LƯỢNG GIÁC VẬN DỤNG CAO

Mục lục

1. Ôn tập những vấn đề cơ bản…………………………………………………………… .

2. Tìm nghiệm của phương trình……………………………………………………….. .

3. Nghiệm dương nhỏ nhất – nghiệm âm lớn nhất……………………….…. .

4. Số nghiệm của phương trình……………………………………………………….. .

5. Tổng các nghiệm của phương trình trên đoạn $[a;b]$ ……………………. .

6. Tìm m để phương trình có nghiệm………………………………………………. .

7. Tìm m để phương trình đúng n có nghiệm thuộc $(a;b)$…………… .

8. Kỹ thuật hàm đặc trưng ……………………………………………………………….. .

9. Tìm GTLN-GTNN của hàm số……………………………………………… .

10. Bài toán GTLN-GTNN có chứa tham số m ……………………………… .

Vấn đề 1. Ôn tập những vấn đề cơ bản

Câu 1. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $y = \dfrac{2018}{1 + \tan^2 x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

B. Hàm số $y = \dfrac{\sin x}{3 - \cos x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

C. Hàm số $y = \sqrt{\cos x + 1}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

D. Hàm số $y=\sin\frac{2x}{x-2}$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

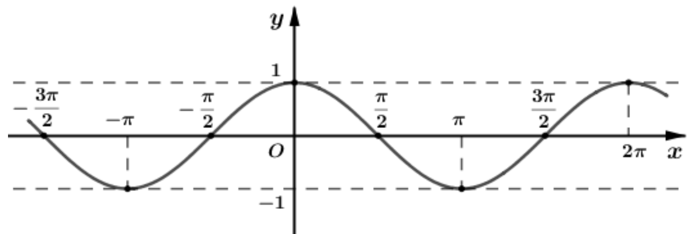
Câu 2. Cho các hàm số $y_1=\frac{|x|\sin 2x}{\cos^3 2x}$; $y_2=2-\sin x\cos\left(\frac{5\pi}{2}-2x\right)$; $y_3=\sin x\cos^2 x+\tan x$ và $y_4=|x|\cos 2x$. Hỏi có bao nhiêu hàm số có đồ thị nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 3. Trong các hàm số $y_1=\sin x$; $y_2=\sin 2x$; $y_3=\tan x$; $y_4=\cot x$ có bao nhiêu hàm số thỏa mãn tính chất $f(x+k\pi)=f(x), \forall x\in\mathbb{R}, k\in\mathbb{Z}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

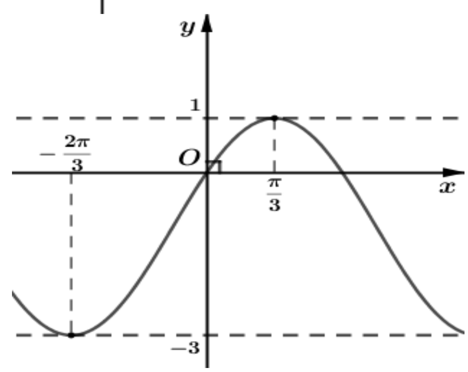
Câu 4. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



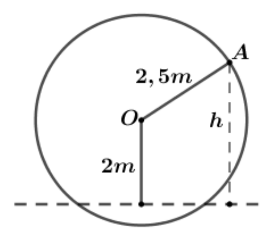
Câu 5. Đường cong trong hình bên mô tả đồ thị của hàm số $y=A\sin(x+\alpha)+B$ (với A, B, α là các hằng số và $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$). Tính $S=A+B+\frac{12\alpha}{\pi}$.

A. $S=1$. **B.** $S=2$.

C. $S=3$. **D.** $S=5$.



Câu 6. Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5m, trục của nó cách mặt nước 2m . Khi guồng quay đều, khoảng cách h (mét) từ một chiếc gầu gắn tại điểm A của guồng đến mặt nước được tính theo công thức $h=|y|$ trong đó: $y=2{,}5\sin\left[2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)\right]+2$ với x là thời gian quay của guồng với $x\geq 0$ tính bằng phút. Ta quy ước rằng $y>0$ khi gầu ở trên mặt nước và $y<0$ khi gầu ở dưới nước. Vậy chiếc gầu ở vị trí cao nhất khi nào?



A. $x=0$. **B.** $x=\frac{1}{4}$. **C.** $x=\frac{1}{2}$. **D.** $x=1$.

Câu 7. Gọi n là số nguyên thỏa mãn $(1+\tan 1^0).(1+\tan 2^0)\ldots(1+\tan 45^0)=2^n$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $n\in[1;7]$ **B.** $n\in[8;19]$ **C.** $n\in[20;26]$ **D.** $n\in[27;33]$

Câu 8. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất của thỏa mãn

$$\frac{1}{\sin 45^0.\sin 46^0}+\frac{1}{\sin 46^0.\sin 47^0}+\ldots+\frac{1}{\sin 134^0.\sin 135^0}=\frac{2}{\sin n^0}.$$

A. $n=1$. **B.** $n=45$. **C.** $n=46$. **D.** $n=91$.

Câu 9. Cho góc α thỏa $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ và $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Tính $P=\sin\alpha-\cos\alpha$.

A. $P=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $P=\frac{1}{2}$. **C.** $P=-\frac{1}{2}$. **D.** $P=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 10. Cho góc α thỏa mãn $\tan\alpha=-\frac{4}{3}$ và $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$. Tính $P=\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}$.

A. $P=\sqrt{5}$. **B.** $P=-\sqrt{5}$. **C.** $P=-\frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $P=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Vấn đề 2. Tìm nghiệm của phương trình

Câu 11. Cho phương trình $\cos2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{5}{2}$. Nếu đặt $t=\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$ thì phương trình đã cho trở thành phương trình nào dưới đây?

A. $4t^2-8t+3=0$. **B.** $4t^2-8t-3=0$. **C.** $4t^2+8t-5=0$. **D.** $4t^2-8t+5=0$.

Câu 12. Cho x_0 thỏa mãn $6(\sin x-\cos x)+\sin x\cos x+6=0$. Giá trị $\cos\left(x_0+\frac{\pi}{4}\right)$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 13. Phương trình $2\sin^2x-4\sin x\cos x+4\cos^2x=1$ tương đương với phương trình nào trong các phương trình sau?

A. $\cos2x-2\sin2x=2$. **B.** $\sin2x-2\cos2x=2$.
C. $\cos2x-2\sin2x=-2$. **D.** $\sin2x-2\cos2x=-2$.

Câu 14. Cho hai phương trình $\cos3x-1=0$ (1) và $\cos2x=-\frac{1}{2}$ (2). Tập các nghiệm của phương trình (1) đồng thời cũng là nghiệm của phương trình (2) là

A. $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$. **B.** $x=k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

C. $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$. **D.** $x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Câu 15. Tìm góc $\alpha\in\left\{\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right\}$ để phương trình $\cos2x+\sqrt{3}\sin2x-2\cos x=0$ tương đương với phương trình $\cos(2x-\alpha)=\cos x$.

A. $\alpha=\frac{\pi}{6}$. **B.** $\alpha=\frac{\pi}{4}$. **C.** $\alpha=\frac{\pi}{3}$. **D.** $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

Câu 16. Trên đoạn $\left[-2\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$, đồ thị hai hàm số $y=\sin x$ và $y=\cos x$ cắt nhau tại bao nhiêu điểm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 8.

Câu 17. Biểu diễn tập nghiệm của phương trình $\cos x+\cos2x+\cos3x=0$ trên đường tròn lượng giác ta được số điểm cuối là

A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị của α thuộc $[0;2\pi]$ để ba phần tử của $S=\{\sin\alpha,\sin2\alpha,\sin3\alpha\}$ trùng với ba phần tử của $T=\{\cos\alpha,\cos2\alpha,\cos3\alpha\}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 19. Phương trình $2^{n+1}\cos x.\cos2x.\cos4x.\cos8x...\cos2^nx=1$ với $n\in\mathbb{N}^*$ có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình nào sau đây?

A. $\sin x=0$. **B.** $\sin x=\sin2^nx$. **C.** $\sin x=\sin2^{n+1}x$. **D.** $\sin x=\sin2^{n+2}x$.

Câu 20. Tính diện tích của đa giác tạo bởi các điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn các nghiệm của phương trình $\tan x+\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$.

A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\frac{3\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Vấn đề 3. Nghiệm dương nhỏ nhất
Nghiệm âm lớn nhất

Câu 21. Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin 5x + 2\cos^2 x = 1$ có dạng $\frac{\pi a}{b}$ với $a,\ b$ là các số nguyên và nguyên tố cùng nhau. Tính $S = a + b$.

A. $S = 3$. **B.** $S = 7$. **C.** $S = 15$. **D.** $S = 17$.

Câu 22. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x} + \cot x = 2$ có dạng $\frac{\pi a}{b}$ với $a,\ b$ là các số nguyên, $a < 0$ và $a,\ b$ nguyên tố cùng nhau. Tính $S = a + b$.

A. $S = 3$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = 5$. **D.** $S = 7$.

Câu 23. Cho phương trình $\sin x + \sin 5x = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\ 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)$ Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác là?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 24. Cho phương trình $\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\left(\cos 4x + \sin^3 x\right)$. Tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình bằng

A. $-\frac{\pi}{7}$. **B.** $-\frac{\pi}{18}$. **C.** $-\frac{\pi}{20}$. **D.** $\frac{\pi}{7}$.

Câu 25. Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\cos 3x\left(2\cos 2x + 1\right) = \frac{1}{2}$ có dạng $\frac{\pi a}{b}$ với $a,\ b$ là các số nguyên và nguyên tố cùng nhau. Tính $S = a + b$.

A. $S = 7$. **B.** $S = 8$. **C.** $S = 15$. **D.** $S = 17$.

Câu 26. Cho phương trình $\sin^{2018} x + \cos^{2018} x = 2\left(\sin^{2020} x + \cos^{2020} x\right)$. Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác là?

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 2020.

Câu 27. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\tan^{2018} x + \cot^{2018} x = 2\sin^{2017}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ có dạng $\frac{\pi a}{b}$ với $a,\ b$ là các số nguyên, $a < 0$ và $a,\ b$ nguyên tố cùng nhau. Tính $S = a + b$.

A. $S = -3$. **B.** $S = -1$. **C.** $S = 1$. **D.** $S = 3$.

Câu 28. Cho phương trình $2^{2017}\left(\sin^{2018} x + \cos^{2018} x\right)\left(\sin x + \cos x\right)\cos x = \frac{\cos 2x}{1 - \tan x}$. Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình có dạng $\frac{\pi a}{b}$ với $a,\ b$ là các số nguyên và nguyên tố cùng nhau. Tính $S = a + b$.

A. $S = 2$. **B.** $S = 3$. **C.** $S = 4$. **D.** $S = 7$.

Câu 29. Biết rằng phương trình $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^{2018} x} = 0$ có nghiệm dạng $x = \frac{k2\pi}{2^a - b}$ với $k \in \mathbb{Z}$ và $a,\ b \in \mathbb{Z}^+$, $b < 2018$. Tính $S = a + b$.

