\sqrt{2}}{4}-1$.

C. $\dfrac{2\sqrt{2}+5}{3}$.

D. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Giải:

Dễ thấy $\sin^2 x \le \cos^2 x, \forall x \in \left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}\right]$ và $\sin^2 x \ge \cos^2 x, \forall x \in \left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3}\right]$

Do đó diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$$

$$=\left(-\cot x-\tan x\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}+\left(\tan x+\cot x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}.$$

$$=-2+\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{4\sqrt{3}}{3}-2=\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

Chọn A.

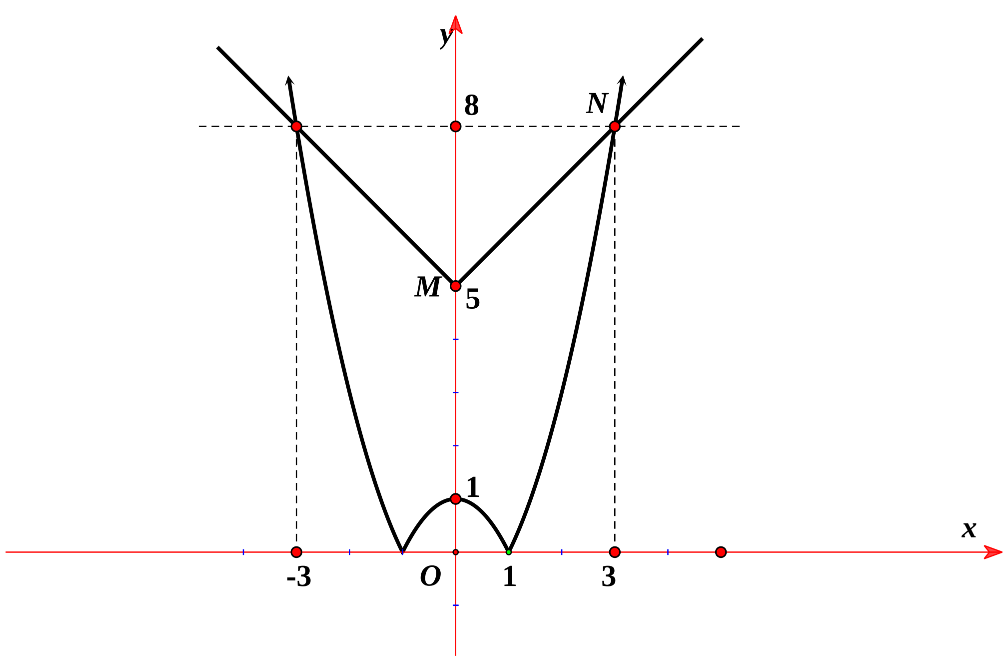
Bài 86: Cho đồ thị hàm số $y=\left|x^2-1\right|; y=\left|x\right|+5$ như hình vẽ, diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\left|x^2-1\right|$ và $y=\left|x\right|+5$ là:

A. $\dfrac{73}{6}$.

B. $\dfrac{73}{3}$.

C. 12.

D. 14 .



Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm $|x^2-1|=|x|+5 \Leftrightarrow x=\pm 3$ (thật ra nhìn hình ta thấy có 2 giao điểm).

Do đó diện tích cần tìm là:

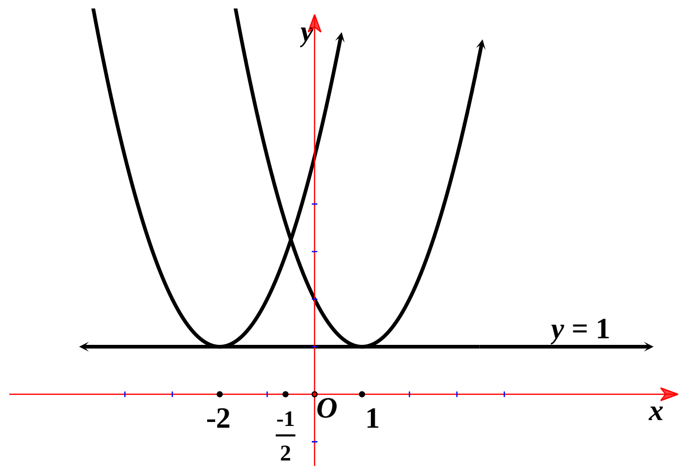
$$\int_{-3}^{3}\left||x|+5-|x^2-1|\right|dx=\int_{-3}^{3}\left(|x|+5-|x^2-1|\right)dx$$

Ta bỏ được trị tuyệt đối ngoài cùng vì đồ thị $y=|x|+5$ ở trên $y=|x^1-1|$. Lúc này ta chỉ cần bấm máy ra kết quả B.

