TỔ HỢP - CHỈNH HỢP

Phần 1 – Ôn lại cơ bản

Câu 1. Cho tập A có 20 phần tử. Hỏi tập A có bao nhiêu tập hợp con khác rỗng mà có số phần tử chẵn.

A. $2^{20}+1$. **B.** 2^{20}. **C.** $\dfrac{2^{20}}{2}-1$. **D.** 2^{19}.

Câu 2. Số tập con của một tập hợp gồm 2018 phần tử là

A. 2018. **B.** 2×2018. **C.** $2^{2018}-1$. **D.** 2^{2018}.

Câu 3. Cho tập A có n phần tử $(n \ge 4)$. Biết rằng số tập con của A có 8 phần tử nhiều gấp 26 lần số tập con của A có 4 phần tử. Hãy tìm $k \in \{0;1;2;...;n\}$ sao cho số tập con gồm k phần tử của A là nhiều nhất.

A. $k=9$. **B.** $k=10$. **C.** $k=11$. **D.** $k=20$.

Câu 4. Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n>4)$. Tìm n, biết rằng trong số các phần tử của A có đúng $16n$ tập con có số phần tử là lẻ.

A. $n=8$. **B.** $n=9$. **C.** $n=10$. **D.** $n=16$.

Câu 5. Với $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ và thỏa mãn $\dfrac{1}{C_2^2}+\dfrac{1}{C_3^2}+\dfrac{1}{C_4^2}+...+\dfrac{1}{C_n^2}=\dfrac{9}{5}$. Tính $P=\dfrac{C_n^5+C_{n+2}^3}{(n-4)!}$.

A. $P=\dfrac{29}{45}$. **B.** $P=\dfrac{53}{90}$. **C.** $P=\dfrac{59}{90}$. **D.** $P=\dfrac{61}{90}$.

Câu 6. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $1+P_1+2P_2+3P_3+...+nP_n=P_{2014}$, với P_n là số các hoán vị của tập hợp có n phần tử.

A. 2013. **B.** 2014. **C.** 2015. **D.** 2016.

Câu 7. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{2017}{A_{2017}^0}+\dfrac{2016}{A_{2017}^1}+...+\dfrac{2}{A_{2017}^{2015}}+\dfrac{1}{A_{2017}^{2016}}$.

A. $P=2017-\dfrac{1}{2018!}$. **B.** $P=2017-\dfrac{1}{2017!}$. **C.** $P=2018-\dfrac{1}{2017!}$. **D.** $P=2018-\dfrac{1}{2018!}$.

Câu 8. Tìm số tự nhiên n thỏa mãn

$$\frac{1}{2!.2017!}+\frac{1}{4!.2015!}+\frac{1}{6!.2013!}+...+\frac{1}{2016!.3!}+\frac{1}{2018!.1!}=\frac{2^{2018}-1}{P_n}.$$

A. $n=2017$. **B.** $n=2018$. **C.** $n=2019$. **D.** 2020.

Câu 9. Tính tổng $S=C_{2n}^0+C_{2n}^1+C_{2n}^2+...+C_{2n}^{2n}$.

A. $S=2^{2n}$. **B.** $S=2^{2n}-1$. **C.** $S=2^n$. **D.** $S=2^{2n}+1$.

Câu 10. Cho tổng $S=C_{2018}^0+9C_{2018}^1+9^2C_{2018}^2+...+9^{2018}C_{2018}^{2018}$, biết $\ln S=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 4036. **D.** 4038.

Câu 11. Giải phương trình $C_n^1+3C_n^2+7C_n^3+...+(2^n-1)C_n^n=3^{2n}-2^n-6480$ trên tập $\mathbb{N}^*$.

A. $n=3$. **B.** $n=4$. **C.** $n=5$. **D.** $n=6$.

Câu 12. Tính tổng $S=C_{2018}^{1009}+C_{2018}^{1010}+C_{2018}^{1011}+...+C_{2018}^{2018}$.

A. $S=2^{2017}-\dfrac{1}{2}C_{2018}^{1009}$. **B.** $S=2^{2017}+\dfrac{1}{2}C_{2018}^{1009}$. **C.** $S=2^{2017}-C_{2018}^{1009}$. **D.** $S=2^{2018}-C_{2018}^{1009}$.

Câu 13. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n=2^{20}-1$.

A. $n=8.$ **B.** $n=9.$ **C.** $n=10.$ **D.** $n=11.$

Câu 14. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_{2n+1}^{1}+C_{2n+1}^{3}+...+C_{2n+1}^{2n+1}=1024$.

A. $n=4.$ **B.** $n=5.$ **C.** $n=9.$ **D.** $n=10.$

Câu 15. Biết $S=3^0C_{2018}^{0}+3^2C_{2018}^{2}+3^4C_{2018}^{4}+...+3^{2018}C_{2018}^{2018}=2^a+2^b$ với $a,\ b$ $(a>b)$ là các số nguyên dương và không chia hết cho $2.$ Tính $a-b.$

A. $a-b=1.$ **B.** $a-b=2.$ **C.** $a-b=2017.$ **D.** $a-b=2018.$

Câu 16. Gọi $S=C_{2020}^{0}+5C_{2020}^{2}+5^2C_{2020}^{4}+...+5^iC_{2020}^{2i}+...+5^{1010}C_{2020}^{2020}$. Biết rằng S chia hết cho M, M có thể nhận giá trị nào dưới đây ?

A. $M=2^{1010}.$ **B.** $M=2^{2020}.$ **C.** $M=5^{1010}.$ **D.** $M=5^{2020}.$

Câu 17. Gọi $S=C_{2017}^{1}+3^2C_{2017}^{3}+3^4C_{2017}^{5}+...+3^{2014}C_{2017}^{2015}+3^{2016}C_{2017}^{2017}$. Biết S chia hết cho số M, M có thể nhận giá trị nào dưới đây ?

A. $M=2^{2016}.$ **B.** $M=2^{2017}.$ **C.** $M=2^{2018}.$ **D.** $M=2^{2019}.$

Câu 18. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $2C_n^0+5C_n^1+8C_n^2+...+(3n+2)C_n^n=1600.$

A. $n=5.$ **B.** $n=7.$ **C.** $n=8.$ **D.** $n=10.$

Câu 19. Cho n là số tự nhiên thỏa mãn $3C_n^0+4C_n^1+5C_n^2+...+(n+3)C_n^n=8192.$ Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $n\in[1;8).$ **B.** $n\in[8;12).$ **C.** $n\in[12;16).$ **D.** $n\in[16;20].$

Câu 20. Tính tổng $S=C_{2018}^{3}-2C_{2018}^{4}+3C_{2018}^{5}-4C_{2018}^{6}+...-2016C_{2018}^{2018}$.

A. $S=-2018.$ **B.** $S=-2016.$ **C.** $S=2016.$ **D.** $S=2018.$

Phần 2 – Vận dụng cao

Câu 1. Tính tổng $S=\left(C_{100}^{1}\right)^2+\left(C_{100}^{2}\right)^2+\left(C_{100}^{3}\right)^2+...+\left(C_{100}^{100}\right)^2$.

A. $S=2^{200}.$ **B.** $S=2^{200}-1.$ **C.** $S=C_{200}^{100}-1.$ **D.** $S=C_{200}^{100}.$

Câu 2. Tính tổng $S=\left(C_{2018}^{1}\right)^2+2\left(C_{2018}^{2}\right)^2+...+2018\left(C_{2018}^{2018}\right)^2$.

A. $S=1009C_{4035}^{2018}.$ **B.** $S=1009C_{4036}^{2017}.$ **C.** $S=1009C_{4036}^{2018}.$ **D.** $S=2018C_{4036}^{2018}.$

Câu 3. Tính tổng $S=\left(C_{2018}^{1}\right)^2+\left(2C_{2018}^{2}\right)^2+\left(3C_{2018}^{3}\right)^2+...+\left(2018C_{2018}^{2018}\right)^2$.

A. $S=\dfrac{2018^2}{2}.C_{4036}^{2018}.$ **B.** $S=\dfrac{2018^2}{2}.\left(C_{4036}^{2018}-1\right).$

C. $S=2018^2.C_{4034}^{2017}.$ **D.** $S=2018^2.\left(C_{4034}^{2017}-1\right).$

Câu 4. Tính tổng $S=\left(C_{2018}^{0}\right)^2-\left(C_{2018}^{1}\right)^2+\left(C_{2018}^{2}\right)^2-...+\left(C_{2018}^{2018}\right)^2$.

A. $S=C_{4036}^{2018}.$ **B.** $S=-C_{4036}^{2018}.$ **C.** $S=C_{2018}^{1009}.$ **D.** $S=-C_{2018}^{1009}.$

Câu 5. Tìm số tự nhiên n thỏa mãn $C_{2018}^{0}C_n^{2018}+C_{2018}^{1}C_n^{2017}+C_{2018}^{2}C_n^{2016}+...+C_{2018}^{2018}C_n^{0}=\dfrac{1}{2}C_{2n}^{2019}$.

A. $n=2016.$ **B.** $n=2017.$ **C.** $n=2018.$ **D.** $n=2019.$

Câu 6. Cho tổng $S=C_{2018}^{1}+2C_{2018}^{2}+3C_{2018}^{3}+...+2018C_{2018}^{2018}$, biết $\ln S=a\ln 2018+b\ln 2+c,$ với $a,\ b,\ c\in\mathbb{Z}$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. $0.$ **B.** $1.$ **C.** $2018.$ **D.** $2019!.$

Câu 7. Cho tổng $S=4C_{100}^{2}+8C_{100}^{4}+12C_{100}^{6}+...+200C_{100}^{100}$, biết $S=a.2^b$ với $a,\ b$ là các số nguyên dương. Tính giá trị biểu thức $P=a+b.$

A. $P=1.$ **B.** $P=99.$ **C.** $P=199.$ **D.** $P=200.$

Câu 8. Tổng $S=\dfrac{1}{2017}\left(2.3C_{2017}^{2}+3.3^{2}C_{2017}^{3}+4.3^{3}C_{2017}^{4}+\ldots+k.3^{k-1}C_{2017}^{k}+\ldots+2017.3^{2016}C_{2017}^{2017}\right)$ bằng:

A. $3^{2016}-1$. **B.** 3^{2016}. **C.** $4^{2016}-1$. **D.** 4^{2016}.

Câu 9. Tính tổng $S=C_{2018}^{0}C_{2018}^{2017}+C_{2018}^{1}C_{2017}^{2016}+\ldots+C_{2018}^{k}C_{2018-k}^{2017-k}+\ldots+C_{2018}^{2017}C_{1}^{0}$.

A. $S=1009.2^{2017}$. **B.** $S=2018.2^{2017}$. **C.** $S=2018.2^{2018}$. **D.** $S=2018.2^{2019}$.

Câu 10. Cho tổng

$$S=2.1.C_{2018}^{2}+3.2.C_{2018}^{3}+\ldots+2018.2017.C_{2018}^{2018},$$

biết $\ln S=a\ln 2+b\ln 2018+c\ln 2017$ với $a,\ b,\ c$ là các số nguyên. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 2. **B.** 2011. **C.** 2018. **D.** 2019.

Câu 11. Cho số nguyên dương n thỏa mãn $2C_{n}^{1}+3C_{n}^{2}+4C_{n}^{3}+\ldots+(n+1)C_{n}^{n}=111$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $n\in(1;4)$. **B.** $n\in[4;7)$. **C.** $n\in[7;10)$. **D.** $n\in[10;18]$.

Câu 12. Tính tổng $S=C_{2018}^{3}-2C_{2018}^{4}+3C_{2018}^{5}-4C_{2018}^{6}+\ldots-2016C_{2018}^{2018}$.

A. $S=2016$. **B.** $S=2017$. **C.** $S=2018$. **D.** $S=2019$.

Câu 13. Tính tổng $S=2.C_{n}^{1}+2^{2}.2.C_{n}^{2}+2^{3}.3.C_{n}^{3}+\ldots+2^{n}.n.C_{n}^{n}$.

A. $S=2n.3^{n-1}$. **B.** $S=2n.3^{n+1}$. **C.** $S=3n.2^{n-1}$. **D.** $S=3n.2^{n+1}$.

Câu 14. Cho tổng $S=1^{2}C_{2018}^{1}x+2^{2}C_{2018}^{2}+3^{2}C_{2018}^{3}+\ldots+2018^{2}C_{2018}^{2018}$, biết $S=a.2^{b}$ với $a,\ b$ là các số nguyên và đều không chia hết cho 2. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 4076358. **B.** 2039188. **C.** 4079198. **D.** 2009197.

Câu 15. Tính tổng $S=100C_{100}^{0}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{99}+101C_{100}^{1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{100}+102C_{100}^{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{101}+\ldots+200C_{100}^{100}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{199}$.

A. $S=100.\left(\dfrac{3}{4}\right)^{99}$. **B.** $S=200.\left(\dfrac{3}{4}\right)^{99}$. **C.** $S=100.\left(\dfrac{3}{4}\right)^{100}$. **D.** $S=200.\left(\dfrac{3}{4}\right)^{100}$.

Câu 16. Cho tổng $S=\dfrac{1}{1}C_{2018}^{0}+\dfrac{1}{2}C_{2018}^{1}+\dfrac{1}{3}C_{2018}^{2}+\ldots+\dfrac{1}{2019}C_{2018}^{2018}$, biết $S=\dfrac{2^{a}-b}{c}$ với $a,\ b,\ c$ là các số nguyên dương và đều không chia hết cho 2; phân số $\dfrac{b}{c}$ tối giản. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=4034$. **B.** $P=4037$. **C.** $P=4038$. **D.** $P=4039$.