A. $S = 2017$. **B.** $S = 2018$. **C.** $S = 2019$. **D.** $S = 2020$.

Câu 30. Phương trình $\frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{18}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Vấn đề 4. Số nghiệm của phương trình

Câu 31. Phương trình $2\cos^2 x+2\cos^2 2x+2\cos^2 3x-3=\cos 4x(2\sin 2x+1)$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0;2018)$?

A. 2565. **B.** 2566. **C.** 2567. **D.** 2568.

Câu 32. Phương trình $\dfrac{(1-2\cos x)(1+\cos x)}{(1+2\cos x)\sin x}=1$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0;2018\pi)$?

A. 3025. **B.** 3026. **C.** 3027. **D.** 3028.

Câu 33. Phương trình $\sin\left[\dfrac{\pi}{4}\left(3x-\sqrt{9x^2-16x-80}\right)\right]=0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 34. Phương trình $\sin^4 x+\cos^4\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0;2017\pi)$?

A. 4032. **B.** 4033. **C.** 4034. **D.** 4035.

Câu 35. Tìm số nghiệm của phương trình $\tan 4x-\tan 2x-4\tan x=4\tan 4x.\tan 2x.\tan x$ trên đoạn $[-\pi;\pi]$

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 7.

Vấn đề 5. Tổng các nghiệm của phương trình trên đoạn $[a;b]$

Câu 36. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\tan 5x-\tan x=0$ trên $[0;\pi)$ bằng

A. π. **B.** $\dfrac{3\pi}{2}$. **C.** 2π. **D.** $\dfrac{5\pi}{2}$.

Câu 37. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos(\sin x)=1$ trên đoạn $[0;2\pi]$ bằng

A. 0. **B.** π. **C.** 2π. **D.** 3π.

Câu 38. Cho phương trình $x^2-(2\cos\alpha-3)x+7\cos^2\alpha-3\cos\alpha-\dfrac{9}{4}=0$. Gọi S là tập các giá trị của tham số α thuộc đoạn $[0;4\pi]$ để phương trình có nghiệm kép. Tổng các phần tử của tập S bằng

A. $\dfrac{20\pi}{3}$. **B.** 15π. **C.** 16π. **D.** 17π.

Câu 39. Tính tổng S tất cả các nghiệm của phương trình $(2\cos 2x+5)(\sin^4 x-\cos^4 x)+3=0$ trên khoảng $(0;2\pi)$.

A. $S=\dfrac{7\pi}{6}$. **B.** $S=\dfrac{11\pi}{6}$. **C.** $S=4\pi$. **D.** $S=5\pi$.

Câu 40. Tổng các nghiệm của phương trình $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sin x}+\dfrac{\sqrt{3}+1}{\cos x}=4\sqrt{2}$ trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $\dfrac{11\pi}{36}$. **B.** $\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{7\pi}{18}$. **D.** π.

Câu 41. Tổng các nghiệm của phương trình $\sin x\cos x+|\sin x+\cos x|=1$ trên $(0;2\pi)$ bằng

A. π. **B.** 2π. **C.** 3π. **D.** 4π.

Câu 42. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\sin 3x(1-4\sin^2 x)=\dfrac{1}{2}$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ bằng

A. $\dfrac{3\pi}{7}$. **B.** $\dfrac{3\pi}{5}$. **C.** $\dfrac{37\pi}{70}$. **D.** $\dfrac{36\pi}{35}$.

Câu 43. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\dfrac{\sin 2x+2\sin^2 x-5\sin x-\cos x+2}{2\cos x+\sqrt{3}}=0$ trên đoạn $[0;100\pi]$ bằng

A. $\frac{7375\pi}{3}$. **B.** $\frac{7475\pi}{3}$. **C.** $\frac{14701\pi}{6}$. **D.** $\frac{14850\pi}{3}$.

Câu 44. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\sin^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin x$ trên đoạn $[0;2018]$ bằng

A. $\frac{2018\pi}{4}$. **B.** $\frac{4036\pi}{3}$. **C.** $\frac{412485\pi}{2}$. **D.** $\frac{824967\pi}{4}$.

Câu 45. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos^2 x\left(\tan^2 x-\cos 2x\right)=\cos^3 x-\cos^2 x+1$ trên đoạn $[0;43\pi]$ bằng

A. $\frac{4220}{3}\pi$. **B.** $\frac{4225}{3}\pi$. **C.** $\frac{4230}{3}\pi$. **D.** $\frac{4235}{3}\pi$.

Vấn đề 6. Tìm m để phương trình có nghiệm

Câu 46. Có bao nhiêu giá trị của tham số m thuộc tập $E=\{-3;-2;-1;0;1;2\}$ để phương trình $2m\sin x\cos x+4\cos^2 x=m+5$ có nghiệm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 47. Cho phương trình $m\sin^2 x+2\sin x\cos x+3m\cos^2 x=1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình có nghiệm.

A. $m\in\left\{0;\frac{4}{3}\right\}$. **B.** $m\in\mathbb{R}\setminus\left\{0;\frac{4}{3}\right\}$. **C.** $m\in\left[0;\frac{4}{3}\right]$. **D.** $m\in\left(0;\frac{4}{3}\right)$.

Câu 48. Cho phương trình $\frac{5+4\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}{\sin x}=\frac{6\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của α thuộc đoạn $[0;2\pi]$ để phương trình có nghiệm. Tổng các phần tử của tập S bằng

A. π. **B.** 2π. **C.** 4π. **D.** 6π.

Câu 49. Cho phương trình $4\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=m^2+\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$. Gọi $S=[a;b]$ là tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm. Tính $a+b$.

A. $a+b=-2$. **B.** $a+b=-\frac{1}{2}$. **C.** $a+b=0$. **D.** $a+b=4$.

Câu 50. Cho phương trình $\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin x\cos x-\frac{m}{4}+2=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm?

A. 7. **B.** 9. **C.** 13. **D.** 15.

Câu 51. Cho phương trình $3\tan^2+\tan x+\cot x+\frac{3}{\sin^2 x}=m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên m nhỏ hơn 2018 để phương trình có nghiệm?

A. 2004. **B.** 2008. **C.** 2011. **D.** 2012.

Câu 52. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sin 4x=m.\tan x$ có nghiệm $x\neq k\pi$.

A. $m\in\left[-\frac{1}{2};4\right)$. **B.** $m\in\left[-\frac{1}{2};4\right]$. **C.** $m\in\left(-\frac{1}{2};4\right)$. **D.** $m\in(-1;4)$.

Câu 53. Cho phương trình $\cos 2x-(2m+1)\cos x+m+1=0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$.

A. $-1\le m\le 1$. **B.** $-1\le m\le 0$. **C.** $-1\le m<0$. **D.** $-1<m<0$.

Câu 54. Cho phương trình $\cos^2 x+2(1-m)\cos x+2m-1=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để phương trình có nghiệm?

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Câu 55. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\cos 4x = \cos^2 3x + m\sin^2 x$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{\pi}{12}\right)$

A. $m \in \left(0;\frac{1}{2}\right)$ **B.** $m \in \left(\frac{1}{2};2\right)$ **C.** $m \in (0;1)$. **D.** $m \in \left(-1;\frac{1}{4}\right)$

Câu 56. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2\sin x + m\cos x = 1 - m$ có nghiệm x thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

A. $m \ge -\frac{3}{2}$. **B.** $m > -\frac{3}{2}$. **C.** $-1 \le m \le 3$. **D.** $-1 < m < 3$.

Câu 57. Cho phương trình $mx^2 + 4\pi^2 = 4\pi^2\cos x$. Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. -54. **B.** -35. **C.** 35. **D.** 51.

Câu 58. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2		-1		1		4	$+\infty$
$f'(x)$		|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	
$f(x)$	$-\infty$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$+\infty$

Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left[3\cos(x+1)+1\right] = -\frac{m}{2}$ có nghiệm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 13.

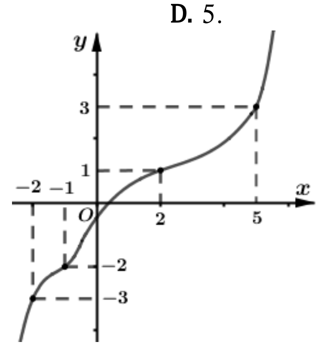
Câu 59. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1		0		2		3	$+\infty$
$f'(x)$		|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	
$f(x)$	$-\infty$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$+\infty$

Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $f(2\sin x + 1) = f(m)$ có nghiệm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 60. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa $f(x) > 3$ với mọi $x > 5$ và $f(x) < -3$ với mọi $x < -2$, có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(3\sin x + 2) = f(m)$ có nghiệm?



A. 6. **B.** 7.
C. 8. **D.** 9.

Vấn đề 7. Tìm m để phương trình có đúng n nghiệm thuộc khoảng $(a;b)$

Câu 61. Cho phương trình $2\cos^2 3x+(3-2m)\cos 3x+m-2=0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình có đúng 3 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$

A. $-1\le m\le 1$. **B.** $1<m\le 2$. **C.** $1\le m\le 2$. **D.** $1\le m<2$.

Câu 62. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sin 2x+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2=m$ có đúng 2 nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{3\pi}{4}\right)$

A. $-3<m<-1+\sqrt{2}$. **B.** $-3<m\le -1+\sqrt{2}$. **C.** $-1<m\le -1+\sqrt{2}$. **D.** $-1<m<-1+\sqrt{2}$.

Câu 63. Cho phương trình $m\sin^2 x-3\sin x\cos x-m-1=0$. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên m thuộc đoạn $[-5;5]$ để phương trình có đúng 3 nghiệm thuộc $\left(0;\frac{3\pi}{2}\right)$. Tổng các phần tử của S bằng

A. -15. **B.** -14. **C.** 0. **D.** 15.

Câu 64. Cho phương trình $(\cos x+1)(4\cos 2x-m\cos x)=m\sin^2 x$. Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình có đúng 2 nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 65. Có bao nhiêu số thực m để phương trình $(\sin x-1)\left(2\cos^2 x-(2m+1)\cos x+m\right)=0$ có đúng 4 nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 66. Cho phương trình $\sin^4 x+\cos^4 x+\cos^2 4x=m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có 4 nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 67. Cho phương trình $(\sin x-1)\left(\cos^2 x-\cos x+m\right)=0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình có đúng 5 nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$

A. $0\le m<\frac{1}{4}$. **B.** $-\frac{1}{4}<m\le 0$. **C.** $0<m<\frac{1}{4}$. **D.** $-\frac{1}{4}<m<0$.

Câu 68. Biết rằng khi $m=m_0$ thì phương trình $2\sin^2 x-(5m+1)\sin x+2m^2+2m=0$ có đúng 5 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};3\pi\right)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $m_0=-3$. **B.** $m_0=\frac{1}{2}$. **C.** $m_0\in\left(\frac{3}{5};\frac{7}{10}\right]$. **D.** $m_0\in\left(-\frac{3}{5};-\frac{2}{5}\right)$.

Câu 69. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $1+2\cos^2 2x-\sqrt{3}\sin 4x-m=m\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ trên đường tròn lượng giác là 4?

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 12.