Chọn B.

Bài 87:

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=x^2-2x+2$; $y=x^2+4x+5$; $y=1$.



A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{7}{4}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{9}{4}$.

Giải:

Hoành độ giao điểm của 2 parabol đã cho là nghiệm của phương trình:

$x^2-2x+2=x^2+4x+5$, cho ta $x=\frac{-1}{2}$.

Parabol $(P): y=x^2-2x+2$ có tọa độ cực tiểu là $(1;1)$ và

Parabol $(P): y=x^2+4x+5$ có tọa độ cực tiểu là $(-2;1)$.

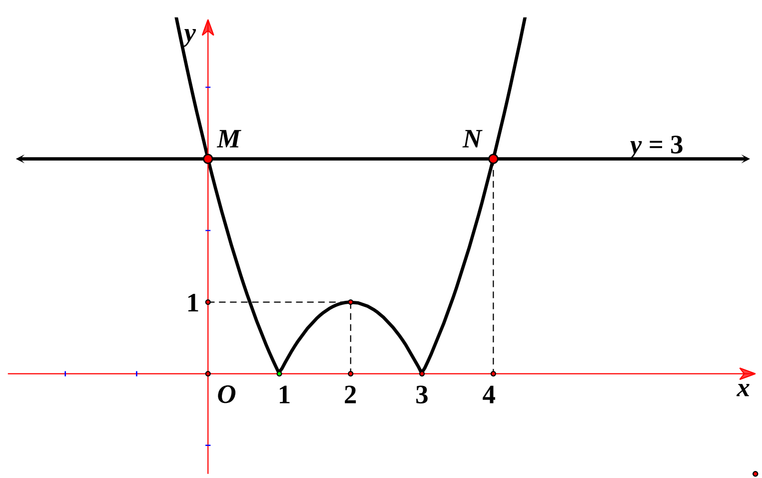
Diện tích cần tìm là:

$$S=\int_{-2}^{\frac{-1}{2}}\left(x^2+4x+5-1\right)dx+\int_{\frac{-1}{2}}^{1}\left(x^2-2x+2-1\right)dx=\frac{9}{4}.$$

Chọn D.

Bài 88:

Tính diện tích giới hạn bởi các đường $y=|x^2-4x+3|; y=3$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Ta có kết quả:



A. 6 .

B. 10 .

C. 8 .

D. 12 .

Giải:

Ta có: $y=\left|x^2-4x+3\right|=\begin{cases}-\left(x^2-4x+3\right), \text{khi } 1<x<3. \\ x^2-4x+3, \quad\quad \text{khi } x\le 1 \vee x\ge 3.\end{cases}$

Dễ thấy hoành độ giao điểm của hai đường đã cho là $x=0; x=4$ các tung độ tương ứng là: $y=3; y=3$.

Diện tích cần tìm là: $S=$ diện tích hình chữ nhật OMNP $-S_1$ trong đó:

$$S_1=\int_0^1\left(x^2-4x+3\right)dx+\int_1^3-\left(x^2-4x+3\right)dx+\int_3^4\left(x^2-4x+3\right)dx$$

$$=2.\left(\frac{1}{3}-2+3\right)+\left(-3+6-3+\frac{1}{3}-2+3\right)=3.\frac{4}{3}=4(\text{dvdt})$$

Chọn C.

Bài 89: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{4x}{x^4+1}$, trục hoành Ox và các đường thẳng $x=-1; x=1$ là:

A. 6π . B. 3π . C. 2π . D. π .

Giải:

Gọi S là diện tích cần tính, Ta có: $S=\int_{-1}^1\frac{4x}{x^4+1}dx$

$$=\int_{-1}^0\frac{-4x}{x^4+1}dx+\int_0^1\frac{4x}{x^4+1}dx=2\int_0^1\frac{4x}{x^4+1}dx=4\int_0^1\frac{2x}{x^4+1}dx \ .$$

Đặt $u=x^2\Rightarrow du=2xdx$. Suy ra $S=4\int_0^1\frac{1}{u^2+1}du=4I$.

Đẻ tính $I=\int_0^1\frac{1}{u^2+1}du$.

Ta đặt $u=\tan t,$ Ta có: $du=\frac{dt}{\left(\cos t\right)^2}$. Khi $u=0\to t=0;\quad u=1\to t=\frac{\pi}{4}$.