Câu 17. Tính tổng $S=\dfrac{2^{0}}{1}C_{2018}^{0}-\dfrac{2^{1}}{2}C_{2018}^{1}+\dfrac{2^{2}}{3}C_{2018}^{2}-\dfrac{2^{3}}{4}C_{2018}^{3}+\ldots+\dfrac{2^{2018}}{2019}C_{2018}^{2018}$.

A. $S=2018$. **B.** $S=2019$. **C.** $S=\dfrac{1}{2018}$. **D.** $S=\dfrac{1}{2019}$.

Câu 18. Cho tổng $S=\dfrac{1}{2}C_{2018}^{0}+\dfrac{1}{4}C_{2018}^{1}+\dfrac{1}{6}C_{2018}^{2}+\dfrac{1}{8}C_{2018}^{3}\ldots+\dfrac{1}{2.2018+2}C_{2018}^{2018}$, biết $S=\dfrac{2^{a}-b}{c}$ với $a,\ b,\ c$ là các số nguyên dương, phân số $\dfrac{b}{c}$ tối giản. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=4037$. **B.** $P=4039$. **C.** $P=6454$. **D.** $P=6458$.

Câu 19. Tổng $S=\dfrac{C_{2018}^{0}}{3}-\dfrac{C_{2018}^{1}}{4}+\dfrac{C_{2018}^{2}}{5}-\dfrac{C_{2018}^{3}}{6}+\ldots-\dfrac{C_{2018}^{2017}}{2020}+\dfrac{C_{2018}^{2018}}{2021}$ bằng

A. $\dfrac{1}{4121202989}$. **B.** $\dfrac{1}{4121202990}$. **C.** $\dfrac{1}{4121202991}$. **D.** $\dfrac{1}{4121202992}$.

Câu 20. Cho n là số tự nhiên thỏa mãn $\dfrac{C_{n}^{0}}{1.2}+\dfrac{C_{n}^{1}}{2.3}+\dfrac{C_{n}^{2}}{3.4}+\ldots+\dfrac{C_{n}^{n}}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{2^{100}-n-3}{(n+1)(n+2)}$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $n\in[1;49]$. **B.** $n\in[50;99]$. **C.** $n\in[100;149]$. **D.** $n\in[150;200]$.

Câu 21. Biết rằng $\frac{2^0C_{2018}^0}{1.2}-\frac{2^1C_{2018}^1}{2.3}+\frac{2^2C_{2018}^2}{3.4}-\frac{2^3C_{2018}^3}{4.5}+...+\frac{2^{2018}C_{2018}^{2018}}{2019.2020}=\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Hiệu $a-b$ bằng

A. -4039. **B.** -4037. **C.** 4037. **D.** 4039.

Câu 22. Biết $\frac{1}{2}C_{2018}^1+\frac{1}{4}C_{2018}^3+...+\frac{1}{2018}C_{2018}^{2017}=\frac{2^a-b}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và phân số $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=4034$. **B.** $P=4037$. **C.** $P=4038$. **D.** $P=4039$.

Câu 23. Biết rằng $\frac{1}{2}C_{2018}^0+\frac{1}{4}C_{2018}^2+\frac{1}{6}C_{2018}^4+...+\frac{1}{2020}C_{2018}^{2018}=\frac{a.2^b+1}{b(b+1)}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Hiệu $b-a$ bằng

A. 1008. **B.** 1009. **C.** 1010. **D.** 2010.

Câu 24. Biết $\frac{1}{2}C_{2018}^1.2^2+\frac{2}{3}C_{2018}^2.2^3+\frac{3}{4}C_{2018}^3 2^4+...+\frac{2018}{2019}C_{2018}^{2018}2^{2019}=\frac{a}{b}.3^{2018}+\frac{1}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và $(a;b)=1$. Tổng $a+b+c$ bằng

A. 3364. **B.** 4036. **C.** 4037. **D.** 8037.

Câu 25. Cho tổng $S_n=\frac{1}{2}.2^2C_n^1+\frac{2}{3}.2^3C_n^2+...+\frac{n}{n+1}.2^{n+1}C_n^n$ với $n\in\mathbb{N}^*$. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất thỏa mãn $S_n>5^{200}+\frac{1}{n+1}$.

A. $n=200$. **B.** $n=201$. **C.** $n=292$. **D.** $n=293$.

Câu 26. Cho $S=C_{2018}^1+\frac{2.C_{2018}^2}{C_{2018}^1}+\frac{3.C_{2018}^3}{C_{2018}^1}+...+\frac{2018.C_{2018}^{2018}}{C_{2018}^{2017}}$, biết $\ln(2S)=a\ln 2018+b\ln 2019+c$ với $a, b, c\in\mathbb{Z}$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 2018. **D.** 2019.

Câu 27. Biết rằng $\frac{1}{2018}\left(C_{2018}^1\right)^2+\frac{2}{2017}\left(C_{2018}^2\right)^2+...+\frac{2017}{2}\left(C_{2018}^{2017}\right)^2+\frac{2018}{1}\left(C_{2018}^{2018}\right)^2=\frac{a}{b}.C_{2a}^a$ với a, b là những số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $a+b\in(0;2018)$. **B.** $a+b\in[2018;4036]$. **C.** $a+b\in(4036;6054)$. **D.** $a-b=1$.

Câu 28. Cho $S_1=C_{2018}^{1009}+C_{2017}^{1009}+C_{2016}^{1009}+...+C_{1010}^{1009}+C_{1009}^{1009}$ và $S_2=C_{2016}^{1010}+3C_{2016}^{1009}+3C_{2016}^{1008}+C_{2016}^{1007}$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $S_1=S_2$. **B.** $S_1=2019S_2$. **C.** $S_1=2018S_2$. **D.** $S_1<S_2$.

Câu 29. Tính tổng $S=\sum_{k=0}^{2000}C_{2018+k}^k$.

A. $S=C_{4018}^{2018}$. **B.** $S=C_{4019}^{2018}$. **C.** $S=C_{4018}^{2019}$. **D.** $S=C_{4019}^{2019}$.

Câu 30. Gọi $M=\frac{1}{C_{2017}^1}+\frac{1}{C_{2017}^2}+...+\frac{1}{C_{2017}^{2017}}$ và $N=\frac{1}{C_{2016}^0}+\frac{1}{C_{2016}^1}+...+\frac{1}{C_{2016}^{2016}}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\frac{M}{N}=\frac{1008}{2017}$. **B.** $\frac{M}{N}=\frac{1009}{2017}$. **C.** $\frac{M}{N}=\frac{2016}{2017}$. **D.** $\frac{M}{N}=\frac{2018}{2017}$.

Câu 31. Tổng $C_{2019}^1-C_{2019}^3+C_{2019}^5-...-C_{2019}^{2019}$ bằng

A. -2^{1010}. **B.** -2^{1009}. **C.** 2^{1009}. **D.** 2^{1010}.

Câu 32. Tổng $C_{2019}^0 + C_{2019}^4 + C_{2019}^8 + ... + C_{2019}^{2016}$ bằng

A. $2^{2017} - 2^{1008}$. **B.** $2^{2017} - 2^{1009}$. **C.** $2^{2019} - 2^{1008}$. **D.** $2^{2019} - 2^{1009}$.

Câu 33. Tổng $C_{2019}^0 - 3C_{2019}^2 + 3^2C_{2019}^4 - 3^3C_{2019}^6 + ... - 3^{1009}C_{2019}^{2018}$ bằng

A. -2^{2019}. **B.** -2^{2018}. **C.** 2^{2018}. **D.** 2^{2019}.

Câu 34. Khai triển biểu thức $\left(2018x^2 + x + 2018\right)^{20118}$ được viết thành $a_0 + a_1x + ... + a_{4036}x^{4036}$.

Tính tổng $S = a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + ... - a_{4035}$.

A. $S = -1$. **B.** $S = 0$. **C.** $S = 1$. **D.** $S = 2^{2018}$.

Câu 35. Khai triển của biểu thức $\left(x^2 + x + 1\right)^{2018}$ được viết thành $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{4036}x^{4036}$.

Tổng $S = a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + ... - a_{4034} + a_{4036}$ bằng

A. -1. **B.** 0. **C.** -2^{1009}. **D.** 2^{1009}.

---------- **HẾT** ----------

TỔ HỢP – CHỈNH HỢP

Phần 1 – Ôn lại cơ bản

Phần 2 – Vận dụng cao

Phần 1 – Ôn lại cơ bản

Vấn đề 1. SỐ TẬP CON CỦA MỘT TẬP HỢP

Câu 1. Cho tập A có 20 phần tử. Hỏi tập A có bao nhiêu tập hợp con khác rỗng mà có số phần tử chẵn.

A. $2^{20}+1$. **B.** 2^{20}. **C.** $\dfrac{2^{20}}{2}-1$. **D.** 2^{19}.

Lời giải. Số tập hợp con khác rỗng có số phần tử chẵn là số cách chọn số phần tử chẵn từ 20 phần tử. Do đó số tập con là $C_{20}^{2}+C_{20}^{4}+C_{20}^{6}+\ldots+C_{20}^{18}+C_{20}^{20}$.

Tính tổng trên bằng cách khai triển nhị thức Niutơn hoặc dùng máy tính cầm tay và đối chiếu các đáp án. **Chọn C.**

Câu 2. Số tập con của một tập hợp gồm 2018 phần tử là

A. 2018. **B.** 2×2018. **C.** $2^{2018}-1$. **D.** 2^{2018}.

Lời giải. Số tập con không có phần tử nào là C_{2018}^{0};

Số tập con có 1 phần tử là C_{2018}^{1};

Số tập con có 2 phần tử là C_{2018}^{2};

$\vdots$

Số tập con có 2018 phần tử là C_{2018}^{2018}.

Vậy số tập con của một tập hợp gồm 2018 phần tử là $C_{2018}^{0}+C_{2018}^{1}+C_{2018}^{2}+\cdots+C_{2018}^{2018}=(1+1)^{2018}$.

Chọn D.

Câu 3. Cho tập A có n phần tử $(n\geq 4)$. Biết rằng số tập con của A có 8 phần tử nhiều gấp 26 lần số tập con của A có 4 phần tử. Hãy tìm $k\in\{0;1;2;\ldots;n\}$ sao cho số tập con gồm k phần tử của A là nhiều nhất.

A. $k=9$. **B.** $k=10$. **C.** $k=11$. **D.** $k=20$.

Lời giải. Số tập con có 8 phần tử của tập A là C_n^8, số tập con có 4 phần tử của tập A là C_n^4.

Theo giả thiết, ta có $C_n^8=26C_n^4 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{8!(n-8)!}=26\dfrac{n!}{4!(n-4)}\Leftrightarrow n=20$.

Ta dễ dàng tìm được trong tất cả các C_{20}^{k} với $k\in\{0;1;2;\ldots;n\}$ thì C_{20}^{10} lớn nhất. **Chọn B.**

Câu 4. Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n>4)$. Tìm n, biết rằng trong số các phần tử của A có đúng $16n$ tập con có số phần tử là lẻ.

A. $n=8$. **B.** $n=9$. **C.** $n=10$. **D.** $n=16$.

Lời giải. Nếu n lẻ $\longrightarrow$ số tập con có số phần tử lẻ là: $C_n^1+C_n^3+\ldots+C_n^n=16n$.

Ta có $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n$.

- Cho $x=1\longrightarrow C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n$.
- Cho $x=-1\longrightarrow C_n^0-C_n^1+C_n^2-\ldots+C_n^{n-1}-C_n^n=0$.

Suy ra $2\left(C_n^1+C_n^3+\ldots+C_n^n\right)=2^n\Leftrightarrow C_n^1+C_n^3+\ldots+C_n^n=2^{n-1}=16n\longrightarrow n=8$: không thỏa mãn.

Nếu n chẵn, tương tự ta có được $n=8$. **Chọn A.**

Vấn đề 2. TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

Câu 5. Với $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ và thỏa mãn $\frac{1}{C_2^2}+\frac{1}{C_3^2}+\frac{1}{C_4^2}+\ldots+\frac{1}{C_n^2}=\frac{9}{5}$. Tính $P=\frac{C_n^5+C_{n+2}^3}{(n-4)!}$.

A. $P=\frac{29}{45}$. **B.** $P=\frac{53}{90}$. **C.** $P=\frac{59}{90}$. **D.** $P=\frac{61}{90}$.

Lời giải. Ta có $\frac{1}{C_2^2}+\frac{1}{C_3^2}+\frac{1}{C_4^2}+\ldots+\frac{1}{C_n^2}=\frac{9}{5}\Leftrightarrow 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{2}{n(n-1)}=\frac{9}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{2}{n(n-1)}=\frac{4}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{2.3}+\frac{2}{3.4}+\ldots+\frac{2}{n(n-1)}=\frac{4}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n-1)}=\frac{2}{5}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}-\frac{1}{n}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow \frac{1}{n}=\frac{1}{10}\Leftrightarrow n=10$.

Với $n=10\longrightarrow P=\frac{C_{10}^5+C_{12}^3}{6!}=\frac{59}{90}$. **Chọn C.**

Câu 6. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $1+P_1+2P_2+3P_3+\ldots+nP_n=P_{2014}$, với P_n là số các hoán vị của tập hợp có n phần tử.