Câu 70. Cho phương trình $(m+1)\cos x+(m-1)\sin x=2m+3$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $|x_1-x_2|=\frac{2\pi}{3}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Vấn đề 8. Kỹ thuật hàm đặc trưng

Câu 71. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $m+\sin(m+\sin 3x)=\sin(3\sin x)+4\sin^3 x$ có nghiệm thực?

A. 4. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 72. Cho phương trình $(8\sin^3 x-m)^3=162\sin x+27m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{\pi}{3}\right)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Câu 73. Cho phương trình $\sqrt[3]{m+3\sqrt[3]{m+3\sin x}}=\sin x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 74. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $m+\sqrt{m+1+\sqrt{1+\sin x}}=\sin x$ có nghiệm là $[a;b]$ Giá trị của $a+b$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{1}{2}-\sqrt{2}$. **C.** 3. **D.** $-\frac{1}{4}-\sqrt{2}$.

Câu 75. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$\sin x(2-\cos 2x)-2(2\cos^3 x+m+1)\sqrt{2\cos^3 x+m+2}=3\sqrt{2\cos^3 x+m+2}$$

có đúng một nghiệm thuộc $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 76. Cho phương trình $\sin 2x-\cos 2x+|\sin x+\cos x|-\sqrt{2\cos^2 x+m}-m=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 9.

Câu 77. Cho phương trình $\sqrt[3]{4\sin x+m}+\sin x=\sqrt[3]{\sin^3 x+4\sin x+m-8}+2$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm ?

A. 18. **B.** 19. **C.** 20. **D.** 21.

Câu 78. Cho phương trình $3\sqrt{\tan x+1}(\sin x+2\cos x)=m(\sin x+3\cos x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thộc đoạn $[-2018;2018]$ để phương trình trên có đúng một nghiệm thuộc $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$?

A. 2015. **B.** 2016. **C.** 2018. **D.** 4036.

Câu 79. Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos^2 x+\sqrt{\cos x+m}=m$ có nghiệm là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 80. Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{1+2\cos x}+\sqrt{1+2\sin x}=\frac{m}{3}$ có nghiệm là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Vấn đề 9. Tìm GTLN-GTNN của hàm số

Câu 81. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{3}|\sin x|\right)$ lần lượt là

A. -1 và 1. **B.** 0 và 1. **C.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ và $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** 0 và $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 82. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=2\cos^3 x-\cos 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ lần lượt là

A. -3 và 1. **B.** $\frac{1}{4}$ và 1. **C.** $\frac{19}{27}$ và 1. **D.** -3 và $\frac{3}{4}$.

Câu 83. Gọi $m,\ M$ lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y=(3-5\sin x)^{2018}$. Giá trị của $M+m$ bằng

A. $2^{2018}\left(1+2^{4036}\right)$. **B.** 2^{2018}. **C.** 2^{4036}. **C.** 2^{6054}.

Câu 84. Gọi $M,\ m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^2 x-4\sin x+5$. Tính $P=M-2m^2$.

A. $P=1$. **B.** $P=7$. **C.** $P=8$. **D.** $P=2$.

Câu 85. Giá trị nhỏ nhất của $f(x)=\sin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)+\cos\left(\frac{4x}{x^2+1}\right)+1$ gần nhất với số nào sau đây?

A. -1. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{1}{4}$. **D.** $-\frac{1}{8}$.

Câu 86. Gọi $m,\ M$ lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y=\frac{\cos x+2\sin x+3}{2\cos x-\sin x+4}$. Tính $S=11m+M$.

A. $S=-10$. **B.** $S=4$. **C.** $S=6$. **D.** $S=24$.

Câu 87. Gọi $M,\ m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\sin x+\cos x+1}{\sqrt{2+\sin 2x}}$. Khi đó, $M+\sqrt{3}m$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $1+2\sqrt{2}$.

Câu 88. Biết giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{2}{1-\cos^4 x}+\frac{1}{\cos^4 x}$ có dạng $a+b\sqrt{2}$ với $a,\ b$ là các số nguyên. Tính $S=a+b$.

A. $S=3$. **B.** $S=4$. **C.** $S=5$. **D.** $S=7$.

Câu 89. Cho hàm số $y=\sqrt{1+2\sin^2 x}+\sqrt{1+2\cos^2 x}-1$. Gọi $m,\ M$ lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số. Khi đó giá trị của $M+m$ gần nhất với số nào sau đây?

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{11}{2}$.

Câu 90. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\sin^{2018} x+\cos^{2018} x$ lần lượt là

A. $\frac{1}{2^{1008}}$ và 2. **B.** $\frac{1}{2^{1009}}$ và 1. **C.** 0 và 1. **D.** $\frac{1}{2^{1008}}$ và 1.

Vấn đề 10. Bài toán GTLN-GTNN có chứa tham số m

Câu 91. Có bao nhiêu giá trị của tham số thực a để hàm số $y=\frac{\cos x+a\sin x+1}{\cos x+2}$ có giá trị lớn nhất bằng 1 ?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 92. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[0;10]$ để hàm số $y=\frac{1-m\sin x}{\cos x+2}$ có giá trị nhỏ nhất nhỏ hơn -2?

A. 5. **B.** 6. **C.** 11. **D.** 12.

Câu 93. Cho hàm số $y=2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sqrt{3}\sin x+a^2$ (với là tham số). Gọi $m,\ M$ lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $\left[\frac{\pi}{6};\frac{2\pi}{3}\right]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để $m^2-M\le\frac{321}{4}$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 94. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|\sin^4 x+\cos 2x+m\right|$ bằng 2. Hỏi tập S có bao nhiêu phần tử?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 95. Cho $x,\ y$ là các số thực thỏa mãn $\cos 2x+\cos 2y=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\tan^2 x+\tan^2 y$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$. **C.** 3.

Câu 96. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(\tan x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\cos 2x$ với mọi $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Với $a,\ b$ là hai số thực thay đổi thỏa mãn $a+b=1$, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=f(a).f(b)$ bằng

A. $\frac{1}{25}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{5-3\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\frac{5+3\sqrt{5}}{2}$.

Câu 97. Cho hai số thực $x,\ y$ thuộc $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ và thỏa mãn $\cos 2x+\cos 2y+2\sin(x+y)=2$. Giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{\cos^4 x}{y}+\frac{\cos^4 y}{x}$ bằng

A. $\frac{2}{3\pi}$. **B.** $\frac{3}{\pi}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{5}{\pi}$.

Câu 98. Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=4$. Tìm giá trị lớn nhất M trong tất cả các hàm số $y=a+b\sqrt{\sin x}+c\sqrt{\cos x}$ với $x\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right]$.

A. $M=\sqrt{1+\sqrt{2}}$. **B.** $M=1+\sqrt{2}$. **C.** $M=2\sqrt{1+\sqrt{2}}$. **D.** $M=2\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Câu 99. Cho hai số thực dương $a,\ b$ thỏa mãn $\sin(2-2ab)-\sin(a+b)=2ab+a+b-2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=a+2b$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{10}-3}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{10}-7}{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{10}-1}{2}$. **D.** $\frac{2\sqrt{10}-5}{2}$.

Câu 100. Cho hai số thực dương $a,\ b$ thỏa mãn $\cos(x+y+1)+3=\cos(3xy)+9xy-3x-3y$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=x(y+2)$ bằng

A. $\frac{11+4\sqrt{7}}{9}$. **B.** 1. **C.** $\frac{28+8\sqrt{7}}{21}$. **D.** $\frac{7+2\sqrt{7}}{21}$.

--------- **HẾT** ---------

LƯỢNG GIÁC VẬN DỤNG CAO

Mục lục

1. Ôn tập những vấn đề cơ bản…………………………………………………………… 02

2. Tìm nghiệm của phương trình……………………………………………………….. 04

3. Nghiệm dương nhỏ nhất – nghiệm âm lớn nhất………………………..…. 07

4. Số nghiệm của phương trình………………………………………………………….. 10

5. Tổng các nghiệm của phương trình trên đoạn $[a;b]$ ……….………… 12

6. Tìm m để phương trình có nghiệm…………………..………………………… 16

7. Tìm m để phương trình đúng n có nghiệm thuộc $(a;b)$…………..… 21

8. Kỹ thuật hàm đặc trưng ……………………………………………………………….. 27

9. Tìm GTLN-GTNN của hàm số……………………………...…………………… 31

10. Bài toán GTLN-GTNN có chứa tham số m ………………………………… 34

Vấn đề 1. Ôn tập những vấn đề cơ bản

Câu 1. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $y = \dfrac{2018}{1 + \tan^2 x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

B. Hàm số $y = \dfrac{\sin x}{3 - \cos x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

C. Hàm số $y = \sqrt{\cos x + 1}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

D. Hàm số $y = \sin \dfrac{2x}{x - 2}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

Lời giải. Chọn C.

Câu 2. Cho các hàm số $y_1 = \dfrac{|x| \sin 2x}{\cos^3 2x}$; $y_2 = 2 - \sin x \cos\left(\dfrac{5\pi}{2} - 2x\right)$; $y_3 = \sin x \cos^2 x + \tan x$ và $y_4 = |x| \cos 2x$. Hỏi có bao nhiêu hàm số có đồ thị nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

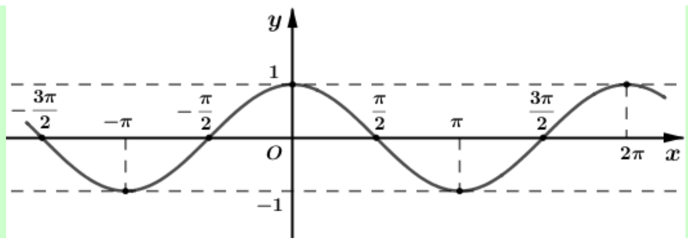
Lời giải. Kiểm tra ta có y_1 và y_3 là các hàm số lẻ. **Chọn B.**

Câu 3. Trong các hàm số $y_1 = \sin x$; $y_2 = \sin 2x$; $y_3 = \tan x$; $y_4 = \cot x$ có bao nhiêu hàm số thỏa mãn tính chất $f(x + k\pi) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Chọn C. Đó là các hàm số y_2; y_3; y_4.

Câu 4. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



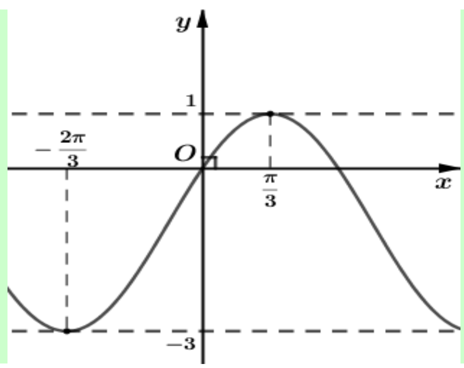
A. $y = \sin 2x$ **B.** $y = \cos x$. **C.** $y = -\sin x$ **D.** $y = -\cos x$.

Lời giải. Khi $x = 0$ thì $y = 1$. **Chọn B.**

Câu 5. Đường cong trong hình bên mô tả đồ thị của hàm số $y = A\sin(x + \alpha) + B$ (với A, B, α là các hằng số và $\alpha \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$). Tính $S = A + B + \dfrac{12\alpha}{\pi}$.