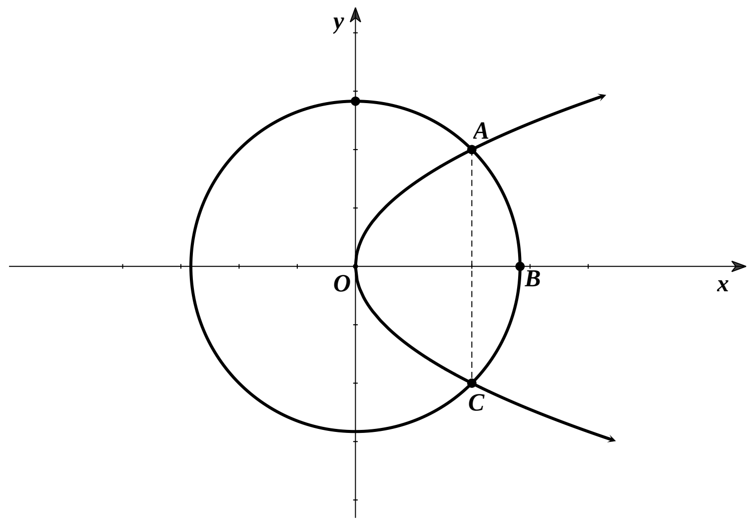
$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2 t+1}.\frac{dt}{\cos^2 t}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=\frac{\pi}{4}.$$ vậy $S=\pi$.

Chọn D.

Chú ý có thể sử dung MTCT để tìm nhanh kết quả.

Bài 90:

Parabol $y^2 = 2x$ chia hình phẳng giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 8$ thành hai phần. Diện tích hai phần đó là:



A. $2\pi + \frac{4}{3}$ và $6\pi - \frac{4}{3}$.

B. $\frac{\pi}{2}$ và $\frac{15\pi}{2}$.

C. $\frac{2\pi}{3}$ và $\frac{22\pi}{3}$.

D. $2\pi + \frac{2}{3}$ và $6\pi - \frac{2}{3}$.

Giải:

Đường tròn này cắt trục hoành tại điểm $A\left(2\sqrt{2};0\right)$ và cắt parabol $y^2 = 2x$ ở điểm C, B đối xứng nhau qua Ox, với $B\left(2;2\right)$.

Gọi S là diện tích tam giác cong OAB Ta có: $S = \int_0^2 \sqrt{2x}dx + \int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8 - x^2}dx$.

Ta có: $\int_0^2 \sqrt{2x}dx = \frac{8}{3}$.

Để tính $\int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8 - x^2}dx$, ta đặt: $x = 2\sqrt{2}\sin t, \frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Lúc đó: $dx = 2\sqrt{2}\cos tdt \Rightarrow \sqrt{8 - x^2} = \sqrt{8 - 8\sin^2 t} = \sqrt{8\cos^2 t} = 2\sqrt{2}\cos t$

Từ đó:

$$\int_2^{2\sqrt{2}} \sqrt{8 - x^2}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{2}\cos t.2\sqrt{2}\cos tdt = 8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt = 8\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}dt = \pi - 2$$

Vậy S $= \pi + \frac{2}{3}$.

Diện tích phần còn (OABC) là 2S = $2\pi + \frac{4}{3}$

Diện tích phần còn lại cần tính bằng diện tích hình tròn trừ đi 2S, tức là: $8\pi - \left(2\pi + \frac{4}{3}\right) = 6\pi - \frac{4}{3}(\text{dvdt})$.

Chọn A.

Bài 91: Cho parabol (P) có tiêu điểm $F\left(2;-\frac{3}{2}\right)$ và đường chuẩn D có phương trình $y=-\frac{5}{4}$. Diện tích hình giới hạn bởi (P) và trục Ox là:

A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{4}{3}$. C. 1 . D. 2 .

Giải:

Parabol là tập hợp những điểm cách đều tiêu điểm và đường chuẩn.

Do đó điểm $M\left(x;y\right)\in\left(P\right)$ khi và chỉ khi:

$$\left(x-2\right)^2+\left(y+\frac{3}{4}\right)^2=\left(y+\frac{5}{4}\right)^2 \Leftrightarrow y=x^2-4x+3 .$$

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol (P) với trục hoành là: $x^2-4x+3=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; \\ x=3 \end{array}\right. .$$

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và trục Ox thì:

$$S=\int_1^3\left(0-\left(x^2-4x+3\right)\right)dx=\int_1^3\left(-x^2+4x-3\right)dx$$

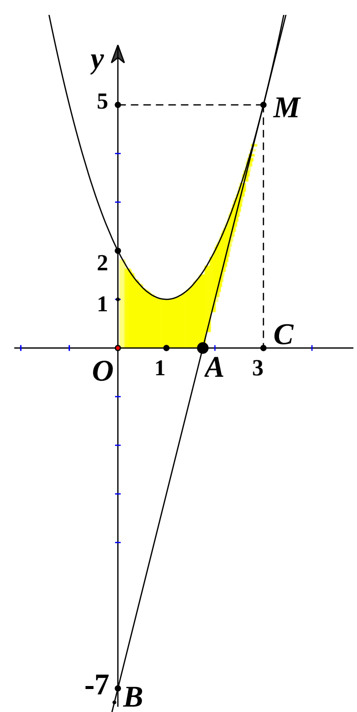
$$=\left[2x^2-\frac{x^3}{3}-3x\right]_1^3=\frac{4}{3}\left(dvdt\right)$$

Chọn C.