A. 2013. **B.** 2014. **C.** 2015. **D.** 2016.

Lời giải. Ta có $P_k-P_{k-1}=k!-(k-1)!=(k-1)!.(k-1)=(k-1)P_{k-1}$ với $k=1;2;\ldots$ (1)

Áp dụng (1) ta có $\begin{cases}P_2-P_1=P_1\\P_3-P_2=2P_2\\\ldots\\P_{n+1}-P_n=nP_n\end{cases}$. (2)

Cộng các đẳng thức ở (2) ta được $P_{n+1}-P_1=P_1+2P_2+3P_3+\ldots+nP_n$.

Do $P_1=1\longrightarrow P_{n+1}=1+P_1+2P_2+3P_3+\ldots+nP_n$.

Theo đề, ta có $P_{n+1}=P_{2014}\Leftrightarrow n+1=2014\longrightarrow n=2013$. **Chọn A.**

Câu 7. Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{2017}{A_{2017}^0}+\frac{2016}{A_{2017}^1}+\ldots+\frac{2}{A_{2017}^{2015}}+\frac{1}{A_{2017}^{2016}}$.

A. $P=2017-\frac{1}{2018!}$. **B.** $P=2017-\frac{1}{2017!}$. **C.** $P=2018-\frac{1}{2017!}$. **D.** $P=2018-\frac{1}{2018!}$.

Lời giải. Ta có $P=\dfrac{2017.2017!}{2017!}+\dfrac{2016.2016!}{2017!}+\ldots+\dfrac{2.2!}{2017!}+\dfrac{1.1!}{2017!}$

$$=\frac{2017.2017!+2016.2016!+\ldots+2.2!+1.1!}{2017!}$$

$$=\frac{(2018-1)2017!+(2017-1)2016!+\ldots+(3-1)2!+(2-1)1!}{2017!}$$

$$=\frac{(2018!-2017!)+(2017!-2016!)+\ldots+(3!-2!)+(2!-1!)}{2017!}$$

$=\dfrac{2018!-1!}{2017!}\longrightarrow P=2018-\dfrac{1}{2017!}$. **Chọn C.**

Câu 8. Tìm số tự nhiên n thỏa mãn

$$\frac{1}{2!.2017!}+\frac{1}{4!.2015!}+\frac{1}{6!.2013!}+\ldots+\frac{1}{2016!.3!}+\frac{1}{2018!.1!}=\frac{2^{2018}-1}{P_n}.$$

A. $n=2017$. **B.** $n=2018$. **C.** $n=2019$. **D.** 2020.

Lời giải. Ta có $\dfrac{1}{2!.2017!}+\dfrac{1}{4!.2015!}+\dfrac{1}{6!.2013!}+\ldots+\dfrac{1}{2016!.3!}+\dfrac{1}{2018!.1!}=\dfrac{2^{2018}-1}{P_n}$.

Nhận hai vế cho $2019!$, ta được

$$\frac{2019!}{2!.2017!}+\frac{2019!}{4!.2015!}+\frac{2019!}{6!.2013!}+\ldots+\frac{2019!}{2016!.3!}+\frac{2019!}{2018!.1!}=2019!\,.\,\frac{2^{2018}-1}{P_n}$$

$$\Leftrightarrow C_{2019}^2+C_{2019}^4+\ldots+C_{2019}^{2018}=2019!\,.\,\frac{2^{2018}-1}{n!}$$

$$\Leftrightarrow C_{2019}^0+C_{2019}^2+C_{2019}^4+\ldots+C_{2019}^{2018}=2019!\,.\,\frac{2^{2018}-1}{n!}+C_{2019}^0$$

$$\Leftrightarrow 2^{2018}=2019!\,.\,\frac{2^{2018}-1}{n!}+1$$

$\Leftrightarrow 2^{2018}.n!=2019!\left(2^{2018}-1\right)+n!\Leftrightarrow\left(2^{2018}-1\right)\left(n!-2019!\right)=0\longrightarrow n=2019$. **Chọn C.**

Vấn đề 3. KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NIUTƠN ĐỂ TÍNH TỔNG

Câu 9. Tính tổng $S=C_{2n}^0+C_{2n}^1+C_{2n}^2+\ldots+C_{2n}^{2n}$.

A. $S=2^{2n}$. **B.** $S=2^{2n}-1$. **C.** $S=2^n$. **D.** $S=2^{2n}+1$.

Lời giải. Khai triển nhị thức Niutơn của $(1+x)^{2n}$, ta có

$$(1+x)^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2+\ldots+C_{2n}^{2n}x^{2n}.$$

Cho $x=1$, ta được $C_{2n}^0+C_{2n}^1+C_{2n}^2+\ldots+C_{2n}^{2n}=(1+1)^{2n}=2^{2n}$. **Chọn A.**

Câu 10. Cho tổng $S=C_{2018}^0+9C_{2018}^1+9^2C_{2018}^2+\ldots+9^{2018}C_{2018}^{2018}$, biết $\ln S=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$, với $a,\ b,\ c$ là các số nguyên. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 4036. **D.** 4038.

Lời giải. Xét khai triển $(1+x)^{2018}=C_{2018}^0+C_{2018}^1x+C_{2018}^2x^2+\ldots+C_{2018}^{2018}x^{2108}$.

Cho $x=9$, ta được $10^{2018}=C_{2018}^0+9C_{2018}^1+9^2C_{2018}^2+\ldots+9^{2018}C_{2018}^{2018}\longrightarrow S=10^{2018}$

$\longrightarrow \ln S=2018\ln 10=2018\ln 2+2018\ln 5\longrightarrow\begin{cases}a=2018\\ b=0\\ c=2018\end{cases}\rightarrow a+b+c=4036$. **Chọn C.**

Câu 11. Giải phương trình $C_n^1+3C_n^2+7C_n^3+\ldots+\left(2^n-1\right)C_n^n=3^{2n}-2^n-6480$ trên tập $\mathbb{N}^*$.

A. $n=3$. **B.** $n=4$. **C.** $n=5$. **D.** $n=6$.

Lời giải. Xét khai triển $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n$.

Thay $x=2$, ta được: $3^n=C_n^0+2C_n^1+2^2C_n^2+\ldots+2^nC_n^n$. (1)

Thay $x=1,$ ta được: $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n.$ (2)

Trừ vế theo vế của (1) và (2), ta được: $C_n^1 + 3C_n^2 + 7C_n^3 + \ldots + \left(2^n - 1\right)C_n^n = 3^n - 2^n.$

Theo đề, suy ra $3^n - 2^n = 3^{2n} - 2^n - 6480 \Leftrightarrow 3^n = 81 \longrightarrow n = 4.$ **Chọn B.**

Vấn đề 4. TÍNH TỔNG NHỜ HỆ THỨC $C_n^k = C_n^{n-k}$

Câu 12. Tính tổng $S = C_{2018}^{1009} + C_{2018}^{1010} + C_{2018}^{1011} + \ldots + C_{2018}^{2018}.$

A. $S = 2^{2017} - \frac{1}{2}C_{2018}^{1009}.$ **B.** $S = 2^{2017} + \frac{1}{2}C_{2018}^{1009}.$ **C.** $S = 2^{2017} - C_{2018}^{1009}.$ **D.** $S = 2^{2018} - C_{2018}^{1009}.$

Lời giải. Xét khai triển $(1+x)^{2018} = \sum_{k=0}^{2018} C_{2018}^k x^k = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 x + \ldots + C_{2018}^{2018} x^{2018}.$

Cho $x=1,$ ta được $2^{2018} = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 + \ldots + C_{2018}^{2018}.$

Vì $C_n^k = C_n^{n-k} \to 2^{2018} = 2\left(C_{2018}^{1010} + C_{2018}^{1011} + C_{2018}^{2018}\right) + C_{2018}^{1009} = 2S + C_{2018}^{1009} \to S = 2^{2017} + \frac{1}{2}C_{2018}^{1009}.$ **Chọn B.**

Câu 13. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \ldots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1.$

A. $n = 8.$ **B.** $n = 9.$ **C.** $n = 10.$ **D.** $n = 11.$

Lời giải. Ta có $(1+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1}.$ (1)

Áp dụng công thức $C_n^k = C_n^{n-k},$ ta có $\begin{cases} C_{2n+1}^0 = C_{2n+1}^{2n+1} \\ C_{2n+1}^1 = C_{2n+1}^{2n} \\ \vdots \\ C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{n+1} \end{cases}.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \ldots + C_{2n+1}^n = \frac{2^{2n+1}}{2} \Leftrightarrow C_{2n+1}^1 + \ldots + C_{2n+1}^n = \frac{2^{2n+1}}{2} - C_{2n+1}^0 = 2^{2n} - 1.$

Theo giả thiết: $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \ldots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1 \longrightarrow 2^{2n} - 1 = 2^{20} - 1 \longrightarrow n = 10.$ **Chọn C.**

Vấn đề 5. TÍNH TỔNG NHỜ KHAI TRIỂN NIU TƠN VÀ CHO $\begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases}$

Câu 14. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024.$

A. $n = 4.$ **B.** $n = 5.$ **C.** $n = 9.$ **D.** $n = 10.$

Lời giải. Xét khai triển $(x+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 x^{2n+1} + C_{2n+1}^1 x^{2n} + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1}.$ (1)

Cho $x = 1$ vào (1), ta được: $2^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1}.$ (2)

Cho $x = -1$ vào (1), ta được: $0 = -C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 - \ldots + C_{2n+1}^{2n+1}.$ (3)

Cộng vế theo vế của (2) và (3), ta được: $2^{2n+1} = 2\left(C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1}\right)$

$\Leftrightarrow 2^{2n+1} = 2.1024 \Leftrightarrow n = 5.$ **Chọn B.**

Câu 15. Biết $S = 3^0 C_{2018}^0 + 3^2 C_{2018}^2 + 3^4 C_{2018}^4 + \ldots + 3^{2018} C_{2018}^{2018} = 2^a + 2^b$ với a, b $(a > b)$ là các số nguyên dương và không chia hết cho 2. Tính $a - b.$

A. $a - b = 1.$ **B.** $a - b = 2.$ **C.** $a - b = 2017.$ **D.** $a - b = 2018.$

Lời giải. Xét khai triển $(1+x)^{2018} = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 x + C_{2018}^2 x^2 + \ldots + C_{2018}^{2017} x^{2017} + C_{2018}^{2018} x^{2018}.$ (1)

Thay $x = 3$ vào (1), ta được: $4^{2018} = C_{2018}^0 + 3C_{2018}^1 + 3^2 C_{2018}^2 + \ldots + 3^{2017} C_{2018}^{2017} + 3^{2018} C_{2018}^{2018}.$ (2)

Thay $x = -3$ vào (1), ta được: $2^{2018} = C_{2018}^0 - 3C_{2018}^1 + 3^2 C_{2018}^2 - \ldots - 3^{2017} C_{2018}^{2018} + 3^{2018} C_{2018}^{2018}.$ (3)

Cộng vế theo vế của (2) và (3), ta được: $2S = 4^{2018} + 2^{2018} \longrightarrow S = 2^{4035} + 2^{2017}$

$\longrightarrow \begin{cases} a = 4035 \\ b = 2017 \end{cases} \to a - b = 2018.$ **Chọn D.**

Câu 16. Gọi $S=C_{2020}^{0}+5C_{2020}^{2}+5^{2}C_{2020}^{4}+\ldots+5^{i}C_{2020}^{2i}+\ldots+5^{1010}C_{2020}^{2020}$. Biết rằng S chia hết cho M, M có thể nhận giá trị nào dưới đây ?

A. $M=2^{1010}$. **B.** $M=2^{2020}$. **C.** $M=5^{1010}$. **D.** $M=5^{2020}$.

Lời giải. Theo khai triển nhị thức Niutơn ta có

$$(1+x)^{2020}=C_{2020}^{0}+C_{2020}^{1}x+C_{2020}^{2}x^{2}+C_{2020}^{3}x^{3}+C_{2020}^{4}x^{4}+\ldots+C_{2020}^{2019}x^{2019}+C_{2020}^{2020}x^{2020}. \qquad (1)$$

Thay $x=\sqrt{5}$ vào (1), ta được:

$$\left(1+\sqrt{5}\right)^{2020}=C_{2020}^{0}+\sqrt{5}C_{2020}^{1}+5C_{2020}^{2}+\left(\sqrt{5}\right)^{3}C_{2020}^{3}+5^{2}C_{2020}^{4}+\ldots+\left(\sqrt{5}\right)^{2019}C_{2020}^{2019}+5^{1010}C_{2020}^{2020}.$$

Thay $x=-\sqrt{5}$ vào (1), ta được:

$$\left(1-\sqrt{5}\right)^{2020}=C_{2020}^{0}-\sqrt{5}C_{2020}^{1}+5C_{2020}^{2}-\left(\sqrt{5}\right)^{3}C_{2020}^{3}+5^{2}C_{2020}^{4}-\ldots-\left(\sqrt{5}\right)^{2019}C_{2020}^{2019}+5^{1010}C_{2020}^{2020}.$$

Cộng vế theo vế, ta suy ra $S=\dfrac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{2020}+\left(1-\sqrt{5}\right)^{2020}}{2}=\dfrac{\left(6+2\sqrt{5}\right)^{1010}+\left(6-2\sqrt{5}\right)^{1010}}{2}$

$$=2^{1010}\left[\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{1010}+\left(1-\sqrt{5}\right)^{1010}}{2}\right]=2^{1010}\left(C_{1010}^{0}+5C_{1010}^{2}+5^{2}C_{1010}^{4}+\ldots+5^{505}C_{1010}^{1010}\right)\vdots\,2^{1010}.$$ **Chọn A.**

Câu 17. Gọi $S=C_{2017}^{1}+3^{2}C_{2017}^{3}+3^{4}C_{2017}^{5}+\ldots+3^{2014}C_{2017}^{2015}+3^{2016}C_{2017}^{2017}$. Biết S chia hết cho số M, M có thể nhận giá trị nào dưới đây ?