A. $S = 1$. **B.** $S = 2$.

C. $S = 3$. **D.** $S = 5$.



Lời giải. Dựa vào đồ thị hàm số ta có hệ phương trình $\begin{cases} A\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3} + \alpha\right) + B = -3 & (1) \\ A\sin\alpha + B = 0 & (2) \\ A\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right) + B = 1 & (3) \end{cases}$.

Ta thấy $A = 0$ không thỏa mãn hệ. Do đó $(3) \Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right) = \dfrac{1 - B}{A}$. (4)

Từ $(1) \longrightarrow -A\sin\left(\pi - \dfrac{2\pi}{3} + \alpha\right) + B = -3 \Leftrightarrow -A\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right) + B = -3 \xrightarrow{(4)} B = -1$.

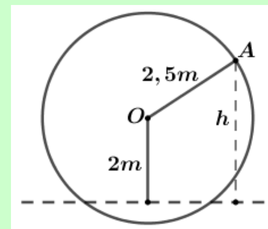
Thay $B = -1$ vào (2) và (3), ta có hệ $\begin{cases} A\sin\alpha = 1 \\ A\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right) = 2 \end{cases} \longrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right) = 2\sin\alpha$

$\Leftrightarrow \sin\dfrac{\pi}{3}\cos\alpha + \cos\dfrac{\pi}{3}\sin\alpha = 2\sin\alpha \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos\alpha = 3\sin\alpha \Leftrightarrow \tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} \alpha = \dfrac{\pi}{6}.$

Với $\alpha = \dfrac{\pi}{6} \longrightarrow A = 2$. Vậy $\begin{cases} A = 2;\ B = -1 \\ \alpha = \dfrac{\pi}{6} \end{cases} \longrightarrow S = A + B + \dfrac{12\alpha}{\pi} = 3$. **Chọn C.**

Nhận xét: Cách trắc nghiệm: nhìn đồ thị đoán được $A = 2;\ B = -1$ (dựa vào min – max) và dùng dữ kiện đồ thị đi qua gốc tọa độ suy ra $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

Câu 6. Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5m, trục của nó cách mặt nước 2m . Khi guồng quay đều, khoảng cách h (mét) từ một chiếc gầu gắn tại điểm A của guồng đến mặt nước được tính theo công thức $h = |y|$ trong đó: $y = 2{,}5\sin\left[2\pi\left(x - \dfrac{1}{4}\right)\right] + 2$ với x là thời gian quay của guồng với $x \geq 0$ tính bằng phút. Ta quy ước rằng $y > 0$ khi gầu ở trên mặt nước và $y < 0$ khi gầu ở dưới nước. Vậy chiếc gầu ở vị trí cao nhất khi nào?



A. $x = 0$. **B.** $x = \dfrac{1}{4}$. **C.** $x = \dfrac{1}{2}$. **D.** $x = 1$.

Lời giải. Gầu ở vị trí cao nhất khi: $\sin\left[2\pi\left(x - \dfrac{1}{4}\right)\right] = 1 \longrightarrow x = \dfrac{1}{2}$. **Chọn C.**

Cách trắc nghiệm thay từng đáp án vào và bấm máy so sánh.

Câu 7. Gọi n là số nguyên thỏa mãn $\left(1 + \tan 1^0\right).\left(1 + \tan 2^0\right)\cdots\left(1 + \tan 45^0\right) = 2^n$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $n \in [1;7]$. **B.** $n \in [8;19]$. **C.** $n \in [20;26]$. **D.** $n \in [27;33]$.

Lời giải. Ta có biến đổi: $(1 + \tan 1°).(1 + \tan 2°)\cdots(1 + \tan 45°)$

$$= \frac{(\cos 1° + \sin 1°)}{\cos 1°}\times\frac{(\cos 2° + \sin 2°)}{\cos 2°}\times\cdots\times\frac{(\cos 45° + \sin 45°)}{\cos 45°}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sin(1° + 45°)}{\cos 1°}\times\frac{\sqrt{2}\sin(2° + 45°)}{\cos 2°}\times\cdots\times\frac{\sqrt{2}\sin(45° + 45°)}{\cos 45°}$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{45}.\frac{\cos 44°.\cos 43°.....\cos 2°.\cos 1°}{\cos 1°.\cos 2°.....\cos 43°.\cos 44°}\times\frac{\sin 90°}{\cos 45°}$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{45}.\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^{45}.\sqrt{2} = 2^{23} \longrightarrow n = 23.$$ **Chọn C.**

Câu 8. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất của thỏa mãn

$$\frac{1}{\sin 45^0.\sin 46^0} + \frac{1}{\sin 46^0.\sin 47^0} + \cdots + \frac{1}{\sin 134^0.\sin 135^0} = \frac{2}{\sin n^0}.$$

A. $n = 1$. **B.** $n = 45$. **C.** $n = 46$. **D.** $n = 91$.

Lời giải. Đặt $P = \dfrac{1}{\sin 45°.\sin 46°} + \dfrac{1}{\sin 46°.\sin 47°} + \cdots + \dfrac{1}{\sin 134°.\sin 135°}$

$\Rightarrow \sin 1°.P = \dfrac{\sin 1°}{\sin 45°.\sin 46°} + \dfrac{\sin 1°}{\sin 46°.\sin 47°} + \cdots + \dfrac{\sin 1°}{\sin 134°.\sin 135°}$

$\Rightarrow \sin 1°.P = \cot 45° - \cot 46° + \cot 46° - \cot 47° + \ldots + \cot 134° - \cot 135°$

$\Rightarrow \sin 1°.P = \cot 45° - \cot 135° = 2 \longrightarrow P = \dfrac{2}{\sin 1°} \longrightarrow n = 1$. **Chọn A.**

Câu 9. Cho góc α thỏa $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$ và $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Tính $P = \sin\alpha - \cos\alpha$.

A. $P=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$ **B.** $P=\dfrac{1}{2}\cdot$ **C.** $P=-\dfrac{1}{2}\cdot$ **D.** $P=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Lời giải. Ta có $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=2\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=2$.

Suy ra $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=2-\dfrac{5}{4}=\dfrac{3}{4}$.

Do $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ suy ra $\sin\alpha<\cos\alpha$ nên $\sin\alpha-\cos\alpha<0$. Vậy $P=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **Chọn D.**

Câu 10. Cho góc α thỏa mãn $\tan\alpha=-\dfrac{4}{3}$ và $\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right]$. Tính $P=\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

A. $P=\sqrt{5}.$ **B.** $P=-\sqrt{5}.$ **C.** $P=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}.$ **D.** $P=\dfrac{\sqrt{5}}{5}.$

Lời giải. Ta có $P^2=1+\sin\alpha$. Với $\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right]\Rightarrow\dfrac{\alpha}{2}\in\left(\dfrac{3\pi}{4};\pi\right]$.

Khi đó $\begin{cases}0\le\sin\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\-1\le\cos\dfrac{\alpha}{2}<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$, suy ra $P=\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}<0$.

Từ hệ thức $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, suy ra $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{16}{25}$.

Vì $\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right]$ nên ta chọn $\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$.

Thay $\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$ vào P^2, ta được $P^2=\dfrac{1}{5}$. Suy ra $P=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **Chọn C.**

Vấn đề 2. Tìm nghiệm của phương trình

Câu 11. Cho phương trình $\cos2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+4\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=\dfrac{5}{2}$. Nếu đặt $t=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$ thì phương trình đã cho trở thành phương trình nào dưới đây?

A. $4t^2-8t+3=0.$ **B.** $4t^2-8t-3=0.$ **C.** $4t^2+8t-5=0.$ **D.** $4t^2-8t+5=0.$

Lời giải. Ta có $\cos2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=1-2\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=1-2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$

Do đó phương trình tương đương với $-2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)+4\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)-\dfrac{3}{2}=0$

$$\Leftrightarrow -4\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+8\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-3=0.$$

Nếu đặt $t=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$ thì phương trình trở thành $-4t^2+8t-3=0\Leftrightarrow4t^2-8t+3=0$. **Chọn A.**

Câu 12. Cho x_0 thỏa mãn $6(\sin x-\cos x)+\sin x\cos x+6=0$. Giá trị $\cos\left(x_0+\dfrac{\pi}{4}\right)$ bằng

A. $-1.$ **B.** $1.$ **C.** $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$ **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

Lời giải. Đặt $t=\sin x-\cos x=-\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\left(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\right)$. Suy ra $\sin x\cos x=\dfrac{1-t^2}{2}$.

Phương trình đã cho trở thành $6t+\dfrac{1-t^2}{2}+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=13\,(\text{loại})\end{array}\right.$

$\longrightarrow -\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1\Leftrightarrow\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **Chọn D.**

Câu 13. Phương trình $2\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 1$ tương đương với phương trình nào trong các phương trình sau?

A. $\cos 2x - 2\sin 2x = 2.$ **B.** $\sin 2x - 2\cos 2x = 2.$

C. $\cos 2x - 2\sin 2x = -2.$ **D.** $\sin 2x - 2\cos 2x = -2.$

Lời giải. Phương trình tương đương với $\left(2\sin^2 x + 2\cos^2 x\right) - 2.2\sin x\cos x + \left(2\cos^2 x - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2 - 2\sin 2x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x - 2\sin 2x = -2.$ **Chọn C.**

Câu 14. Cho hai phương trình $\cos 3x - 1 = 0$ (1) và $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ (2). Tập các nghiệm của phương trình (1) đồng thời cũng là nghiệm của phương trình (2) là

A. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. **B.** $x = k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. **D.** $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải. Phương trình $(1) \Leftrightarrow \cos 3x = 1 \Leftrightarrow 3x = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{k2\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Phương trình $(2) \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác ta thấy được nghiệm chung của hai phương trình là $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. **Chọn D.**

Câu 15. Tìm góc $\alpha \in \left\{\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right\}$ để phương trình $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x - 2\cos x = 0$ tương đương với phương trình $\cos(2x - \alpha) = \cos x$.

A. $\alpha = \frac{\pi}{6}$. **B.** $\alpha = \frac{\pi}{4}$. **C.** $\alpha = \frac{\pi}{3}$. **D.** $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Lời giải. Ta có

$$\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x - 2\cos x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = \cos x \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos x.$$

Từ đó cho thấy với $\alpha \in \left\{\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right\}$ để hai phương trình đã cho tương đương với nhau thì chỉ có duy nhất $\alpha = \frac{\pi}{3}$ thỏa mãn. **Chọn C.**

Câu 16. Trên đoạn $\left[-2\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$, đồ thị hai hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ cắt nhau tại bao nhiêu điểm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 8.

Lời giải. Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là: $\sin x = \cos x$

$\Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Do $x \in \left[-2\pi;\frac{5\pi}{2}\right] \longrightarrow -2\pi \le \frac{\pi}{4} + k\pi \le \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{9}{4} \le k \le \frac{9}{4} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{-2;-1;0;1;2\}$.