Bài 92: Giả sử hàm số $y=x^2-2x+2$ có đồ thị là đường cong (P). Gọi (d) là tiếp tuyến với (P) tại điểm $M\left(3;5\right)$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P), (d) và trục Ox là:

A. 4. B. 2. C. 5. D. 3.

Giải:



Với $y=x^2-2x+2$ ta có: $y'=2x-2, y'\left(3\right)=4$, đỉnh (điểm cực tiểu) của parabol là $\left(1;1\right)$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M\left(3;5\right)$ là:

$$y=4\left(x-3\right)+5=4x-7 .$$

Tiếp tuyến này cắt trục tung tại điểm $\left(0;-7\right)$ và cắt trục hoành tại điểm $A\left(\frac{7}{4};0\right)$.

Gọi S là diện tích cần tìm, Ta có:

$$S=\int_0^3\left(x^2-2x+2\right)dx-dt\left(\Delta AMC\right)+dt\left(\Delta OAB\right)$$

Bài 93: Thể tích vật thể tròn xoay do đường tròn $\left(x^2\right)+\left(y-2\right)^2=1$ quay quanh Ox có giá trị:

A. $11\pi^2$. B. $9\pi^2$. C. $4\pi^2$. D. π^2 .

Giải:

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left[\left(2+\sqrt{1-x^2}\right)^2-\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)^2\right]dx=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx$$

.

$$=16\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=16\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x dx=4\pi^2$$

Chọn C.

Bài 94: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi elip: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ và đường tròn $x^2+y^2=9$ được tính bởi công thức nào sau đây?

A. $\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}dx$. B. $\frac{1}{3}\int_0^3\sqrt{9-x^2}dx$. C. $\frac{2}{3}\int_0^3\sqrt{9-x^2}dx$. D. $4\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}dx$.

Giải:

Dựa vào tính chất đối xứng của elip và đường tròn thì phải có:

$$S=4\int_0^3\left(\sqrt{9-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right)dx=\frac{4}{3}\int_0^3\sqrt{9-x^2}dx\ .$$

Chọn B.

Bài 95: Gọi V_x và V_y lần lượt là thể tích khối tròn xoay tạo nên bởi phép quay hình elip $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\ \left(a<b\right)$. Xung quanh trục $Ox,\ Oy$. Hỏi khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $V_x>V_y$. B. $V_x<V_y$. C. $V_x=V_y$. D. $V_x\ge V_y$.

Giải:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\\x^2=a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\end{cases}$$

$$V_x = 2\pi\int_0^a y^2dx = 2\pi b^2\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi b^2\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a = \frac{4\pi ab^2}{3} = \frac{4\pi ab}{3}.b$$

$$V_y = V_x = 2\pi\int_0^b x^2dx = 2\pi a^2\int_0^b\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dx = 2\pi a^2\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^b = \frac{4\pi a^2b}{3} = \frac{4\pi ab}{3}.\text{a}$$

Vì b > a nên $V_x > V_y$.

Chọn A.

Bài 96: Trong hai khẳng định sau, khẳng định nào đúng:

(1) Nếu $f(x) < g(x), \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b \text{g}(x)dx$.

(2) Nếu $f\left(x\right) \geq g\left(x\right), \forall x \in [a;b]$ và nếu $\forall x_0 \in [a;b]: f(x_0) \neq g(x_0)$ thì $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b \text{g}(x)dx$.

A. Chỉ có (1) đúng.
B. Chỉ có (2) đúng.
C. Cả hai khẳng định đều đúng.
D. Cả hai khẳng định đều sai.

Giải:

Khẳng định (1) Ta có: $f(x) < g(x), \forall x \in [a;b]$ nên đồ thị $g(x)$ cao hơn f)x) trên [a;b]. do đó diện tích tạo bởi đồ thị g(x) trục hoành và hai đường thẳng x=a, x=b lớn hơn diện tích tạo bởi đồ thị f(x), trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ nghĩa là: $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b \text{g}(x)dx$. Khẳng định 2 cũng đúng.

Chọn C.