A. $M=2^{2016}$. **B.** $M=2^{2017}$. **C.** $M=2^{2018}$. **D.** $M=2^{2019}$.

Lời giải. Ta có $3S=3C_{2017}^{1}+3^{3}C_{2017}^{3}+3^{5}C_{2017}^{5}+\ldots+3^{2015}C_{2017}^{2015}+3^{2017}C_{2017}^{2017}$.

Xét $(1+x)^{2017}=C_{2017}^{0}+C_{2017}^{1}x+C_{2017}^{2}x^{2}+\ldots+C_{2017}^{2016}x^{2016}+C_{2017}^{2017}x^{2017}$. $\qquad (1)$

Thay $x=3$ vào (1), ta được: $4^{2017}=C_{2017}^{0}+3C_{2017}^{1}+3^{2}C_{2017}^{2}+\ldots+3^{2016}C_{2017}^{2016}+3^{2017}C_{2017}^{2017}$. $\qquad (2)$

Thay $x=-3$ vào (1), ta được: $-2^{2017}=C_{2017}^{0}-3C_{2017}^{1}+3^{2}C_{2017}^{2}-\ldots+3^{2016}C_{2017}^{2016}-3^{2017}C_{2017}^{2017}$. $\qquad (3)$

Trừ vế theo vế của (2) và (3), ta được: $2(3S)=4^{2017}+2^{2017}$

$\Longrightarrow 3S=2.4^{2016}+2^{2016}\,\vdots\,2^{2016}\Longrightarrow S\,\vdots\,2^{2016}$. **Chọn A.**

Vấn đề 6. KỸ THUẬT TÍNH TỔNG NHỜ VIẾT NGƯỢC BIỂU THỨC

Câu 18. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $2C_{n}^{0}+5C_{n}^{1}+8C_{n}^{2}+\ldots+(3n+2)C_{n}^{n}=1600$.

A. $n=5$. **B.** $n=7$. **C.** $n=8$. **D.** $n=10$.

Lời giải. Đặt $S=2C_{n}^{0}+5C_{n}^{1}+8C_{n}^{2}+\ldots+(3n+2)C_{n}^{n}$. $\qquad (1)$

Viết ngược lại biểu thức của S, ta được

$$S=(3n+2)C_{n}^{n}+(3n-1)C_{n}^{n-1}+(3n-4)C_{n}^{n-2}+\ldots+2C_{n}^{0}. \qquad (2)$$

Cộng (1) và (2) vế theo vế và kết hợp với công thức $C_{n}^{k}=C_{n}^{n-k}$, ta có

$$2S=(3n+4)C_{n}^{0}+(3n+4)C_{n}^{1}+(3n+4)C_{n}^{2}+\ldots+(3n+4)C_{n}^{n}$$

$$=(3n+4)\left[C_{n}^{0}+C_{n}^{1}+C_{n}^{2}+\ldots+C_{n}^{n}\right]=(3n+4)(1+1)^{n}=(3n+4)2^{n}.$$

Theo giả thiết: $2\times 1600=(3n+4)2^{n}\Longrightarrow n=7$. **Chọn B.**

Câu 19. Cho n là số tự nhiên thỏa mãn $3C_{n}^{0}+4C_{n}^{1}+5C_{n}^{2}+\ldots+(n+3)C_{n}^{n}=8192$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $n\in[1;8)$. **B.** $n\in[8;12)$. **C.** $n\in[12;16)$. **D.** $n\in[16;20]$.

Lời giải. Đặt $S=3C_{n}^{0}+4C_{n}^{1}+5C_{n}^{2}+\ldots+(n+3)C_{n}^{n}$. $\qquad (1)$

Viết ngược lại biểu thức của S, ta được

$$S=(n+3)C_{n}^{n}+(n+2)C_{n}^{n-1}+(n+1)C_{n}^{n-2}+\ldots+3C_{n}^{0}. \qquad (2)$$

Cộng (1) và (2) vế theo vế và kết hợp với công thức $C_n^k = C_n^{n-k}$, ta có

$$2S = (n+6)C_n^0 + (n+6)C_n^1 + (n+6)C_n^2 + \ldots + (n+6)C_n^n$$

$$= (n+6)\left[C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n\right] = (n+6)(1+1)^n = (n+6)2^n.$$

Theo giả thiết: $2 \times 8192 = (n+6)2^n \longrightarrow n = 10$. **Chọn B.**

Câu 20. Tính tổng $S = C_{2018}^3 - 2C_{2018}^4 + 3C_{2018}^5 - 4C_{2018}^6 + \ldots - 2016C_{2018}^{2018}$.

A. $S = -2018$. **B.** $S = -2016$. **C.** $S = 2016$. **D.** $S = 2018$.

Lời giải. Đặt $T = -(-2).C_{2018}^0 + (-1).C_{2018}^1 - 0.C_{2018}^2 = -2016$.

Xét $P = T + S = -(-2).C_{2018}^0 + (-1).C_{2018}^1 - 0.C_{2018}^2 + 1.C_{2018}^3 - \ldots + 2015.C_{2018}^{2017} - 2016.C_{2018}^{2018}$. (1)

Viết ngược lại biểu thức của P, ta được

$$P = -2016.C_{2018}^{2018} + 2015.C_{2018}^{2017} - 2014.C_{2018}^{2016} + 2013.C_{2018}^{2015} - \ldots + (-1).C_{2018}^1 - (-2).C_{2018}^0. \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) vế theo vế và kết hợp với công thức $C_n^k = C_n^{n-k}$, ta có

$$2P = -2014C_{2018}^0 + 2014C_{2018}^1 - 2014C_{2018}^2 + 2014C_{2018}^3 - \ldots + 2014C_{2018}^{2017} - 2014C_{2018}^{2018}$$

$$= -2014\left(C_{2018}^0 - C_{2018}^1 + C_{2018}^2 - C_{2018}^3 + \ldots + C_{2018}^{2018}\right)$$

$$= -2014(1-1)^{2018} = 0$$

Suy ra $P = 0 \longrightarrow T + S = 0 \longrightarrow S = -T = 2016$. **Chọn C.**

Phần 2 – Vận dụng cao

Vấn đề 1. TÍNH TỔNG (BÀI TOÁN BỐC BI)

Câu 1. Tính tổng $S = \left(C_{100}^1\right)^2 + \left(C_{100}^2\right)^2 + \left(C_{100}^3\right)^2 + \ldots + \left(C_{100}^{100}\right)^2$.

A. $S = 2^{200}$. **B.** $S = 2^{200} - 1$. **C.** $S = C_{200}^{100} - 1$. **D.** $S = C_{200}^{100}$.

Lời giải. Xét đa thức: $(1+x)^{100}(x+1)^{100} = (1+x)^{200}$.

Cân bằng hệ số của x^{100} ở hai vế, ta được

$$C_{100}^0.C_{100}^{100} + C_{100}^1.C_{100}^{99} + C_{100}^2.C_{100}^{98} + C_{100}^3.C_{100}^{97} + \ldots + C_{100}^{100}.C_{100}^0 = C_{200}^{100}.$$

hay

$$C_{100}^0.C_{100}^{100} + S = C_{200}^{100}.$$

Suy ra $S = C_{200}^{100} - C_{100}^0.C_{100}^{100} = C_{200}^{100} - 1$. **Chọn C.**

Cách 2. Nhận thấy biểu thức $C_{100}^0.C_{100}^{100} + C_{100}^1.C_{100}^{99} + C_{100}^2.C_{100}^{98} + C_{100}^3.C_{100}^{97} + \ldots + C_{100}^{100}.C_{100}^0$ là số cách lấy tùy ý 100 viên bi từ hộp chứa 100 viên bi xanh và 100 viên bi đỏ (các viên bi cùng màu giống nhau) thì thu được kết quả C_{200}^{100}.

Bài tập tương tự. Tính tổng $S = C_7^0C_{2018}^5 + C_7^1C_{2018}^4 + C_7^2C_{2018}^3 + C_7^3C_{2018}^2 + C_7^4C_{2018}^1 + C_7^5C_{2018}^0$.

A. $S = C_{2018}^5$. B. $S = C_{2025}^5$. C. $S = \left(C_{2018}^5\right)^2$. D. $S = \left(C_{2025}^5\right)^2$.

Lời giải. Tương tự như bài trên, biểu thức cần tính là số cách lấy tùy ý 5 viên bi từ hộp chứa 7 viên bi xanh và 2018 viên bi đỏ (các viên bi cùng màu giống nhau) thì thu được kết quả C_{2025}^5. Chọn B.

Câu 2. Tính tổng $S = \left(C_{2018}^1\right)^2 + 2\left(C_{2018}^2\right)^2 + \ldots + 2018\left(C_{2018}^{2018}\right)^2$.

A. $S = 1009C_{4035}^{2018}$. **B.** $S = 1009C_{4036}^{2017}$. **C.** $S = 1009C_{4036}^{2018}$. **D.** $S = 2018C_{4036}^{2018}$.

Lời giải. Ta có $S = 0.\left(C_{2018}^0\right)^2 + \left(C_{2018}^1\right)^2 + 2\left(C_{2018}^2\right)^2 + \ldots + 2018\left(C_{2018}^{2018}\right)^2$. (1)

Viết ngược lại biểu thức của S, ta được

$$S = 2018\left(C_{2018}^{2018}\right)^2 + 2017\left(C_{2018}^{2017}\right)^2 + 2016\left(C_{2018}^{2026}\right)^2 + \ldots + 0.\left(C_{2018}^0\right)^2. \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) vế theo vế và kết hợp với công thức $C_n^k = C_n^{n-k}$, ta có

$$2S = 2018.\left[\left(C_{2018}^0\right)^2 + \left(C_{2018}^1\right)^2 + \left(C_{2018}^2\right)^2 + \ldots + \left(C_{2018}^{2018}\right)^2\right] = 2018.C_{4036}^{2018}.$$

Vậy $S = 1009C_{4036}^{2018}$. **Chọn C.**

Câu 3. Tính tổng $S = \left(C_{2018}^{1}\right)^2 + \left(2C_{2018}^{2}\right)^2 + \left(3C_{2018}^{3}\right)^2 + \ldots + \left(2018C_{2018}^{2018}\right)^2$.

A. $S = \dfrac{2018^2}{2}.C_{4036}^{2018}$. **B.** $S = \dfrac{2018^2}{2}.\left(C_{4036}^{2018} - 1\right)$.

C. $S = 2018^2.C_{4034}^{2017}$. **D.** $S = 2018^2.\left(C_{4034}^{2017} - 1\right)$.

Lời giải. Áp dụng công thức $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, ta được $\begin{cases} C_{2018}^{1} = 2018C_{2017}^{0} \\ 2C_{2018}^{2} = 2018C_{2017}^{1} \\ 3C_{2018}^{3} = 2018C_{2017}^{2} \\ \vdots \\ 2018C_{2018}^{2018} = 2018C_{2017}^{2017} \end{cases}$.

Suy ra $S = \left(2018.C_{2017}^{0}\right)^2 + \left(2018.C_{2017}^{1}\right)^2 + \left(2018.C_{2017}^{2}\right)^2 + \ldots + \left(2018.C_{2017}^{2017}\right)^2$

$= 2018^2.\left[\left(C_{2017}^{0}\right)^2 + \left(C_{2017}^{1}\right)^2 + \left(C_{2017}^{2}\right)^2 + \ldots + \left(C_{2017}^{2017}\right)^2\right] = 2018^2.C_{4034}^{2017}$. **Chọn C.**

Câu 4. Tính tổng $S = \left(C_{2018}^{0}\right)^2 - \left(C_{2018}^{1}\right)^2 + \left(C_{2018}^{2}\right)^2 - \ldots + \left(C_{2018}^{2018}\right)^2$.

A. $S = C_{4036}^{2018}$. **B.** $S = -C_{4036}^{2018}$. **C.** $S = C_{2018}^{1009}$. **D.** $S = -C_{2018}^{1009}$.

Lời giải. Xét đa thức: $(1-x)^{2018}(1+x)^{2018} = \left(1-x^2\right)^{2018}$.

Cân bằng hệ số của x^{2018} ở hai vế, ta được

$$C_{2018}^{0}.C_{2018}^{2018} - C_{2018}^{1}.C_{2018}^{2017} + C_{2018}^{2}.C_{2018}^{2016} - C_{2018}^{3}.C_{2018}^{2015} + \ldots + C_{2018}^{2018}.C_{2018}^{0} = -C_{2018}^{1009}.$$

Suy ra $S = -C_{2018}^{1009}$. **Chọn D.**

Câu 5. Tìm số tự nhiên n thỏa mãn $C_{2018}^{0}C_n^{2018} + C_{2018}^{1}C_n^{2017} + C_{2018}^{2}C_n^{2016} + \ldots + C_{2018}^{2018}C_n^{0} = \dfrac{1}{2}C_{2n}^{2019}$.

A. $n = 2016$. **B.** $n = 2017$. **C.** $n = 2018$. **D.** $n = 2019$.

Lờigiải. Nhận thấy được vế trái $C_{2018}^{0}C_n^{2018} + C_{2018}^{1}C_n^{2017} + C_{2018}^{2}C_n^{2016} + \ldots + C_{2018}^{2018}C_n^{0}$ có dạng "số cách lấy tùy ý 2018 viên bi từ hộp chứa 2018 viên bi xanh và n viên bi đỏ (các viên bi cùng màu giống nhau) thì thu được kết quả C_{2018+n}^{2018}.