Vậy đồ thị hai hàm số đã cho cắt nhau tại 5 điểm trên đoạn $\left[-2\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$. **Chọn C.**

Câu 17. Biểu diễn tập nghiệm của phương trình $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ trên đường tròn lượng giác ta được số điểm cuối là

A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải. Ta có $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x\cos x + \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \cos x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k2\pi}{4} \to 4 \text{ diem}\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \to 2 \text{ diem}\end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$ và các điểm này không trùng nhau nên tập nghiệm của phương trình đã cho có 6 điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác. **Chọn D.**

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị của α thuộc $[0;2\pi]$ để ba phần tử của $S = \{\sin\alpha, \sin 2\alpha, \sin 3\alpha\}$ trùng với ba phần tử của $T = \{\cos\alpha, \cos 2\alpha, \cos 3\alpha\}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Vì $S = T \longrightarrow \sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha$

$\Leftrightarrow 2\sin 2\alpha\cos\alpha + \sin 2\alpha = 2\cos 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha \Leftrightarrow \sin 2\alpha(2\cos\alpha + 1) = \cos 2\alpha(2\cos\alpha + 1)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha = \cos 2\alpha\\ \cos\alpha = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}\\ \alpha = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Thử lại ta thấy chỉ có $\alpha = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ thỏa $S = T$.

Vì $\alpha \in [0;2\pi] \longrightarrow 0 \le \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2} \le 2\pi \Leftrightarrow -\dfrac{1}{4} \le k \le \dfrac{15}{4} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{0;1;2;3\}$. **Chọn D.**

Câu 19. Phương trình $2^{n+1}\cos x.\cos 2x.\cos 4x.\cos 8x \ldots \cos 2^n x = 1$ với $n \in \mathbb{N}^*$ có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình nào sau đây?

A. $\sin x = 0$. **B.** $\sin x = \sin 2^n x$. **C.** $\sin x = \sin 2^{n+1}x$. **D.** $\sin x = \sin 2^{n+2}x$.

Lời giải. Vì $x = k\pi$ không là nghiệm của phương trình đã cho nên nhân hai vế phương trình cho $\sin x$, ta được $2^{n+1}(\sin x\cos x).\cos 2x.\cos 4x.\cos 8x \ldots \cos 2^n x = \sin x$

$\Leftrightarrow 2^n(\sin 2x).\cos 2x.\cos 4x.\cos 8x \ldots \cos 2^n x = \sin x$

$\Leftrightarrow 2^n(\sin 2x.\cos 2x).\cos 4x.\cos 8x \ldots \cos 2^n x = \sin x$

$\Leftrightarrow 2^{n-1}(\sin 2^2 x).\cos 4x.\cos 8x \ldots \cos 2^n x = \sin x$

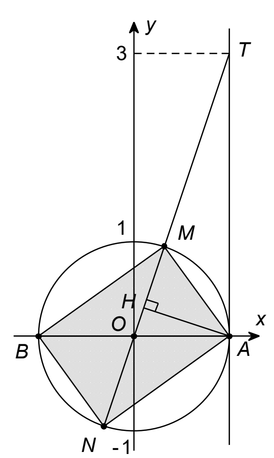
$\vdots$

$\Leftrightarrow \sin 2^{n+2}x = \sin x$. **Chọn D.**

Câu 20. Tính diện tích của đa giác tạo bởi các điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn các nghiệm của phương trình $\tan x + \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

A. $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}\cos x \ne 0\\ \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x \ne \dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{cases}$ $(k \in \mathbb{Z})$.



Ta có $\tan x + \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \tan x + \dfrac{\tan x + 1}{1 - \tan x} = 1$

$\Leftrightarrow \tan x - \tan^2 x + \tan x + 1 = 1 - \tan x$

$\Leftrightarrow \tan^2 x - 3\tan x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 0\\ \tan x = 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \arctan 3 + k\pi\end{array}\right.$ $(k \in \mathbb{Z})$.

● Nghiệm $x = k\pi$ biểu diễn trên đường tròn lượng giác là hai điểm A, B (xem hình vẽ).

● Nghiệm $x = \arctan 3 + k\pi$ biểu diễn trên đường tròn lượng giác là hai điểm M, N (xem hình vẽ).

Ta có

$$S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}MN.AH = \frac{1}{2}.MN.\frac{AO.AT}{\sqrt{AO^2 + AT^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \Longrightarrow S_{AMBN} = \frac{3\sqrt{10}}{5}.$$ **Chọn B.**

Vấn đề 3. Nghiệm dương nhỏ nhất Nghiệm âm lớn nhất

Câu 21. Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin 5x + 2\cos^2 x = 1$ có dạng $\frac{\pi a}{b}$ với a, b là các số nguyên và nguyên tố cùng nhau. Tính $S = a + b$.

A. $S = 3$. **B.** $S = 7$. **C.** $S = 15$. **D.** $S = 17$.

Lời giải. Phương trình tương đương với $\sin 5x = 1 - 2\cos^2 x \Leftrightarrow \sin 5x = -\cos 2x$

$$\Leftrightarrow \sin 5x = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{3\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7} \end{array}\right.$$

$\Longrightarrow$ nghiệm dương nhỏ nhất là $\frac{3\pi}{14} \Longrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 14 \end{cases} \Longrightarrow S = 17$. **Chọn D.**

Câu 22. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x} + \cot x = 2$ có dạng $\frac{\pi a}{b}$ với a, b là các số nguyên, $a < 0$ và a, b nguyên tố cùng nhau. Tính $S = a + b$.

A. $S = 3$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = 5$. **D.** $S = 7$.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq \pm 1 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{\sin x(1 - \cos x) + 1 + \cos x}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 2$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos x + 1 = 2\sin^2 x$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos x + \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + \cos x - \sin x) = 0.$

- $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ (thoả mãn).

- $1 + \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ (thoả mãn)} \\ x = \pi + k2\pi \text{ (loại)} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$.

$\Longrightarrow$ nghiệm âm lớn nhất là $-\frac{\pi}{4} \Longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases} \Longrightarrow S = 3$. **Chọn A.**

Câu 23. Cho phương trình $\sin x + \sin 5x = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)$ Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác là?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 1 + \sin 2x \\ 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) = 1 - \sin 4x \end{cases}$.

Do đó phương trình tương đương với $\sin x + \sin 5x = \sin 2x + \sin 4x$

$\Leftrightarrow 2\sin 3x\cos 2x = 2\sin 3x\cos x$

$\Leftrightarrow 2\sin 3x(\cos 2x - \cos x) = 0.$

- $\sin 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z})$.

- $\cos 2x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \cos x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z}).$

Hợp hai trường hợp ta được nghiệm của phương trình đã cho là $x = \dfrac{k\pi}{3} = \dfrac{k2\pi}{6} \ (k \in \mathbb{Z})$

$\longrightarrow$ có 6 điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác. **Chọn D.**

Câu 24. Cho phương trình $\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\left(\cos 4x + \sin^3 x\right)$. Tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình bằng

A. $-\dfrac{\pi}{7}$. **B.** $-\dfrac{\pi}{18}$. **C.** $-\dfrac{\pi}{20}$. **D.** $\dfrac{\pi}{7}$.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow \sin x + \dfrac{1}{2}(\sin 3x + \sin x) + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x + \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{2}$

$\Leftrightarrow \sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x$

$\Leftrightarrow \sin\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos 4x$

$\Leftrightarrow \sin\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 4x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{42} + \dfrac{k2\pi}{7} \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z}).$

Suy ra nghiệm âm lớn nhất là $-\dfrac{\pi}{6}$; nghiệm dương nhỏ nhất là $\dfrac{\pi}{42}$. **Chọn A.**

Câu 25. Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\cos 3x(2\cos 2x + 1) = \dfrac{1}{2}$ có dạng $\dfrac{\pi a}{b}$ với a, b là các số nguyên và nguyên tố cùng nhau. Tính $S = a + b$.

A. $S = 7$. **B.** $S = 8$. **C.** $S = 15$. **D.** $S = 17$.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow 4\cos 3x \cos 2x + 2\cos 3x = 1$

$\Leftrightarrow 2(\cos 5x + \cos x) + 2\cos 3x = 1$

$\Leftrightarrow 2\cos x + 2\cos 3x + 2\cos 5x = 1.$

- Nhận thấy $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ không thỏa mãn phương trình.
- Nhân hai vế cho $\sin x$ ta được $2\sin x\cos x + 2\sin x\cos 3x + 2\sin x\cos 5x = \sin x$

$\Leftrightarrow \sin 2x + (\sin 4x - \sin 2x) + (\sin 6x - \sin 4x) = \sin x$

$\Leftrightarrow \sin 6x = \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k2\pi}{5} \\ x = \dfrac{\pi}{7} + \dfrac{k2\pi}{7} \end{array}\right. \ (k \in \mathbb{Z}).$

Suy ra nghiệm dương nhỏ nhất là $\dfrac{\pi}{7} \longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 7 \end{cases} \longrightarrow S = 8$. **Chọn B.**

Câu 26. Cho phương trình $\sin^{2018} x + \cos^{2018} x = 2\left(\sin^{2020} x + \cos^{2020} x\right)$. Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác là?

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 2020.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow \sin^{2018} x\left(1 - 2\sin^2 x\right) + \cos^{2018} x\left(1 - 2\cos^2 x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin^{2018} x.\cos 2x - \cos^{2018} x\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \sin^{2018} x = \cos^{2018} x \end{array}\right.$.

- $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}).$
- $\sin^{2018} x = \cos^{2018} x \Leftrightarrow \tan^{2018} x = 1 \Leftrightarrow \tan x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

Hợp hai trường hợp ta được nghiệm của phương trình đã cho là $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$

$\longrightarrow$ có 4 điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác. **Chọn B.**

Câu 27. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\tan^{2018}x+\cot^{2018}x=2\sin^{2017}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ có dạng $\dfrac{\pi a}{b}$ với $a,\ b$ là các số nguyên, $a<0$ và $a,\ b$ nguyên tố cùng nhau. Tính $S=a+b$.

A. $S=-3$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=1$. **D.** $S=3$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases}\tan^{2018}x+\cot^{2018}x\geq 2\\ 2\sin^{2017}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leq 2\end{cases}$.

Do đó phương trình tương đương với $\begin{cases}\tan x=\cot x\\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

$\longrightarrow$ nghiệm âm lớn nhất là $-\dfrac{7\pi}{4}\longrightarrow\begin{cases}a=-7\\ b=4\end{cases}\longrightarrow S=-3$. **Chọn A.**

Câu 28. Cho phương trình $2^{2017}\left(\sin^{2018}x+\cos^{2018}x\right)(\sin x+\cos x)\cos x=\dfrac{\cos 2x}{1-\tan x}$. Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình có dạng $\dfrac{\pi a}{b}$ với $a,\ b$ là các số nguyên và nguyên tố cùng nhau. Tính $S=a+b$.

A. $S=2$. **B.** $S=3$. **C.** $S=4$. **D.** $S=7$.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \tan x\neq 1\end{cases}$.

Ta có $\dfrac{\cos 2x}{1-\tan x}=\dfrac{\cos^2x-\sin^2x}{1-\dfrac{\sin x}{\cos x}}=\cos x(\cos x+\sin x)$.

