

Phương pháp sử dụng tính chẵn - lẻ

Ví dụ 1. Thay mỗi dấu chấm hỏi (?) và chữ x bằng một chữ số, trong đó các chữ số x biểu thị cùng một chữ số:

$$(\text{??}x? + x) \times x = 1977.$$

(Đề thi học sinh giỏi Quốc gia cấp Tiểu học 1976 - 1977)

Giải : Vì tích của hai số tự nhiên $(\text{??}x? + x)$ và x là một số lẻ (1977), nên x không thể là số chẵn. Do đó x chỉ có thể là 1, 3, 5, 7, 9. Lại vì số 1977 không chia hết cho 5, 7 và 9 nên x không thể là 5, 7, 9.

- Nếu $x = 1$ thì theo bài toán ta có :

$$(\text{??}x? + 1) \times 1 = 1977$$

$$\text{??}x? + 1 = 1977$$

$$\text{??}x? = 1976$$

Nhưng tích $\text{??}x?$ lớn nhất bằng $99 \times 9 = 891$. Do đó x không thể là 1.

- Nếu $x = 3$ thì theo bài toán ta có:

$$(\text{??}x? + 3) \times 3 = 1977$$

$$\text{??}x? + 3 = 1977 : 3 = 659$$

$$\text{??}x? = 659 - 3 = 656$$

$$\text{??} = 656 : ?$$

Vì thương trong phép chia $656 : ?$ là một số có 2 chữ số, nên số chia phải là số lớn hơn 6. Lại vì số 656 không chia hết cho 7 và cho 9, nên số chia chỉ có thể là 8. Ta có $656 : 8 = 82$. Vậy, ta có kết quả đúng như sau: $(82 \times 8 + 3) \times 3 = 1977$.

Ví dụ 2. Tìm số có 4 chữ số mà nếu ta đem số ấy nhân với 2 rồi cộng với 1003 thì kết quả nhận được là số có 4 chữ số viết bởi các chữ số như số ban đầu nhưng theo thứ tự ngược lại.

Giải : Gọi số cần tìm là \overline{abcd} ($a \neq 0, d \neq 0; a, b, c, d < 10$). Theo bài ra ta có :

$$\overline{abcd} \times 2 + 1003 = \overline{dcba} \quad (1)$$

Từ (1), ta nhận thấy rằng $\overline{abcd} \times 2$ là số chẵn nên $\overline{abcd} \times 2 + 1003$ là số lẻ nên \overline{dcba} là số lẻ. Suy ra a là số lẻ, $a < 5$ vì nếu $a \geq 5$ thì $\overline{abcd} \times 2$ là số có 5 chữ số (vô lý). Vậy $a = 1$ hoặc $a = 3$.

* Nếu $a = 1$ suy ra $d \geq 3$. Vì khi đó ít nhất ta có vế trái của (1) là số lớn hơn 3000. Như vậy $d \times 2 + 3 = 11$ hoặc $d \times 2 + 3 = 21$.

+ $d \times 2 + 3 = 21$ suy ra $d = 9$. Vế phải của (1) lớn hơn hoặc bằng 9000 mà vế trái nhỏ hơn 6000 (vô lý).

+ $d \times 2 + 3 = 11$ suy ra $d = 4$. Thay vào (1) ta có : $\overline{1bc4} \times 2 + 1003 = \overline{4cb1}$. Tách theo cấu tạo số ta có :

$$2008 + 2 \times \overline{bc0} + 1003 = 4001 + \overline{cb0}$$

$$2 \times \overline{bc0} = 990 + \overline{cb0}$$

$$2 \times \overline{bc} = 99 + \overline{cb} \quad (2)$$

$$19 \times b - 8 \times c = 99. \text{ Suy ra : } 19 \times b \geq 99 \quad (3).$$

Từ (2) suy ra b là số lẻ. Từ (3) suy ra $b > 5$.

Vậy $b = 7$ hoặc $b = 9$.

+ Khi $b = 7$ không tìm được c .

+ Khi $b = 9$ ta tìm được $c = 9$.

Vậy số cần tìm là : $\overline{abcd} = 1994$.