Khi đó, bài toán $\Leftrightarrow C_{n+2018}^{2018} = \dfrac{1}{2}C_{2n}^{2019} \Leftrightarrow \dfrac{(n+2018)!}{2018!.n!} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{(2n)!}{2019!.(2n-2019)!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(n+2018)!}{n!} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{(2n)!}{2019.(2n-2019)!}$

$\Leftrightarrow (n+2018).(n+2017)\ldots(n+1) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{(2n).(2n-1).(2n-2)\ldots.(2n-2018)}{2019}$

$\Leftrightarrow (2.2019)(n+2018).(n+2017)\ldots(n+1) = (2.n).\left[n+(n-1)\right]\left[n+(n-2)\right]\ldots n+(n-2018)$. $\quad (*)$

- $n > 2019 \longrightarrow \text{VT}(*) < \text{VP}(*)$.
- $n < 2019 \longrightarrow \text{VT}(*) > \text{VP}(*)$.
- $n = 2019$ thỏa mãn $(*)$. **Chọn D.**

Vấn đề 2. DŨNG KỸ THUẬT ĐẠO HÀM ĐỂ TÍNH TỔNG

Câu 6. Cho tổng $S = C_{2018}^{1} + 2C_{2018}^{2} + 3C_{2018}^{3} + \ldots + 2018C_{2018}^{2018}$, biết $\ln S = a\ln 2018 + b\ln 2 + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Q}$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2018. **D.** 2019!.

Lời giải. Xét $(1+x)^{2018} = C_{2018}^{0} + C_{2018}^{1}x + C_{2018}^{2}x^2 + \ldots + C_{2018}^{2018}x^{2018}$.

Lấy đạo hàm hai vế ta được: $2018(1+x)^{2017} = C_{2018}^{1} + 2C_{2018}^{2}x + 3C_{2018}^{3}x^2 + \ldots + 2018C_{2018}^{2018}x^{2017}$. $\quad (1)$

Thay $x = 1$ vào (1), ta được: $2018(1+1)^{2017} = C_{2018}^{1} + 2C_{2018}^{2} + 3C_{2018}^{3} + \ldots + 2018C_{2018}^{2018}$

$\longrightarrow S = 2018.2^{2017} \Rightarrow \ln S = \ln 2018 + 2017\ln 2 \longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2017 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 2018.$ **Chọn C.**

Cách 2. (Dành cho hs đang học 11) Áp dụng công thức $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, ta được

$$\begin{cases} C_{2018}^1 = 2018C_{2017}^0 \\ 2C_{2018}^2 = 2018C_{2017}^1 \\ 3C_{2018}^3 = 2018C_{2017}^2 \\ \vdots \\ 2018C_{2018}^{2018} = 2018C_{2017}^{2017} \end{cases}$$

Bài tập tương tự. Tìm $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n = 64n$. ĐS: $n = 7$.

Câu 7. Cho tổng $S = 4C_{100}^2 + 8C_{100}^4 + 12C_{100}^6 + \ldots + 200C_{100}^{100}$, biết $S = a.2^b$ với $a,\ b$ là các số nguyên dương. Tính giá trị biểu thức $P = a + b$.

A. $P = 1$. **B.** $P = 99$. **C.** $P = 199$. **D.** $P = 200$.

Lời giải. Ta có

$$(1+x)^{100} = C_{100}^0 + C_{100}^1 x + C_{100}^2 x^2 + \ldots + C_{100}^{100} x^{100}; \qquad (1)$$

$$(1-x)^{100} = C_{100}^0 - C_{100}^1 x + C_{100}^2 x^2 - C_{100}^3 x^3 + \ldots + C_{100}^{100} x^{100}. \qquad (2)$$

Cộng (1) và (2) vế theo vế, ta được

$$(1+x)^{100} + (1-x)^{100} = 2C_{100}^0 + 2C_{100}^2 x^2 + 2C_{100}^4 x^4 + \ldots + 2C_{100}^{100} x^{100}. \qquad (3)$$

Lấy đạo hàm hai vế của (3) theo ẩn x ta được

$$100(1+x)^{99} - 100(1-x)^{99} = 4C_{100}^2 x + 8C_{100}^4 x^3 + \ldots + 200C_{100}^{100} x^{99}. \qquad (4)$$

Thay $x = 1$ vào (4), ta được $100.2^{99} = 4C_{100}^2 + 8C_{100}^4 + \ldots + 200C_{100}^{100}$ hay $S = 100.2^{99}$

$\longrightarrow \begin{cases} a = 100 \\ b = 99 \end{cases} \Rightarrow a + b = 199.$ **Chọn C.**

Câu 8. Tổng $S = \dfrac{1}{2017}\left(2.3C_{2017}^2 + 3.3^2 C_{2017}^3 + 4.3^3 C_{2017}^4 + \ldots + k.3^{k-1}C_{2017}^k + \ldots + 2017.3^{2016}C_{2017}^{2017}\right)$ bằng:

A. $3^{2016} - 1$. **B.** 3^{2016}. **C.** $4^{2016} - 1$. **D.** 4^{2016}.

Lời giải. Xét $(1+x)^{2017} = C_{2017}^0 + C_{2017}^1 x + C_{2017}^2 x^2 + \ldots + C_{2017}^{2017} x^{2017}$.

Đạo hàm hai vế ta được:

$$2017(1+x)^{2016} = C_{2017}^1 + 2C_{2017}^2 x + 3C_{2017}^3 x^2 + \ldots + kC_{2017}^k x^{k-1} + \ldots + 2017C_{2017}^{2017} x^{2016}.$$

Thay $x = 3$ vào biểu thức trên ta được:

$$2017.(1+3)^{2016} = C_{2017}^1 + 2.3C_{2017}^2 + 3.3^2 C_{2017}^3 + 4.3^3 C_{2017}^4 + \ldots + k.3^{k-1}C_{2017}^k + \ldots + 2017.3^{2016}C_{2017}^{2017}$$

$$\Leftrightarrow 2017.4^{2016} - C_{2017}^1 = 2.3C_{2017}^2 + 3.3^2 C_{2017}^3 + 4.3^3 C_{2017}^4 + \ldots + k.3^{k-1}C_{2017}^k + \ldots + 2017.3^{2016}C_{2017}^{2017}$$

$$\Leftrightarrow 2017.\left(4^{2016} - 1\right) = 2.3C_{2017}^2 + 3.3^2 C_{2017}^3 + 4.3^3 C_{2017}^4 + \ldots + k.3^{k-1}C_{2017}^k + \ldots + 2017.3^{2016}C_{2017}^{2017}.$$

Suy ra $S = 4^{2016} - 1$. **Chọn C.**

Câu 9. Tính tổng $S = C_{2018}^0 C_{2018}^{2017} + C_{2018}^1 C_{2017}^{2016} + \ldots + C_{2018}^k C_{2018-k}^{2017-k} + \ldots + C_{2018}^{2017} C_1^0$.

A. $S = 1009.2^{2017}$. **B.** $S = 2018.2^{2017}$. **C.** $S = 2018.2^{2018}$. **D.** $S = 2018.2^{2019}$.

Lời giải. Ta có $S = C_{2018}^0 C_{2018}^{2017} + C_{2018}^1 C_{2017}^{2016} + C_{2018}^2 C_{2016}^{2015} + \ldots + C_{2018}^k C_{2018-k}^{2017-k} + \ldots + C_{2018}^{2017} C_1^0$

$= C_{2018}^{2018} C_{2018}^1 + C_{2018}^{2017} C_{2017}^1 + C_{2018}^{2016} C_{2016}^1 + \ldots$

$= 2018.C_{2018}^{2018} + 2017.C_{2018}^{2017} + 2016.C_{2018}^{2016} + \ldots + 1.C_{2018}^1 = \left[(1+x)^{2018}\right]'\Big|_{x=1} = 2018.2^{2017}.$ **Chọn B.**

Câu 10. Cho tổng

$$S = 2.1.C_{2018}^2 + 3.2.C_{2018}^3 + \ldots + 2018.2017.C_{2018}^{2018},$$

biết $\ln S = a\ln 2 + b\ln 2018 + c\ln 2017$ với $a,\ b,\ c$ là các số nguyên. Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. 2. **B.** 2011. **C.** 2018. **D.** 2019.

Lời giải. Xét $(1+x)^{2018}=C_{2018}^0+C_{2018}^1x+C_{2018}^2x^2+\ldots+C_{2018}^{2018}x^{2018}.$

Đạo hàm hai vế ta được:

$$2018(1+x)^{2017}=C_{2018}^1+2C_{2018}^2x+3C_{2018}^3x^2+\ldots+2018C_{2018}^{2018}x^{2017}.$$

Tiếp tục đạo hàm hai vế lần nữa, ta được

$$2018.2017.(1+x)^{2016}=2.1.C_{2018}^2+3.2.C_{2018}^3x+\ldots+2018.2017.C_{2018}^{2018}x^{2016}.$$

Thay $x=1$ vào biểu thức trên, ta được: $2018.2017.2^{2016}=S$

$$\longrightarrow \ln S=2016\ln 2+\ln 2018+\ln 2017 \longrightarrow \Rightarrow \begin{cases} a=2016\\ b=1\\ c=1\end{cases} \Rightarrow a+b+c=2018.$$ **Chọn C.**

Câu 11. Cho số nguyên dương n thỏa mãn $2C_n^1+3C_n^2+4C_n^3+\ldots+(n+1)C_n^n=111.$ Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $n\in(1;4).$ **B.** $n\in[4;7).$ **C.** $n\in[7;10).$ **D.** $n\in[10;18].$

Lời giải. Xét $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n.$ (1)

Nhân hai vế của (1) cho x ta được: $(1+x)^n x=C_n^0x+C_n^1x^2+C_n^2x^3+\ldots+C_n^nx^{n+1}.$ (2)

Lấy đạo hàm hai vế của (2) theo ẩn x ta được

$$n(1+x)^{n-1}x+(1+x)^n=C_n^0+2C_n^1x+3C_n^2x^2+\ldots+(n+1)C_n^nx^n. \quad (3)$$

Thay $x=1$ vào (3), ta được

$$n.2^{n-1}+2^n=1+2C_n^1+3C_n^2+\ldots+(n+1)C_n^n$$

$$\Leftrightarrow n.2^{n-1}+2^n=1+111.$$

- Nếu $n>5 \longrightarrow n.2^{n-1}+2^n>5.2^4+2^5=112:$ vô lí.
- Nếu $n<5 \longrightarrow n.2^{n-1}+2^n<5.2^4+2^5=112:$ vô lí.
- Kiểm tra $n=5$ thỏa mãn. **Chọn B.**

Bài tập tương tự. Chứng minh $C_{2018}^0+2C_{2018}^1+3C_{2018}^2+\ldots+2019C_{2018}^{2018}=505.2^{2019}.$

Hướng dẫn. Xét $(1+x)^{2018}\xrightarrow{\text{Nhan } x} x(1+x)^{2018}\xrightarrow{\text{Dao ham}}(1+x)^{2018}+2018x(1+x)^{2017}\xrightarrow{\text{Cho } x=1}$

Bài tập tương tự. Chứng minh $C_{2n}^0-2C_{2n}^1+3C_{2n}^2-4C_{2n}^3+\ldots+(2n+1)C_{2n}^{2n}=0.$

Hướng dẫn. Xét $(1-x)^{2n}\xrightarrow{\text{Nhan } x} x(1-x)^{2n}\xrightarrow{\text{Dao ham}}(1-x)^{2n}-2n.x(1-x)^{2n-1}\xrightarrow{\text{Cho } x=1}$

Bài tập tương tự. Chứng minh $3C_{2019}^0+4C_{2019}^1+5C_{2019}^2+\ldots+2022C_{2019}^{2019}=2025.2^{2018}.$

Hướng dẫn. Xét $(1+x)^{2019}\xrightarrow{\text{Nhan } x^3} x^3(1+x)^{2019}\xrightarrow{\text{Dao ham}}\ldots\xrightarrow{\text{Cho } x=1}$

Câu 12. Tính tổng $S=C_{2018}^3-2C_{2018}^4+3C_{2018}^5-4C_{2018}^6+\ldots-2016C_{2018}^{2018}.$

A. $S=2016.$ **B.** $S=2017.$ **C.** $S=2018.$ **D.** $S=2019.$

Lời giải. Xét $(1+x)^{2018}=C_{2018}^0+C_{2018}^1x+C_{2018}^2x^2+\ldots+C_{2018}^{2018}x^{2018}.$

Chia hai vế cho x^2 ta được $\dfrac{(1+x)^{2018}}{x^2}=\dfrac{C_{2018}^0}{x^2}+\dfrac{C_{2018}^1}{x}+C_{2018}^2+C_{2018}^3x+\ldots+C_{2018}^{2018}x^{2016}.$

Lấy đạo hàm hai vế ta được

$$\frac{(2016x-2)(1+x)^{2017}}{x^3}=-\frac{2C_{2018}^0}{x^3}-\frac{C_{2018}^1}{x^2}+C_{2018}^3+2C_{2018}^4x+\ldots+2016C_{2018}^{2018}x^{2015}.$$

Thay $x=-1$ vào biểu thức trên ta được $0=2C_{2018}^0-C_{2018}^1+S\longrightarrow S=2016.$ **Chọn A.**

Câu 13. Tính tổng $S=2.C_n^1+2^2.2.C_n^2+2^3.3.C_n^3+\ldots+2^n.n.C_n^n.$

A. $S=2n.3^{n-1}.$ **B.** $S=2n.3^{n+1}.$ **C.** $S=3n.2^{n-1}.$ **D.** $S=3n.2^{n+1}.$

Lời giải. Xét $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n.$

Đạo hàm hai vế ta được: $n(1+x)^{n-1}=C_n^1+2C_n^2x+3C_n^3x^2+\ldots+nC_n^nx^{n-1}.$

Nhân x vào hai vế ta được: $nx(1+x)^{n-1} = C_n^1 x + 2C_n^2 x^2 + 3C_n^3 x^3 + \ldots + nC_n^n x^n$.