Do đó phương trình $\Leftrightarrow 2^{2017}\left(\sin^{2018}x+\cos^{2018}x\right)(\sin x+\cos x)\cos x=(\sin x+\cos x)\cos x$

$$\Leftrightarrow \cos x(\sin x+\cos x).\left[2^{2017}\left(\sin^{2018}x+\cos^{2018}x\right)-1\right]=0.$$

- $\cos x=0$: (loại).
- $\sin x+\cos x=0\Leftrightarrow \tan x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.
- $2^{2017}\left(\sin^{2018}x+\cos^{2018}x\right)-1=0\Leftrightarrow 2^{2017}\left(\sin^{2018}x+\cos^{2018}x\right)=1$: vô nghiệm vì

$$\sin^{2018}x+\cos^{2018}x=2.\left(\frac{a^{1009}+b^{1009}}{2}\right)\geq 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^{1009}=\frac{1}{2^{1008}}\ \text{ với } a=\sin^2x,\ b=\cos^2x.$$

$\longrightarrow$ nghiệm dương nhỏ nhất là $\dfrac{3\pi}{4}\longrightarrow\begin{cases}a=3\\ b=4\end{cases}\longrightarrow S=7$. **Chọn D.**

Câu 29. Biết rằng phương trình $\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\sin 2x}+\dfrac{1}{\sin 4x}+\cdots+\dfrac{1}{\sin 2^{2018}x}=0$ có nghiệm dạng $x=\dfrac{k2\pi}{2^a-b}$ với $k\in\mathbb{Z}$ và $a,\ b\in\mathbb{Z}^+$, $b<2018$. Tính $S=a+b$.

A. $S=2017$. **B.** $S=2018$. **C.** $S=2019$. **D.** $S=2020$.

Lời giải. Điều kiện: $\sin 2^{2018}x\neq 0$.

Ta có $\cot a-\cot 2a=\dfrac{\cos a}{\sin a}-\dfrac{\cos 2a}{\sin 2a}=\dfrac{2\cos^2a-\cos 2a}{\sin 2a}=\dfrac{1}{\sin 2a}$.

Do đó phương trình $\Leftrightarrow\left(\cot\dfrac{x}{2}-\cot x\right)+(\cot x-\cot 2x)+\ldots+\left(\cot 2^{2017}x-\cot 2^{2018}x\right)=0$

$$\Leftrightarrow \cot\frac{x}{2}-\cot 2^{2018}x=0$$

$$\Leftrightarrow \cot 2^{2018}x=\cot\frac{x}{2}\Leftrightarrow 2^{2018}x=\frac{x}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{k2\pi}{2^{2019}-1}\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

$\longrightarrow \begin{cases} a=2019 \\ b=1 \end{cases} \longrightarrow S=a+b=2020.$ **Chọn D.**

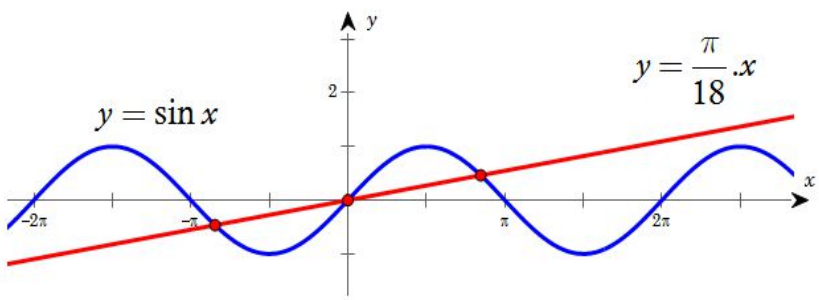
Câu 30. Phương trình $\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\pi}{18}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải. Điều kiện: $x\neq 0$.

Phương trình $\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\pi}{18}\longrightarrow \sin x=\dfrac{\pi}{18}x.\quad (1)$

Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\sin x$ (có đồ thị là màu xanh như hình vẽ) với đồ thị hàm số $y=\dfrac{\pi}{18}x$ (có đồ thị là màu đỏ như hình vẽ).



Dựa vào hình vẽ ta thấy hai đồ thị hàm số cắt nhau tại 3 điểm phân biệt nên phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt $\longrightarrow$ đối chiếu điều kiện bài toán ta loại nghiệm $x=0$ nên phương trình đã cho có 2 nghiệm. **Chọn B.**

Vấn đề 4. Số nghiệm của phương trình

Câu 31. Phương trình $2\cos^2 x+2\cos^2 2x+2\cos^2 3x-3=\cos 4x\left(2\sin 2x+1\right)$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $\left(0;2018\right)$?

A. 2565. **B.** 2566. **C.** 2567. **D.** 2568.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow \left(1+\cos 2x\right)+\left(1+\cos 4x\right)+\left(1+\cos 6x\right)-3=2\cos 4x\sin 2x+\cos 4x$

$$\Leftrightarrow \cos 6x+\cos 2x=2\cos 4x\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 4x\cos 2x-2\cos 4x\sin 2x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 4x\left(\cos 2x-\sin 2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{4}\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

($\cos 4x=\cos^2 2x-\sin^2 2x=\left(\cos 2x-\sin 2x\right)\left(\cos 2x+\sin 2x\right)$ nên chứa luôn $\cos 2x-\sin 2x$)

Vì $x\in\left(0;2018\right)\longrightarrow 0<\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{4}<2018\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}<k<\left(2018-\dfrac{\pi}{8}\right)\dfrac{4}{\pi}\Leftrightarrow -0,5<k<2565,39$

$\longrightarrow k\in\left\{0;1;2;3;...;2565\right\}$. Vậy có 2566 nghiệm. **Chọn B.**

Câu 32. Phương trình $\dfrac{\left(1-2\cos x\right)\left(1+\cos x\right)}{\left(1+2\cos x\right)\sin x}=1$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $\left(0;2018\pi\right)$?

A. 3025. **B.** 3026. **C.** 3027. **D.** 3028.

Lời giải. Điều kiện: $\left(1+2\cos x\right)\sin x\neq 0$.

Phương trình $\Leftrightarrow 1-\cos x-2\cos^2 x=\sin x+2\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow \cos 2x+\cos x+\sin 2x+\sin x=0$

$\Leftrightarrow 2\cos\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2}+2\sin\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=0$

$\Leftrightarrow 2\cos\dfrac{x}{2}\left(\sin\dfrac{3x}{2}+\cos\dfrac{3x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{x}{2}=0\ \text{(loại)}\\ \sin\dfrac{3x}{2}+\cos\dfrac{3x}{2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \tan\dfrac{3x}{2}=-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{2\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z}).$

Vì $x\in(0;2018\pi) \longrightarrow 0<-\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{2\pi}{3}<2018\pi \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}<k<\left(2018+\dfrac{1}{6}\right)\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}<k<3027,25.$

$\longrightarrow k\in\{1;2;3;\ldots;3027\}$. Vậy có 3027 nghiệm. **Chọn C.**

Câu 33. Phương trình $\sin\left[\dfrac{\pi}{4}\left(3x-\sqrt{9x^2-16x-80}\right)\right]=0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4}\left(3x-\sqrt{9x^2-16x-80}\right)=k\pi$

$\Leftrightarrow 3x-\sqrt{9x^2-16x-80}=4k$

$\Leftrightarrow \sqrt{9x^2-16x-80}=3x-4k$

$\Leftrightarrow \begin{cases}3x\geq 4k & (1)\\ 9x^2-16x-80=9x^2-24kx+16k^2 & (2)\end{cases}.$

Phương trình $(2)\Leftrightarrow x=\dfrac{2k^2+10}{3k-2} \longrightarrow 9x=\dfrac{2\left(9k^2-4\right)+98}{3k-2}=2(3k+2)+\dfrac{98}{3k-2}.$

Vì $x\in\mathbb{Z}^+$ nên ta cần có $3k-2=\{1;2;7;14;49;98\} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} \left[\begin{array}{l}k=1\Rightarrow x=12\\ k=3\Rightarrow x=4\\ k=17\Rightarrow x=12\ \text{(loại)}\end{array}\right.$. **Chọn B.**

Câu 34. Phương trình $\sin^4 x+\cos^4\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0;2017\pi)$?

A. 4032. **B.** 4033. **C.** 4034. **D.** 4035.

Lời giải. Ta có $\begin{cases}\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}\\ \cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\end{cases}.$

Phương trình $\Leftrightarrow \left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^4(\cos x-\sin x)^4=\dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow (1-\cos 2x)^2+(1-\sin 2x)^2=1$

$\Leftrightarrow 3-2(\cos 2x+\sin 2x)=1$

$\Leftrightarrow \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$

Vì $x\in(0;2017\pi)$ nên

- $0<k\pi<2017\pi \Leftrightarrow 0<k<2017 \longrightarrow$ có 2016 nghiệm
- $0<\dfrac{\pi}{4}+k\pi<2017\pi \Leftrightarrow -\dfrac{1}{4}<k<\dfrac{8067}{4} \longrightarrow$ có 2017 nghiệm.

Vậy có tổng cộng 4033 nghiệm. **Chọn B.**

Câu 35. Tìm số nghiệm của phương trình $\tan 4x-\tan 2x-4\tan x=4\tan 4x.\tan 2x.\tan x$ trên đoạn $[-\pi;\pi]$

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \cos 2x \neq 0\\ \cos 4x \neq 0\end{cases}$.

Phương trình $\Leftrightarrow \tan 4x - \tan 2x = 4\tan x\left(1+\tan 4x.\tan 2x\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{\tan 4x - \tan 2x}{1+\tan 4x.\tan 2x} = 4\tan x$ (vì $\cos 2x \neq 0 \to 1+\tan 4x.\tan 2x \neq 0$)

$\Leftrightarrow \tan 2x = 4\tan x$

$\Leftrightarrow \dfrac{\tan x + \tan x}{1-\tan x \tan x} = 4\tan x$

$\Leftrightarrow \tan x\left(2\tan^2 x - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 0 \text{ (thoả mãn)}\\ \tan x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ (thoả mãn)}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \arctan\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + k\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Vì $x \in [-\pi;\pi] \to$ có tất cả 6 nghiệm thỏa mãn. **Chọn C.**

Vấn đề 5. Tổng các nghiệm của phương trình trên đoạn $[a;b]$

Câu 36. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\tan 5x - \tan x = 0$ trên $[0;\pi)$ bằng

A. π. **B.** $\dfrac{3\pi}{2}$. **C.** 2π. **D.** $\dfrac{5\pi}{2}$.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}\cos 5x \neq 0\\ \cos x \neq 0\end{cases}$.

Phương trình $\Leftrightarrow \tan 5x = \tan x \Leftrightarrow 5x = x + k\pi \Leftrightarrow x = k\dfrac{\pi}{4}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Vì $x \in [0;\pi) \to 0 \leq k\dfrac{\pi}{4} < \pi \Leftrightarrow 0 \leq k < 4 \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k \in \{0;1;2;3\}$.

Suy ra $\begin{cases}k = 0 \to x = 0\\ k = 1 \to x = \dfrac{\pi}{4}\\ k = 2 \to x = \dfrac{\pi}{2} \text{ (loại)}\\ k = 3 \to x = \dfrac{3\pi}{4}\end{cases} \to \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{4} = \pi$. **Chọn A.**

Câu 37. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos(\sin x) = 1$ trên đoạn $[0;2\pi]$ bằng

A. 0. **B.** π. **C.** 2π. **D.** 3π.

Lời giải. Phương trình tương đương với $\sin x = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vì $-1 \leq \sin x \leq 1$ nên suy ra $k = 0$, khi đó phương trình trở thành $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = l\pi$ $(l \in \mathbb{Z})$.