* Nếu $a = 3$ thì ta có: $\overline{3bcd} \times 2 + 1003 \geq 7000$. Suy ra về phải: $\overline{dcba} \geq 7000$ hay $d \geq 7$. (*). Nhưng ta cũng thấy khi đó $d \times 2 + 3 = 13$ (vì $d < 10$ nên không có $d \times 2 + 3 = 23$) từ đó ta có $d = 5$ (**). Từ (*) và (**) ta thấy không thể có d thoả mãn bài toán.

Ví dụ 3. Có một số gồm hai chữ số mà hai lần chữ số hàng chục thì bằng 5 lần chữ số hàng đơn vị. Tìm số đó.

Giải: Gọi số phải tìm là \overline{ab} ($a \neq 0$; $a, b < 10$).

Theo bài ra ta có: $a \times 2 = b \times 5$.

- Vì $a \times 2$ là số chẵn nên $b \times 5$ cũng phải là số chẵn; mà 5 là số lẻ nên b phải là số chẵn.
- Vì giá trị lớn nhất của a là 9 nên $a \times 2$ có giá trị lớn nhất là $9 \times 2 = 18$; do đó giá trị lớn nhất của $b \times 5$ cũng chỉ là 18. Vì thế giá trị lớn nhất của b cũng chỉ là 3 (vì nếu $b = 4$ thì $4 \times 5 = 20 > 18$), mà b là số chẵn nên $b = 2$ và $a \times 2 = 2 \times 5$.

Suy ra: $a = 5$. Số cần tìm là 52.

Ví dụ 4. Tìm \overline{ab} biết:

$$\overline{aaaa} \times 3 + b = \overline{baaaa}$$

Giải: Theo bài ra ta có:

$\overline{aaaa} \times 2 + \overline{aaaa} + b = \overline{baaaa}$ (một số nhân một tổng). $\overline{aaaa} \times 2 + b = \overline{baaaa} - \overline{aaaa}$ (tìm một số hạng của tổng).

$$\overline{aaaa} \times 2 + b = \overline{b0000} \quad (1)$$

- Vì a lấy giá trị lớn nhất là 9 thì $\overline{aaaa} \times 2 = 9999 \times 2 = 19998$, số $19998 + b$ đạt giá trị lớn nhất cũng không bằng 30 000. Do đó $b < 3$.

- Vì $\overline{aaaa} \times 2$ là số chẵn; $\overline{b0000}$ cũng là số chẵn nên suy ra b phải là số chẵn. Vì $b \neq 0$ nên $b = 2$.

Thay $b = 2$ vào (1) ta có: $\overline{aaaa} \times 2 + 2 = 20000$.

$$\overline{aaaa} \times 2 = 20000 - 2 = 19998.$$

$$\overline{aaaa} = 19998 : 2 = 9999. \text{ Do đó } a = 9.$$

Thử: $9999 \times 3 + 2 = 29999$ (đúng với đầu bài).

Vậy số cần tìm là: $\overline{ab} = 92$.

Ví dụ 5. Tìm số có ba chữ số, biết rằng số đó cộng với tổng các chữ số của nó thì bằng 555.

Giải: Gọi số cần tìm là \overline{abc} ($a \neq 0$; $a, b, c < 10$).

Theo bài ra ta có: $\overline{abc} + a + b + c = 555$.

Suy ra: $\overline{a0a} + \overline{bb} + c \times 2 = 555$.

- Vì 555 là số lẻ, $c \times 2$ là số chẵn nên $a + b$ phải là số lẻ.

- Vì $c + a + b + c < 9 \times 4 = 36$ nên nếu phép cộng có nhớ sang hàng chục thì nhớ nhiều nhất là 3; do đó phép cộng này không nhớ sang hàng trăm.

Vậy $a = 5$. Khi đó để $a + b$ là số lẻ thì $b = 4$ hoặc $b = 2$ hay $\overline{ab} = 54$ hoặc $\overline{ab} = 52$.

Nếu $\overline{ab} = 54$ thì $505 + 44 + c \times 2 = 555$.

$$549 + c \times 2 = 555; c = (555 - 549) : 2 = 3.$$

Vậy số cần tìm là: $\overline{abc} = 543$.

Nếu $\overline{ab} = 52$ thì $505 + 22 + c \times 2 = 555$.

$$527 + c \times 2 = 555; c = (555 - 527) : 2 = 14.$$

Loại vì $c > 10$ là trái với điều kiện bài toán.