Thay $x = 2$ vào biểu thức trên ta được: $S = 2n.3^{n-1}$. **Chọn A.**

Câu 14. Cho tổng $S = 1^2 C_{2018}^1 x + 2^2 C_{2018}^2 + 3^2 C_{2018}^3 + \ldots + 2018^2 C_{2018}^{2018}$, biết $S = a.2^b$ với a, b là các số nguyên và đều không chia hết cho 2. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 4076358. **B.** 2039188. **C.** 4079198. **D.** 2009197.

Lời giải. Xét $(1+x)^{2018} = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 x + C_{2018}^2 x^2 + \ldots + C_{2018}^{2018} x^{2018}$.

Đạo hàm hai vế ta được: $2018(1+x)^{2017} = C_{2018}^1 + 2C_{2018}^2 x + 3C_{2018}^3 x^2 + \ldots + 2018 C_{2018}^{2018} x^{2017}$.

Nhận hai vế cho x ta được: $2018x(1+x)^{2017} = C_{2018}^1 x + 2C_{2018}^2 x^2 + 3C_{2018}^3 x^3 + \ldots + 2018 C_{2018}^{2018} x^{2018}$.

Tiếp tục đạo hàm hai vế ta được:

$$2018.(2018x+1).(1+x)^{2016} = 1^2 C_{2018}^1 x + 2^2 C_{2018}^2 x + 3^2 C_{2018}^3 x^2 + \ldots + 2018^2 C_{2018}^{2018} x^{2017}.$$

Thay $x = 1$ vào biểu thức trên, ta được: $2018.2019.(1+1)^{2016} = S$ hay $S = 1009.2019.2^{2017}$

$\longrightarrow \begin{cases} a = 1009.2019 \\ b = 2017 \end{cases} \longrightarrow a + b = 2039188$. **Chọn B.**

Bài tập tương tự: Chứng minh

$$C_{2012}^1 C_{2010}^1 + \left(1^2 C_{2012}^1 2^{2011} - 2^2 C_{2012}^2 2^{2010} + \ldots + (-1)^{k-1} k^2 C_{2012}^k 2^{2012-k} + \ldots - 2012^2 C_{2012}^{2012}\right) = 0.$$

Hướng dẫn: Xét $(2-x)^{2012} \xrightarrow{\text{Đạo hàm}} \ldots \xrightarrow{\text{Nhân } x} \ldots \xrightarrow{\text{Đạo hàm}} \ldots \xrightarrow{\text{Cho } x=1}$

Bài tập tương tự: Chứng minh $1^2.C_n^1.2 + 2^2.C_n^2.2^2 + 3^2.C_n^3.2^3 + \ldots + n^2.C_n^n.2^n = 2n(2n+1).3^{n-2}$.

Hướng dẫn: Xét $(1+x)^n \xrightarrow{\text{Đạo hàm}} \ldots \xrightarrow{\text{Nhân } x} \ldots \xrightarrow{\text{Đạo hàm}} \ldots \xrightarrow{\text{Cho } x=1}$

Câu 15. Tính tổng $S = 100C_{100}^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{99} + 101C_{100}^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{100} + 102C_{100}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{101} + \ldots + 200C_{100}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^{199}$.

A. $S = 100.\left(\frac{3}{4}\right)^{99}$. **B.** $S = 200.\left(\frac{3}{4}\right)^{99}$. **C.** $S = 100.\left(\frac{3}{4}\right)^{100}$. **D.** $S = 200.\left(\frac{3}{4}\right)^{100}$.

Lời giải. Xét $(1+x)^{100} \xrightarrow{\text{Nhân } x^{100}} x^{100}(1+x)^{100} \xrightarrow{\text{Đạo hàm}} \ldots \xrightarrow{\text{Cho } x=\frac{1}{2}} 200.\left(\frac{3}{4}\right)^{99}$. **Chọn B.**

Vấn đề 3. DÙNG KỸ THUẬT LẤY TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH TỔNG

Câu 16. Cho tổng $S = \frac{1}{1}C_{2018}^0 + \frac{1}{2}C_{2018}^1 + \frac{1}{3}C_{2018}^2 + \ldots + \frac{1}{2019}C_{2018}^{2018}$, biết $S = \frac{2^a - b}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và đều không chia hết cho 2; phân số $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $P = a + b + c$.

A. $P = 4034$. **B.** $P = 4037$. **C.** $P = 4038$. **D.** $P = 4039$.

Lời giải. Xét $(1+x)^{2018} = C_{2018}^0 + C_{2018}^1 x + C_{2018}^2 x^2 + \ldots + C_{2018}^{2018} x^{2018}$. (1)

Lấy tích phân hai vế của (1) với cận từ 0 đến 1 ta được

$$\int_0^1 (1+x)^{2018}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(C_{2018}^0 + C_{2018}^1 x + C_{2018}^2 x^2 + \ldots + C_{2018}^{2018} x^{2018}\right)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{(1+x)^{2019}}{2019}\right|_0^1 = \left.\left(C_n^0 x + \frac{1}{2}C_n^1 x^2 + \frac{1}{3}C_n^2 x^3 + \ldots + \frac{1}{2019}C_n^n x^{2019}\right)\right|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{2019} - 1}{2019} = C_{2018}^0 + \frac{1}{2}C_{2018}^1 + \frac{1}{3}C_{2018}^2 + \ldots + \frac{1}{2019}C_{2018}^{2018}.$$

Vậy $S = \frac{2^{2019} - 1}{2019} \longrightarrow \begin{cases} a = 2019 \\ b = 1 \\ c = 2019 \end{cases} \Rightarrow P = a + b + c = 4039$. **Chọn D.**

Câu 2. Áp dụng công thức $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1} \longrightarrow \dfrac{C_{n-1}^{k-1}}{k} = \dfrac{C_n^k}{n}$, ta được $\begin{cases} \dfrac{1}{1}C_{2018}^0 = \dfrac{1}{2019}C_{2019}^1 \\ \dfrac{1}{2}C_{2018}^1 = \dfrac{1}{2019}C_{2019}^2 \\ \vdots \\ \dfrac{1}{2019}C_{2018}^{2018} = \dfrac{1}{2019}C_{2019}^{2019} \end{cases}$.

Suy ra $S = \dfrac{1}{1}C_{2018}^0 + \dfrac{1}{2}C_{2018}^1 + \dfrac{1}{3}C_{2018}^2 + \ldots + \dfrac{1}{2019}C_{2018}^{2018} = \dfrac{1}{2019}\left(C_{2019}^1 + C_{2019}^2 + C_{2019}^3 + \ldots + C_{2019}^{2019}\right)$

$= \dfrac{1}{2019}\left(C_{2019}^0 + C_{2019}^1 + C_{2019}^2 + C_{2019}^3 + \ldots + C_{2019}^{2019}\right) - \dfrac{C_{2019}^0}{2019} = \dfrac{1}{2019}(1+1)^{2019} - \dfrac{C_{2019}^0}{2019} = \dfrac{2^{2019}-1}{2019}$.

Bài tập tương tự. Chứng minh $2C_{2018}^0 + \dfrac{2^2}{2}C_{2018}^1 + \dfrac{2^3}{3}C_{2018}^2 + \ldots + \dfrac{2^{2019}}{2019}C_{2018}^{2018} = \dfrac{3^{2019}-1}{2019}$.

Hướng dẫn. Xét $(1+x)^{2018} \xrightarrow{\text{tích phân}} \int_0^2 (1+x)^{2018}\,\mathrm{d}x$.

Câu 17. Tính tổng $S = \dfrac{2^0}{1}C_{2018}^0 - \dfrac{2^1}{2}C_{2018}^1 + \dfrac{2^2}{3}C_{2018}^2 - \dfrac{2^3}{4}C_{2018}^3 + \ldots + \dfrac{2^{2018}}{2019}C_{2018}^{2018}$.

A. $S = 2018$. **B.** $S = 2019$. **C.** $S = \dfrac{1}{2018}$. **D.** $S = \dfrac{1}{2019}$.

Lời giải. Áp dụng công thức $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1} \longrightarrow \dfrac{C_{n-1}^{k-1}}{k} = \dfrac{C_n^k}{n}$, ta được

$$\begin{aligned} S &= \frac{C_{2018}^0}{1} - 2.\frac{C_{2018}^1}{2} + 2^2.\frac{C_{2018}^2}{3} - 2^3.\frac{C_{2018}^3}{4} + \ldots + 2^{2018}.\frac{C_{2018}^{2018}}{2019} \\ &= \frac{1}{2.2019}.\left(2C_{2019}^1 - 2^2.C_{2019}^2 + 2^3.C_{2019}^3 - \ldots + 2^{2019}.C_{2019}^{2019}\right) \\ &= \frac{1}{2.2019}.\left[C_{2019}^0 - \left(C_{2019}^0 - 2C_{2019}^1 + 2^2.C_{2019}^2 - 2^3.C_{2019}^3 + \ldots - 2^{2019}.C_{2019}^{2019}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2.2019}.\left[C_{2019}^0 - (1-2)^{2019}\right] = \frac{1}{2019}. \end{aligned}$$ **Chọn D.**

Cách 2. Xét khai triển $(1-x)^{2018} = C_{2018}^0 - C_{2018}^1x + C_{2018}^2x^2 - C_{2018}^3x^3 + \ldots + C_{2018}^{2018}x^{2018}$.

Lấy tích phân hai vế, cận từ 0 đến 2 ta được

$$\int_0^2 (1-x)^{2018}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \left(C_{2018}^0 - C_{2018}^1x + C_{2018}^2x^2 - C_{2018}^3x^3 + \ldots + C_{2018}^{2018}x^{2018}\right)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{(x-1)^{2019}}{2019}\right|_0^2 = \left.\left(xC_{2018}^0 - \frac{x^2}{2}C_{2018}^1 + \frac{x^3}{3}C_{2018}^2 - \frac{x^4}{4}C_{2018}^3 + \ldots + \frac{x^{2019}}{2019}C_{2018}^{2018}\right)\right|_0^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{2019} = 2\left(C_{2018}^0 - \frac{2}{2}C_{2018}^1 + \frac{2^2}{3}C_{2018}^2 - \frac{2^3}{4}C_{2018}^3 + \ldots + \frac{2^{2018}}{2019}C_{2018}^{2018}\right)$$

Suy ra $S = \dfrac{2^0}{1}C_{2018}^0 - \dfrac{2^1}{2}C_{2018}^1 + \dfrac{2^2}{3}C_{2018}^2 - \dfrac{2^3}{4}C_{2018}^3 + \ldots + \dfrac{2^{2018}}{2019}C_{2018}^{2018} = \dfrac{1}{2019}$.

Câu 18. Cho tổng $S = \dfrac{1}{2}C_{2018}^0 + \dfrac{1}{4}C_{2018}^1 + \dfrac{1}{6}C_{2018}^2 + \dfrac{1}{8}C_{2018}^3 \ldots + \dfrac{1}{2.2018+2}C_{2018}^{2018}$, biết $S = \dfrac{2^a - b}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương, phân số $\dfrac{b}{c}$ tối giản. Tính $P = a + b + c$.

A. $P = 4037$. **B.** $P = 4039$. **C.** $P = 6454$. **D.** $P = 6458$.

Lời giải. Ta viết lại $S = \dfrac{1}{2}\left(C_{2018}^0 + \dfrac{1}{2}C_{2018}^1 + \dfrac{1}{3}C_{2018}^2 + \dfrac{1}{4}C_{2018}^3 \ldots + \dfrac{1}{2018+1}C_{2018}^{2018}\right)$

Xét $(1+x)^{2018} \xrightarrow{\text{tích phân}} \int_0^1 (1+x)^{2018}\,\mathrm{d}x = \dfrac{2^{2019}-1}{2019}$.

Suy ra $S = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2^{2019}-1}{2019} = \dfrac{2^{2019}-1}{4038} \longrightarrow \begin{cases} a = 2019 \\ b = 1 \\ c = 4038 \end{cases} \Rightarrow P = a+b+c = 6058$. **Chọn D.**

Câu 19. Tổng $S = \dfrac{C_{2018}^0}{3} - \dfrac{C_{2018}^1}{4} + \dfrac{C_{2018}^2}{5} - \dfrac{C_{2018}^3}{6} + \ldots - \dfrac{C_{2018}^{2017}}{2020} + \dfrac{C_{2018}^{2018}}{2021}$ bằng

A. $\dfrac{1}{4121202989}$. **B.** $\dfrac{1}{4121202990}$. **C.** $\dfrac{1}{4121202991}$. **D.** $\dfrac{1}{4121202992}$.

Lời giải. Xét $(1-x)^{2018} \xrightarrow{\text{Nhân } x^2} x^2(1-x)^{2018} \xrightarrow{\text{tích phân}} \int_0^1 x^2(1-x)^{2018}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4121202990}$. **Chọn B.**

Câu 20. Cho n là số tự nhiên thỏa mãn $\dfrac{C_n^0}{1.2} + \dfrac{C_n^1}{2.3} + \dfrac{C_n^2}{3.4} + \ldots + \dfrac{C_n^n}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{2^{100}-n-3}{(n+1)(n+2)}$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $n \in [1;49]$. **B.** $n \in [50;99]$. **C.** $n \in [100;149]$. **D.** $n \in [150;200]$.