Vì $x \in [0;2\pi] \to x \in \{0;\pi;2\pi\}$. Suy ra tổng các nghiệm $0 + \pi + 2\pi = 3\pi$. **Chọn D.**

Câu 38. Cho phương trình $x^2 - (2\cos a - 3)x + 7\cos^2 a - 3\cos a - \dfrac{9}{4} = 0$. Gọi S là tập các giá trị của tham số a thuộc đoạn $[0;4\pi]$ để phương trình có nghiệm kép. Tổng các phần tử của tập S bằng

A. $\dfrac{20\pi}{3}$. **B.** 15π. **C.** 16π. **D.** 17π.

Lời giải. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \Delta = (2\cos a - 3)^2 - 4\left(7\cos^2 a - 3\cos a - \dfrac{9}{4}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow 6\left(3-4\cos^2 a\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\xrightarrow{a\in[0;4\pi]} a\in\left\{\dfrac{\pi}{6};\dfrac{11\pi}{6};\dfrac{13\pi}{6};\dfrac{23\pi}{6}\right\} \\ \cos a=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\xrightarrow{a\in[0;4\pi]} a\in\left\{\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{7\pi}{6};\dfrac{17\pi}{6};\dfrac{19\pi}{6}\right\} \end{array}\right..$$

Vậy $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{11\pi}{6}+\dfrac{13\pi}{6}+\dfrac{23\pi}{6}+\dfrac{5\pi}{6}+\dfrac{7\pi}{6}+\dfrac{17\pi}{6}+\dfrac{19\pi}{6}=16\pi$. **Chọn C.**

Câu 39. Tính tổng S tất cả các nghiệm của phương trình $(2\cos 2x+5)\left(\sin^4 x-\cos^4 x\right)+3=0$ trên khoảng $(0;2\pi)$.

A. $S=\dfrac{7\pi}{6}$. **B.** $S=\dfrac{11\pi}{6}$. **C.** $S=4\pi$. **D.** $S=5\pi$.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow (2\cos 2x+5)\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)+3=0$

$$\Leftrightarrow -(2\cos 2x+5)\cos 2x+3=0$$

$$\Leftrightarrow -2\cos^2 2x-5\cos 2x+3=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x=\dfrac{1}{2} \\ \cos 2x=-3 \text{ (loại)} \end{array}\right. \qquad \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi \ (k\in\mathbb{Z}).$$

Vì $x\in(0;2\pi)\longrightarrow x\in\left\{\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{7\pi}{6};\dfrac{11\pi}{6}\right\}\longrightarrow S=4\pi$. **Chọn C.**

Câu 40. Tổng các nghiệm của phương trình $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sin x}+\dfrac{\sqrt{3}+1}{\cos x}=4\sqrt{2}$ trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $\dfrac{11\pi}{36}$. **B.** $\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{7\pi}{18}$. **D.** π.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\neq k\dfrac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$.

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}\cos x=\sqrt{2}\sin 2x$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{\pi}{4}.\sin\left(\frac{\pi}{12}+x\right)=\sqrt{2}\sin 2x.$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{12}+x\right)=\sin 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{12}+k2\pi \\ x=\dfrac{11\pi}{36}+\dfrac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

Vì $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\longrightarrow x\in\left\{\dfrac{\pi}{12};\dfrac{11\pi}{36}\right\}\longrightarrow \dfrac{\pi}{12}+\dfrac{11\pi}{36}=\dfrac{7\pi}{18}$. **Chọn C.**

Câu 41. Tổng các nghiệm của phương trình $\sin x\cos x+\left|\sin x+\cos x\right|=1$ trên $(0;2\pi)$ bằng

A. π. **B.** 2π. **C.** 3π. **D.** 4π.

Lời giải. Đặt $t=\left|\sin x+\cos x\right|\ \left(0\le t\le\sqrt{2}\right)$, suy ra $\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$.

Phương trình trở thành: $\dfrac{t^2-1}{2}+t=1\Leftrightarrow t^2+2t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3 \text{ (loại)}\end{array}\right.$.

Với $t=1$, ta được $\left|\sin x+\cos x\right|=1\Leftrightarrow\left|\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=1\Leftrightarrow\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\pi+k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)\xrightarrow{x\in(0;2\pi)} x\in\left\{\frac{\pi}{2};\pi;\frac{3\pi}{2}\right\}.$$ **Chọn C.**

Câu 42. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\sin 3x\left(1-4\sin^2 x\right)=\frac{1}{2}$ trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ bằng

A. $\frac{3\pi}{7}$. **B.** $\frac{3\pi}{5}$. **C.** $\frac{37\pi}{70}$. **D.** $\frac{36\pi}{35}$.

Lời giải. Nhận thấy $\cos x=0$ không là nghiệm của phương trình.
Nhân hai vế phương trình với $\cos x$ ta được

$$\sin 3x\left(\cos x-4\sin^2 x\cos x\right)=\frac{1}{2}\cos x$$
$$\Leftrightarrow 2\sin 3x\left(4\cos^3 x-3\cos x\right)=\cos x$$
$$\Leftrightarrow 2\sin 3x\cos 3x=\cos x$$
$$\Leftrightarrow \sin 6x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{14}+\frac{k2\pi}{7} \\ x=\frac{\pi}{10}+\frac{k2\pi}{5} \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

- $0\le\frac{\pi}{14}+\frac{k2\pi}{7}\le\frac{\pi}{2}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}\left[\begin{array}{l} k=0\to x=\frac{\pi}{14} \\ k=1\to x=\frac{5\pi}{14} \end{array}\right.$.
- $0\le\frac{\pi}{10}+\frac{k2\pi}{5}\le\frac{\pi}{2}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}\left[\begin{array}{l} k=0\to x=\frac{\pi}{10} \\ k=1\to x=\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$.

Vậy tổng $\frac{\pi}{14}+\frac{5\pi}{14}+\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{2}=\frac{36\pi}{35}$. **Chọn D.**

Câu 43. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\frac{\sin 2x+2\sin^2 x-5\sin x-\cos x+2}{2\cos x+\sqrt{3}}=0$ trên đoạn $\left[0;100\pi\right]$ bằng

A. $\frac{7375\pi}{3}$. **B.** $\frac{7475\pi}{3}$. **C.** $\frac{14701\pi}{6}$. **D.** $\frac{14850\pi}{3}$.

Lời giải. Điều kiện: $\cos x\neq-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Phương trình tương đương với $\sin 2x+2\sin^2 x-5\sin x-\cos x+2=0$

$$\Leftrightarrow \left(\sin 2x-\cos x\right)+\left(2\sin^2 x-5\sin x+2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \cos x\left(2\sin x-1\right)+\left(\sin x-2\right)\left(2\sin x-1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(2\sin x-1\right)\left(\sin x+\cos x-2\right)=0.$$

- $\sin x+\cos x-2=0$: vô nghiệm.
- $2\sin x-1=0\Leftrightarrow\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\longrightarrow k\in\left[0;49\right] \\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\ \text{(loại)} \end{array}\right.$.

Vậy tổng các nghiệm cần tính $\sum_{k=0}^{49}\left(\frac{\pi}{6}+k2\pi\right)=50.\frac{\pi}{6}+2\pi\sum_{k=0}^{49}k=\frac{7375\pi}{3}$. **Chọn A.**

Câu 44. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\sin^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin x$ trên đoạn $\left[0;2018\right]$ bằng

A. $\frac{2018\pi}{4}$. **B.** $\frac{4036\pi}{3}$. **C.** $\frac{412485\pi}{2}$. **D.** $\frac{824967\pi}{4}$.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3(\sin x-\cos x)^3=\sqrt{2}\sin x \Leftrightarrow (\sin x-\cos x)^3=4\sin x.$

Nhận thấy $\cos x=0$ không thỏa mãn phương trình.

Chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ ta được $(\tan x-1)^3=4\tan x\left(\tan^2 x+1\right)$

$\Leftrightarrow 3\tan^3 x+3\tan^2 x+\tan x+1 \Leftrightarrow \tan x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \ (k\in\mathbb{Z}).$

Vì $x\in[0;2018] \to 0\le -\frac{\pi}{4}+k\pi\le 2018 \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k\in\{1;2;3;\ldots;642\}.$

Vậy $S=\sum_{k=1}^{642}\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)=642.\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sum_{k=1}^{642}k\pi=\frac{412485\pi}{2}$. **Chọn C.**

Câu 45. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\cos^2 x\left(\tan^2 x-\cos 2x\right)=\cos^3 x-\cos^2 x+1$ trên đoạn $[0;43\pi]$ bằng

A. $\frac{4220}{3}\pi.$ **B.** $\frac{4225}{3}\pi.$ **C.** $\frac{4230}{3}\pi.$ **D.** $\frac{4235}{3}\pi.$

Lời giải. Điều kiện $\cos^2 x\ne 0 \Leftrightarrow x\ne \frac{\pi}{2}+k\pi \ (k\in\mathbb{Z}).$

Phương trình $\Leftrightarrow \sin^2 x-\cos^2 x\cos 2x=\cos^3 x-\cos^2 x+1$

$\Leftrightarrow 1-\cos^2 x+\cos^2 x\left(1-2\cos^2 x\right)=\cos^3 x-\cos^2 x+1$

$\Leftrightarrow 2\cos^4 x+\cos^3 x-\cos^2 x=0$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+\cos x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. \ (k\in\mathbb{Z}).$$

- $0\le \pi+k2\pi\le 43\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le k\le 21 \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k\in\{0;1;2;\ldots;21\}$

$\to$ tổng các nghiệm là $S_1=22\pi+(0+1+2+\ldots+21)2\pi=484\pi.$

- $0\le \frac{\pi}{3}+k2\pi\le 43\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{6}\le k\le \frac{64}{3} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k\in\{0;1;2;\ldots;21\}$

$\to$ tổng các nghiệm là $S_2=22.\frac{\pi}{3}+(0+1+2+\ldots+21)2\pi=\frac{1408}{3}\pi.$

- $0\le -\frac{\pi}{3}+k2\pi\le 43\pi \Leftrightarrow \frac{1}{6}\le k\le \frac{65}{3} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k\in\{1;2;\ldots;21\}$

$\to$ tổng các nghiệm là $S_3=21.\left(-\frac{\pi}{3}\right)+(1+2+3+\ldots+21)2\pi=455\pi.$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình đã cho trên đoạn $[0;43\pi]$ là

$$S=S_1+S_2+S_3=\frac{4225}{3}\pi$$. **Chọn B.**

Vấn đề 6. Tìm m để phương trình có nghiệm

Câu 46. Có bao nhiêu giá trị của tham số m thuộc tập $E=\{-3;-2;-1;0;1;2\}$ để phương trình $2m\sin x\cos x+4\cos^2 x=m+5$ có nghiệm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải. Phương trình tương đương với $m\sin 2x+2\cos 2x=m+3.$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m^2+2^2\ge (m+3)^2 \Leftrightarrow 6m+5\le 0 \Leftrightarrow m\le -\frac{5}{6}.$

Mà $m\in E \to m\in\{-3;-2;-1\}$. **Chọn B.**

Câu 47. Cho phương trình $m\sin^2 x+2\sin x\cos x+3m\cos^2 x=1.$ Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình có nghiệm.