Lời giải. Áp dụng công thức $(k+1)C_{n+1}^{k+1} = (n+1)C_n^k$ hai lần ta được

$$\frac{C_n^k}{(k+1)(k+2)} = \frac{C_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

Do đó $S = \dfrac{C_n^0}{1.2} + \dfrac{C_n^1}{2.3} + \dfrac{C_n^2}{3.4} + \ldots + \dfrac{C_n^n}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}.\left(C_{n+2}^2 + C_{n+2}^3 + \ldots + C_{n+2}^{n+2}\right)$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)}.\left[\left(C_{n+2}^0 + C_{n+2}^1 + C_{n+2}^2 + C_{n+2}^3 + \ldots + C_{n+2}^{n+2}\right) - \left(C_{n+2}^0 + C_{n+2}^1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)}.\left[(1+1)^{n+2} - (1+n+2)\right] = \frac{2^{n+2}-n-3}{(n+1)(n+2)} \longrightarrow n = 98.$$ **Chọn B.**

Cách 2. Ta có $\dfrac{C_n^0}{1.2} + \dfrac{C_n^1}{2.3} + \ldots + \dfrac{C_n^n}{(n+1)(n+2)} = \underbrace{\left(\dfrac{C_n^0}{1} + \dfrac{C_n^1}{2} + \ldots + \dfrac{C_n^n}{n+1}\right)}_{A} - \underbrace{\left(\dfrac{C_n^0}{2} + \dfrac{C_n^1}{3} + \ldots + \dfrac{C_n^n}{n+2}\right)}_{B}$

- $\int_0^1 (1+x)^n\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(C_n^0 + C_n^1 x + \ldots C_n^n x^n\right)\mathrm{d}x \longrightarrow A = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$.
- $\int_0^1 x(1+x)^n\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\left(C_n^0 + C_n^1 x + \ldots C_n^n x^n\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int_0^1 (1+x)^{n+1}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 (1+x)^n\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(C_n^0 x + C_n^1 x^2 + \ldots C_n^n x^{n+1}\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \left.\left(\dfrac{(1+x)^{n+2}}{n+2} - \dfrac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right)\right|_0^1 = \left.\left(\dfrac{C_n^0 x^2}{2} + \dfrac{C_n^1 x^3}{3} + \ldots + \dfrac{C_n^n x^{n+2}}{n+2}\right)\right|_0^1 \longrightarrow B = \dfrac{n2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$.

Câu 21. Biết rằng $\dfrac{2^0 C_{2018}^0}{1.2} - \dfrac{2^1 C_{2018}^1}{2.3} + \dfrac{2^2 C_{2018}^2}{3.4} - \dfrac{2^3 C_{2018}^3}{4.5} + \ldots + \dfrac{2^{2018} C_{2018}^{2018}}{2019.2020} = \dfrac{a}{b}$ với $a,\ b$ là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Hiệu $a-b$ bằng

A. -4039. **B.** -4037. **C.** 4037. **D.** 4039.

Lời giải. Áp dụng công thức $(k+1)C_{n+1}^{k+1} = (n+1)C_n^k$ hai lần ta được

$$\frac{C_n^k}{(k+1)(k+2)} = \frac{C_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

Do đó $S = \dfrac{2^0 C_{2018}^0}{1.2} - \dfrac{2^1 C_{2018}^1}{2.3} + \dfrac{2^2 C_{2018}^2}{3.4} - \dfrac{2^3 C_{2018}^3}{4.5} + \ldots + \dfrac{2^{2018} C_{2018}^{2018}}{2019.2020}$

$$= \frac{1}{2019.2020}\left(2^0C_{2020}^2 - 2^1C_{2020}^3 + 2^2C_{2020}^4 - 2^3C_{2020}^5 + \ldots + 2^{2018}C_{2020}^{2020}\right).$$

Xét $(1-x)^{2020} = C_{2020}^0 - C_{2020}^1x + C_{2020}^2x^2 - C_{2020}^3x^3 + C_{2020}^4x^4 - \ldots + C_{2020}^{2020}x^{2020}$.

Chia hai vế cho x^2 ta được $\frac{(1-x)^{2020}}{x^2} = \frac{C_{2020}^0}{x^2} - \frac{C_{2020}^1}{x} + C_{2020}^2 - C_{2020}^3x + C_{2020}^4x^2 - \ldots + C_{2020}^{2020}x^{2018}$.

Cho $x = 2$ ta được $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{2020}{2} + C_{2020}^2 - 2C_{2020}^3 + 2^2C_{2020}^4 - \ldots + 2^{2018}C_{2020}^{2020}$.

Suy ra $C_{2020}^2 - 2C_{2020}^3 + 2^2C_{2020}^4 - \ldots + 2^{2018}C_{2020}^{2020} = 1010 \longrightarrow S = \frac{1}{4038}$

$\longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4038 \end{cases} \Rightarrow a - b = -4037$. **Chọn B.**

Câu 22. Biết $\frac{1}{2}C_{2018}^1 + \frac{1}{4}C_{2018}^3 + \ldots + \frac{1}{2018}C_{2018}^{2017} = \frac{2^a - b}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và phân số $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $P = a + b + c$.

A. $P = 4034$. **B.** $P = 4037$. **C.** $P = 4038$. **D.** $P = 4039$.

Lời giải. Xét $\begin{cases} (1+x)^{2018} \\ (1-x)^{2018} \end{cases} \longrightarrow \frac{(1+x)^{2018} + (1-x)^{2018}}{2} \xrightarrow{\text{Tích phân}} \int_0^1 \frac{(1+x)^{2018} - (1-x)^{2018}}{2}\,dx$.

Vậy $\frac{1}{2}C_{2018}^1 + \frac{1}{4}C_{2018}^3 + \ldots + \frac{1}{2018}C_{2018}^{2017} = \frac{2^{2018} - 1}{2019} \longrightarrow \begin{cases} a = 2018 \\ b = 1 \\ c = 2019 \end{cases} \Rightarrow P = a + b + c = 4038$. **Chọn C.**

Câu 23. Biết rằng $\frac{1}{2}C_{2018}^0 + \frac{1}{4}C_{2018}^2 + \frac{1}{6}C_{2018}^4 + \ldots + \frac{1}{2020}C_{2018}^{2018} = \frac{a.2^b + 1}{b(b+1)}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Hiệu $b - a$ bằng

A. 1008. **B.** 1009. **C.** 1010. **D.** 2010.

Lời giải. Xét $\begin{cases} (1+x)^{2018} \\ (1-x)^{2018} \end{cases} \longrightarrow \frac{(1+x)^{2018} + (1-x)^{2018}}{2} \xrightarrow{\text{Nhân } x} \frac{x(1+x)^{2018} + x(1-x)^{2018}}{2}$

$\xrightarrow{\text{Tích phân}} \int_0^1 \frac{x(1+x)^{2018} + x(1-x)^{2018}}{2}\,dx = \frac{1009.2^{2019} + 1}{2019.2020}$.

Suy ra $\begin{cases} a = 1009 \\ b = 2019 \end{cases} \Rightarrow b - a = 1010$. **Chọn C.**

Câu 24. Biết $\frac{1}{2}C_{2018}^1.2^2 + \frac{2}{3}C_{2018}^2.2^3 + \frac{3}{4}C_{2018}^3 2^4 + \ldots + \frac{2018}{2019}C_{2018}^{2018}2^{2019} = \frac{a}{b}.3^{2018} + \frac{1}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và $(a;b) = 1$. Tổng $a + b + c$ bằng

A. 3364. **B.** 4036. **C.** 4037. **D.** 8037.

Lời giải. Ta thực hiện theo sơ đồ sau

$$(1+x)^{2018} \xrightarrow{\text{đạo hàm}} 2018(1+x)^{2017} \xrightarrow{\text{nhân } x} 2018x(1+x)^{2017} \xrightarrow{\text{tích phân}} \int_0^2 2018x(1+x)^{2017}\,dx.$$

Khi đó $\frac{1}{2}C_{2018}^1.2^2 + \frac{2}{3}C_{2018}^2.2^3 + \frac{3}{4}C_{2018}^3 2^4 + \ldots + \frac{2018}{2019}C_{2018}^{2018}2^{2019} = \frac{1345}{673}.3^{2018} + \frac{1}{2019}$

$\longrightarrow \begin{cases} a = 1345 \\ b = 673 \\ c = 2019 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 4037$. **Chọn C.**

Câu 25. Cho tổng $S_n = \frac{1}{2}.2^2C_n^1 + \frac{2}{3}.2^3C_n^2 + ... + \frac{n}{n+1}.2^{n+1}C_n^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất thỏa mãn $S_n > 5^{200} + \frac{1}{n+1}$.

A. $n = 200$. **B.** $n = 201$. **C.** $n = 292$. **D.** $n = 293$.

Lời giải. Xét $(1+x)^n \xrightarrow{\text{dao ham}} n(1+x)^{n-1} \xrightarrow{\text{nhan x}} nx(1+x)^{n-1} \xrightarrow{\text{tich phan}} \int_0^2 nx(1+x)^{n-1}dx$.

Khi đó ta được $S = 3^n.\left(\frac{2n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1}$.

Theo đề bài, ta cần có $3^n.\left(\frac{2n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1} > 5^{200} + \frac{1}{n+1} \to 3^n.\left(\frac{2n-1}{n+1}\right) > 5^{200}$

$\longrightarrow n\log_5 3 + \log_5 \frac{2n-1}{n+1} > 200 \Leftrightarrow n\log_5 3 > 200 - \log_5 \frac{2n-1}{n+1} > 200 - \log_5 2$

$\longrightarrow n > \frac{200 - \log_5 2}{\log_5 3} \approx 292{,}36 \longrightarrow n \geq 293$. **Chọn D.**

Vấn đề 4. KỸ THUẬT BIẾN ĐỔI

Câu 26. Cho $S = C_{2018}^1 + \frac{2.C_{2018}^2}{C_{2018}^1} + \frac{3.C_{2018}^3}{C_{2018}^1} + ... + \frac{2018.C_{2018}^{2018}}{C_{2018}^{2017}}$, biết $\ln(2S) = a\ln 2018 + b\ln 2019 + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 2018. **D.** 2019.

Lời giải. Ta có

$$\frac{kC_n^k}{C_n^{k-1}} = k.\frac{\frac{n!}{(n-k)!k!}}{\frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!}} = k.\frac{(n-k+1)!(k-1)!}{(n-k)!k!} = k.\frac{(n-k+1)}{k} = n-k+1.$$

Do đó $S = (2018-1+1) + (2018-2+1) + (2018-3+1) ... + (2018-2018+1)$

$$= 2018.2018 - (1+2+3+...+2018) + \left(\underbrace{1+1+1+...+1}_{2018\text{ so}}\right)$$

$$= 2018^2 - \frac{1+2018}{2}.2018 + 2018 = \frac{2018 \times 2019}{2}.$$

Suy ra $\ln(2S) = \ln 2018 + \ln 2019 \longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases} \longrightarrow a + b + c = 2$. **Chọn B.**

Câu 27. Biết rằng $\frac{1}{2018}\left(C_{2018}^1\right)^2 + \frac{2}{2017}\left(C_{2018}^2\right)^2 + ... + \frac{2017}{2}\left(C_{2018}^{2017}\right)^2 + \frac{2018}{1}\left(C_{2018}^{2018}\right)^2 = \frac{a}{b}.C_{2a}^a$ với a, b là những số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $a + b \in (0;2018)$. **B.** $a + b \in [2018;4036]$. **C.** $a + b \in (4036;6054)$. **D.** $a - b = 1$.

Lời giải. Viết thu gọn $S = \sum_{k=1}^{2018} \frac{k}{2019-k}\left(C_{2018}^k\right)^2$.

Ta có $\frac{k}{2019-k}.C_{2018}^k = \frac{k}{2019-k}.\frac{2018!}{k!(2018-k)!} = \frac{2018!}{(k-1)!.\left[2018-(k-1)\right]!} = C_{2018}^{k-1}$.

Do đó $S = \sum_{k=1}^{2018} C_{2018}^{k-1}.C_{2018}^k = C_{2018}^0.C_{2018}^1 + C_{2018}^1.C_{2018}^2 + ... + C_{2018}^{2017}.C_{2018}^{2018}$

$$= C_{2018}^{0}.C_{2018}^{2017} + C_{2018}^{1}.C_{2018}^{2016} + \ldots + C_{2018}^{2017}.C_{2018}^{0} = C_{4036}^{2017} = \frac{2018}{2019}C_{4036}^{2018}.$$

Suy ra $\begin{cases} a = 2018 \\ b = 2019 \end{cases} \longrightarrow a + b = 4037$. **Chọn C.**

Câu 28. Cho $S_1 = C_{2018}^{1009} + C_{2017}^{1009} + C_{2016}^{1009} + \ldots + C_{1010}^{1009} + C_{1009}^{1009}$ và $S_2 = C_{2016}^{1010} + 3C_{2016}^{1009} + 3C_{2016}^{1008} + C_{2016}^{1007}$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $S_1 = S_2$. **B.** $S_1 = 2019S_2$. **C.** $S_1 = 2018S_2$. **D.** $S_1 < S_2$.

Lời giải. Ta có $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k \longrightarrow C_{n-1}^{k-1} = C_n^k - C_{n-1}^{k}$.

Suy ra $\begin{cases} C_{2018}^{1009} = C_{2019}^{1010} - C_{2018}^{1010} \\ C_{2017}^{1009} = C_{2018}^{1010} - C_{2017}^{1010} \\ \ldots \\ C_{1011}^{1009} = C_{1012}^{1010} - C_{1011}^{1010} \\ C_{1010}^{1009} = C_{101}^{1010} - C_{1010}^{1010} \\ C_{1009}^{1009} = C_{1010}^{1010} \end{cases} \longrightarrow S_1 = C_{2018}^{1009} + C_{2017}^{1009} + C_{2016}^{1009} + \ldots + C_{1010}^{1009} + C_{1009}^{1009} = C_{2019}^{1010}$.

Ta có $S_2 = C_{2016}^{1010} + 3C_{2016}^{1009} + 3C_{2016}^{1008} + C_{2016}^{1007} = \left(C_{2016}^{1010} + C_{2016}^{1009}\right) + 2\left(C_{2016}^{1009} + C_{2016}^{1008}\right) + \left(C_{2016}^{1008} + C_{2016}^{1007}\right)$

$$= C_{2017}^{1010} + 2C_{2017}^{1009} + C_{2017}^{1008} = \left(C_{2017}^{1010} + C_{2017}^{1009}\right) + \left(C_{2017}^{1009} + C_{2017}^{1008}\right) = C_{2018}^{1010} + C_{2018}^{1009} = C_{2019}^{1010}.$$

Vậy ta có $S_1 = S_2$. **Chọn A.**

Câu 29. Tính tổng $S = \sum_{k=0}^{2000} C_{2018+k}^{k}$.

A. $S = C_{4018}^{2018}$. **B.** $S = C_{4019}^{2018}$. **C.** $S = C_{4018}^{2019}$. **D.** $S = C_{4019}^{2019}$.

Lời giải. Ta có $S = \sum_{k=0}^{2000} C_{2018+k}^{k} = \sum_{k=0}^{2000} C_{2018+k}^{2018} = C_{2018}^{2018} + C_{2019}^{2018} + C_{2020}^{2018} + \ldots + C_{4018}^{2018} = C_{4019}^{2019}$. **Chọn D.**

Nhận xét: Chứng minh công thức tổng quát $C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + \ldots + C_{n+k}^n = C_{n+k+1}^{n+1}$ **(*)** đã chứng minh ở các bài trước bằng hai cách.

Cách thứ nhất là dùng công thức $C_{n-1}^{k-1} = C_n^k - C_{n-1}^k$.

Cách thứ hai là thấy vế trái **(*)** là hệ số của x^n trong khai triển

$$(1+x)^n + (1+x)^{n+1} + (1+x)^{n+2} + \ldots + (1+x)^{n+k}.$$

Ta coi đây là một cấp số nhân với $u_1 = (1+x)^n$ và $q = (1+x)$ nên tổng trên bằng

$$(1+x)^n.\frac{(1+x)^{k+1} - 1}{x} = \frac{(1+x)^{n+k+1}}{x} - \frac{(1+x)^n}{x}.$$

Hệ số của x^n ở biểu thức cuối cùng $\frac{(1+x)^{n+k+1}}{x} - \frac{(1+x)^n}{x}$ bằng hệ số của x^{n+1} ở khai triển $(1+x)^{n+k+1}$ và bằng C_{n+k+1}^{n+1}.

Câu 30. Gọi $M = \frac{1}{C_{2017}^1} + \frac{1}{C_{2017}^2} + \ldots + \frac{1}{C_{2017}^{2017}}$ và $N = \frac{1}{C_{2016}^0} + \frac{1}{C_{2016}^1} + \ldots + \frac{1}{C_{2016}^{2016}}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\frac{M}{N} = \frac{1008}{2017}$. **B.** $\frac{M}{N} = \frac{1009}{2017}$. **C.** $\frac{M}{N} = \frac{2016}{2017}$. **D.** $\frac{M}{N} = \frac{2018}{2017}$.

Lời giải. Ta có $M = \frac{1}{C_{2017}^1} + \frac{1}{C_{2017}^2} + \ldots + \frac{1}{C_{2017}^{2017}} = \frac{1}{2017}\left(\frac{2017}{C_{2017}^1} + \frac{2017}{C_{2017}^2} + \ldots + \frac{2017}{C_{2017}^{2017}}\right)$

Áp dụng công thức $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1} \to \frac{n}{C_n^k} = \frac{k}{C_{n-1}^{k-1}}$, ta được $\begin{cases} \frac{2017}{C_{2017}^1} = \frac{1}{C_{2016}^0} \\ \frac{2017}{C_{2017}^2} = \frac{2}{C_{2016}^1} \\ \vdots \\ \frac{2017}{C_{2017}^{2017}} = \frac{2017}{C_{2016}^{2016}} \end{cases}$.

Suy ra $M = \frac{1}{2017}\left(\frac{2017}{C_{2017}^1} + \frac{2017}{C_{2017}^2} + \ldots + \frac{2017}{C_{2017}^{2017}}\right) = \frac{1}{2017}\left(\frac{1}{C_{2016}^0} + \frac{2}{C_{2016}^1} + \ldots + \frac{2017}{C_{2016}^{2016}}\right)$

Đặt $S = \frac{1}{C_{2016}^0} + \frac{2}{C_{2016}^1} + \ldots + \frac{2017}{C_{2016}^{2016}}$. Viết ngược ta có $S = \frac{2017}{C_{2016}^{2016}} + \frac{2016}{C_{2016}^{2015}} + \ldots + \frac{1}{C_{2016}^0}$.

Cộng vế theo vế ta được

$$2S = 2018\left(\frac{1}{C_{2016}^0} + \frac{1}{C_{2016}^1} + \ldots + \frac{1}{C_{2016}^{2016}}\right) \to S = 1009\left(\frac{1}{C_{2016}^0} + \frac{1}{C_{2016}^1} + \ldots + \frac{1}{C_{2016}^{2016}}\right) = 1009N.$$

Từ đó suy ra $M = \frac{1009}{2017}.N \to \frac{M}{N} = \frac{1009}{2017}$. **Chọn B.**

Vấn đề 5. KỸ THUẬT DÙNG SỐ PHỨC ĐỂ TÍNH TỔNG

Đặc điểm nhận dạng để ta ứng dụng số phức vào là biểu thức cần tính có

- Các hạng tử chẵn (hoặc lẻ) có dấu đối xứng, ví dụ

  $S = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \ldots$ hoặc $S = C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots$

  $S = a_1 - a_3 + a_5 - \ldots$ hoặc $S = a_0 - a_2 + a_4 - \ldots$

- Tổng $S = C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} \ldots$

Câu 31. Tổng $C_{2019}^1 - C_{2019}^3 + C_{2019}^5 - \ldots - C_{2019}^{2019}$ bằng

A. -2^{1010}. **B.** -2^{1009}. **C.** 2^{1009}. **D.** 2^{1010}.

Lời giải. Xét $(1+i)^{2019} = C_{2019}^0 + C_{2019}^1 i + C_{2019}^2 i^2 + C_{2019}^3 i^3 + \ldots + C_{2019}^{2019} i^{2019}$

$= \left(C_{2019}^0 - C_{2019}^2 + C_{2019}^4 - \ldots - C_{2019}^{2018}\right) + \left(C_{2019}^1 - C_{2019}^3 + C_{2019}^5 - \ldots - C_{2019}^{2019}\right)i$

Mặt khác $(1+i)^{2019} = (1+i)\left[(1+i)^2\right]^{1009} = (1+i)(2i)^{1009} = (1+i)2^{1019}i = -2^{1019} + 2^{1019}i$.

So sánh phần ảo, ta kết luận được $C_{2019}^1 - C_{2019}^3 + C_{2019}^5 - \ldots - C_{2019}^{2019} = 2^{1009}$. **Chọn C.**

Câu 32. Tổng $C_{2019}^0 + C_{2019}^4 + C_{2019}^8 + \ldots + C_{2019}^{2016}$ bằng

A. $2^{2017} - 2^{1008}$. **B.** $2^{2017} - 2^{1009}$. **C.** $2^{2019} - 2^{1008}$. **D.** $2^{2019} - 2^{1009}$.

Lời giải. Xét $(1+i)^{2019} = C_{2019}^0 + C_{2019}^1 i + C_{2019}^2 i^2 + C_{2019}^3 i^3 + \ldots + C_{2019}^{2019} i^{2019}$

$= \left(C_{2019}^0 - C_{2019}^2 + C_{2019}^4 - \ldots - C_{2019}^{2018}\right) + \left(C_{2019}^1 - C_{2019}^3 + C_{2019}^5 - \ldots - C_{2019}^{2019}\right)i$

Mặt khác $(1+i)^{2019} = (1+i)\left[(1+i)^2\right]^{1009} = (1+i)(2i)^{1009} = (1+i)2^{1019}i = -2^{1019} + 2^{1019}i$.

So sánh phần thực, ta kết luận được $C_{2019}^0 - C_{2019}^2 + C_{2019}^4 - \ldots - C_{2019}^{2018} = -2^{1009}$. (1)

Xét $\begin{cases} (1+x)^{2019} \\ (1-x)^{2019} \end{cases} \to \frac{(1+x)^{2019} + (1-x)^{2019}}{2} \xrightarrow{\text{Cho } x=1}$ ta được

$$C_{2019}^0 + C_{2019}^2 + C_{2019}^4 + \ldots + C_{2019}^{2018} = 2^{2018}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $C_{2019}^0 + C_{2019}^4 + C_{2019}^8 + \ldots + C_{2019}^{2016} = 2^{2017} - 2^{1008}$. **Chọn C.**

Câu 33. Tổng $C_{2019}^0 - 3C_{2019}^2 + 3^2C_{2019}^4 - 3^3C_{2019}^6 + \ldots - 3^{1009}C_{2019}^{2018}$ bằng

A. -2^{2019}. **B.** -2^{2018}. **C.** 2^{2018}. **D.** 2^{2019}.

Lời giải. Xét khai triển

$$\left(1+\sqrt{3}i\right)^{2019} = C_{2019}^0 + C_{2019}^1\left(\sqrt{3}i\right) + C_{2019}^2\left(\sqrt{3}i\right)^2 + C_{2019}^3\left(\sqrt{3}i\right)^3 + \ldots + C_{2019}^{2019}\left(\sqrt{3}i\right)^{2019}$$
$$= \left(C_{2019}^0 - 3C_{2019}^2 + 3^2C_{2019}^4 - 3^3C_{2019}^6 + \ldots - 3^{1009}C_{2019}^{2018}\right)$$
$$+ \left(C_{2019}^1 - 3C_{2019}^3 + 3^2C_{2019}^5 - 3^3C_{2019}^7 + \ldots - 3^{1009}C_{2019}^{2019}\right)\sqrt{3}i.$$

Mặt khác $\left(1+\sqrt{3}i\right)^{2019} = \left[\left(1+\sqrt{3}i\right)^3\right]^{673} = (-8)^{673} = -2^{2019}$.

So sánh phần thực, ta được $C_{2019}^0 - 3C_{2019}^2 + 3^2C_{2019}^4 - 3^3C_{2019}^6 + \ldots - 3^{1009}C_{2019}^{2018} = -2^{2019}$. **Chọn A.**

Câu 34. Khai triển biểu thức $\left(2018x^2 + x + 2018\right)^{20118}$ được viết thành $a_0 + a_1x + \ldots + a_{4036}x^{4036}$. Tính tổng $S = a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + \ldots - a_{4035}$.

A. $S = -1$. **B.** $S = 0$. **C.** $S = 1$. **D.** $S = 2^{2018}$.

Lời giải. Thay $x = i$, ta có $\left(2018i^2 + i + 2018\right)^{2018} = a_0 + a_1i + a_2i^2 + \ldots + a_{4036}i^{4036}$

$$\Leftrightarrow i^{2018} = \left(a_0 - a_2 + a_4 - \ldots + a_{4036}\right) + \left(a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + \ldots - a_{4035}\right)i$$
$$\Leftrightarrow -1 = \left(a_0 - a_2 + a_4 - \ldots + a_{4036}\right) + \left(a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + \ldots - a_{4035}\right)i.$$

So sánh phần ảo hai vế ta được $S = a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + \ldots - a_{4035} = 0$. **Chọn B.**

Câu 35. Khai triển của biểu thức $\left(x^2 + x + 1\right)^{2018}$ được viết thành $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{4036}x^{4036}$. Tổng $S = a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \ldots - a_{4034} + a_{4036}$ bằng

A. -1. **B.** 0. **C.** -2^{1009}. **D.** 2^{1009}.

Lời giải. Ta có $\left(x^2 + x + 1\right)^{2018} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{4036}x^{4036}$

Thay $x = i$, ta có $\left(i^2 + i + 1\right)^{2018} = a_0 + a_1i + a_2i^2 + \ldots + a_{4036}i^{4036}$

$$\Leftrightarrow i^{2018} = \left(a_0 - a_2 + a_4 - \ldots + a_{4036}\right) + \left(a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + \ldots - a_{4035}\right)i$$
$$\Leftrightarrow -1 = \left(a_0 - a_2 + a_4 - \ldots + a_{4036}\right) + \left(a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + \ldots - a_{4035}\right)i.$$

So sánh phần thực hai vế, ta được $S = a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \ldots - a_{4034} + a_{4036} = -1$. **Chọn A.**

---------- **HẾT** ----------