A. $m\in\left\{0;\dfrac{4}{3}\right\}$. **B.** $m\in\mathbb{R}\setminus\left\{0;\dfrac{4}{3}\right\}$. **C.** $m\in\left[0;\dfrac{4}{3}\right]$. **D.** $m\in\left(0;\dfrac{4}{3}\right)$.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow m.\dfrac{1-\cos 2x}{2}+\sin 2x+3m.\dfrac{1+\cos 2x}{2}=1 \Leftrightarrow \sin 2x+m\cos 2x=1-2m.$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 1+m^2\ge 1-4m+4m^2 \Leftrightarrow 3m^2-4m\le 0 \Leftrightarrow 0\le m\le \dfrac{4}{3}$. **Chọn C.**

Câu 48. Cho phương trình $\dfrac{5+4\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)}{\sin x}=\dfrac{6\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của α thuộc đoạn $[0;2\pi]$ để phương trình có nghiệm. Tổng các phần tử của tập S bằng

A. π. **B.** 2π. **C.** 4π. **D.** 6π.

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases}\sin x\ne 0\\ \cos\alpha\ne 0\end{cases}$.

Phương trình tương đương với $\dfrac{5-4\cos x}{\sin x}=3\sin 2\alpha \Leftrightarrow 3\sin 2\alpha\sin x+4\cos x=5.$ (1)

Nếu $\sin x=0 \longrightarrow \cos x=\pm 1$: không thỏa (1). Do đó phương trình nếu có nghiệm thì luôn thỏa mãn điều kiện $\sin x\ne 0$.

Để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases}\cos\alpha\ne 0\\ (3\sin 2\alpha)^2+16\ge 25\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos\alpha\ne 0\\ \sin^2 2\alpha\ge 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos\alpha\ne 0\\ \sin^2 2\alpha=1\end{cases} \Leftrightarrow \cos 2\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$: thỏa điều kiện.

$\longrightarrow S=\left\{\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4};\dfrac{7\pi}{4}\right\} \longrightarrow$ tổng $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{5\pi}{4}+\dfrac{7\pi}{4}=4\pi$. **Chọn C.**

Câu 49. Cho phương trình $4\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=m^2+\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$. Gọi $S=[a;b]$ là tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm. Tính $a+b$.

A. $a+b=-2$. **B.** $a+b=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $a+b=0$. **D.** $a+b=4$.

Lời giải. Ta có $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}\left[\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin\dfrac{\pi}{2}\right]$

$$=\dfrac{1}{2}\left[\sin 2x\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{\pi}{6}\cos 2x+1\right]=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{2}\cos 2x+1\right]$$

Phương trình tương đương với $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+2=m^2+\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x \Leftrightarrow \cos 2x=\dfrac{m^2-2}{2}$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -1\le \dfrac{m^2-2}{2}\le 1 \Leftrightarrow 0\le m^2\le 4 \Leftrightarrow -2\le m\le 2$

$\longrightarrow S=[-2;2] \longrightarrow \begin{cases}a=-2\\ b=2\end{cases} \longrightarrow a+b=0$. **Chọn C.**

Câu 50. Cho phương trình $\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin x\cos x-\dfrac{m}{4}+2=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm?

A. 7. **B.** 9. **C.** 13. **D.** 15.

Lời giải. Ta có $\sin^6 x+\cos^6 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^3-3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$

$$=1-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2x.$$

Phương trình $\Leftrightarrow 1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2x+3\sin x\cos x-\dfrac{m}{4}+2=0 \Leftrightarrow 3\sin^2 2x-6\sin 2x=12-m.$

Đặt $t = \sin 2x \xrightarrow{t\in[-1;1]} 3t^2 - 6t = 12 - m \Leftrightarrow 3(t-1)^2 = 15 - m.$

Vì $-1 \le t \le 1 \to 0 \le 3(t-1)^2 \le 12.$ Do đó để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 0 \le 15 - m \le 12$
$\Leftrightarrow 3 \le m \le 15 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m \in \{3;4;5;\ldots;15\}.$ **Chọn C.**

Câu 51. Cho phương trình $3\tan^2 + \tan x + \cot x + \dfrac{3}{\sin^2 x} = m.$ Có bao nhiêu giá trị nguyên m nhỏ hơn 2018 để phương trình có nghiệm?

A. 2004. **B.** 2008. **C.** 2011. **D.** 2012.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \ne 0 \\ \cos x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ne \dfrac{k\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z}).$

Phương trình viết lại $3\left(\tan^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x}\right) + \tan x + \cot x = m$

$$\Leftrightarrow 3\left(\tan^2 x + \cot^2 x + 1\right) + \tan x + \cot x = m.$$

Đặt $t = \tan x + \cot x.$ Điều kiện: $|t| \ge 2.$

Phương trình trở thành $3\left(t^2 - 1\right) + t = m \Leftrightarrow 3t^2 + t = m + 3.$

Xét hàm $f(t) = 3t^2 + t$ trên $(-\infty;-2] \cup [2;+\infty).$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(t)$		$-$				$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	10		14	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m + 3 \ge 10 \Leftrightarrow m \ge 7$
$\xrightarrow[m<2018]{m\in\mathbb{Z}} m \in \{7;8;9;\ldots;2017\} \to$ có 2011 giá trị. **Chọn C.**

Câu 52. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sin 4x = m.\tan x$ có nghiệm $x \ne k\pi.$

A. $m \in \left[-\dfrac{1}{2};4\right).$ **B.** $m \in \left[-\dfrac{1}{2};4\right].$ **C.** $m \in \left(-\dfrac{1}{2};4\right).$ **D.** $m \in (-1;4).$

Lời giải. Điều kiện $\cos x \ne 0.$

Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos 2x = \dfrac{m.\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow 4.\sin x.\cos x.\cos 2x = m.\dfrac{\sin x}{\cos x}.$ (*)

Vì $x \ne k\pi$ nên $\sin x \ne 0$. Khi đó (*) $\Leftrightarrow 4\cos^2 x\left(2\cos^2 x - 1\right) = m$

Đặt $t = \cos^2 x,$ với $\begin{cases} x \ne k\pi \\ \cos x \ne 0 \end{cases}$ suy ra $t \in (0;1)$. Phương trình trở thành $m = 8t^2 - 4t.$

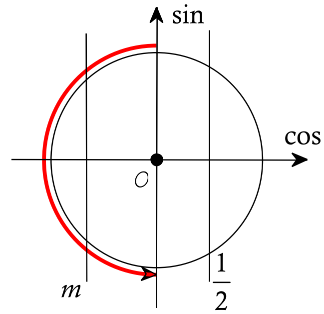
Xét hàm $f(t) = 8t^2 - 4t$ với $t \in (0;1)$, ta được $-\dfrac{1}{2} \le f(t) < 4.$

Do đó phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \le m < 4.$ **Chọn A.**

Câu 53. Cho phương trình $\cos 2x - (2m+1)\cos x + m + 1 = 0.$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right).$

A. $-1 \le m \le 1$. **B.** $-1 \le m \le 0$. **C.** $-1 \le m < 0$. **D.** $-1 < m < 0$.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow 2\cos^2 x-(2m+1)\cos x+m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{1}{2}\\ \cos x=m\end{array}\right.$.



Nhận thấy phương trình $\cos x=\dfrac{1}{2}$ không có nghiệm trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$ (Hình vẽ).

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \cos x=m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -1\le m<0$.

Chọn C.

Câu 54. Cho phương trình $\cos^2 x+2(1-m)\cos x+2m-1=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để phương trình có nghiệm?

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

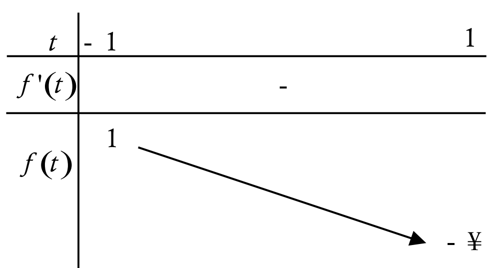
Lời giải. Đặt $t=\cos x\ (-1\le t\le 1)$.

Phương trình trở thành $t^2+2(1-m)t+2m-1=0 \Leftrightarrow t^2+2t-1=2m(t-1)$. (1)

- Xét $t=1$: (1) trở thành $2=0$ (không thỏa mãn).
- Xét $t\ne 1$: $(1)\Leftrightarrow \dfrac{t^2+2t-1}{t-1}=2m.$

Xét hàm $f(t)=\dfrac{t^2+2t-1}{t-1}$ với $t\in[-1;1)$, ta có $f'(t)=\dfrac{t^2+2t-3}{(t-1)^2}<0\ \forall t\in(-1;1)$.

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 2m\le 1 \Leftrightarrow m\le \dfrac{1}{2}$

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z},\ m\in[-10;10]} m\in\{-10;-9;-8;\ldots;0\} \to$ có 11 giá trị. **Chọn D.**

Câu 55. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\cos 4x=\cos^2 3x+m\sin^2 x$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{12}\right)$.

A. $m\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $m\in\left(\dfrac{1}{2};2\right)$. **C.** $m\in(0;1)$. **D.** $m\in\left(-1;\dfrac{1}{4}\right)$.

Lời giải. Ta có $\cos^2 3x=\dfrac{1+\cos 6x}{2}=\dfrac{1+4\cos^3 2x-3\cos 2x}{2}$ và $\cos 4x=2\cos^2 2x-1$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-1=\dfrac{1+4\cos^3 2x-3\cos 2x}{2}+\dfrac{1-\cos 2x}{2}m$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 2x-2=1+4\cos^3 2x-3\cos 2x+(1-\cos 2x)m$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x - 1)m = 4\cos^3 2x - 4\cos^2 2x - 3\cos 2x + 3. \qquad (*)$$

Đặt $t = \cos 2x$, với $x \in \left(0;\frac{\pi}{12}\right) \longrightarrow t \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$. Khi đó $(*) \Leftrightarrow m = \dfrac{4t^3 - 4t^2 - 3t + 3}{t - 1} = 4t^2 - 3.$

Xét hàm $f(t) = 4t^2 - 3$ trên đoạn $\left[\frac{\sqrt{3}}{2};1\right]$ ta được $\begin{cases} \min\limits_{\left[\frac{\sqrt{3}}{2};1\right]} f(t) = 0 \\ \max\limits_{\left[\frac{\sqrt{3}}{2};1\right]} f(t) = 1 \end{cases}.$

Vậy để phương trình $m = f(t)$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \in (0;1)$. **Chọn C.**

Câu 56. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2\sin x + m\cos x = 1 - m$ có nghiệm x thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

A. $m \ge -\dfrac{3}{2}$. **B.** $m > -\dfrac{3}{2}$. **C.** $-1 \le m \le 3$. **D.** $-1 < m < 3$.

Lời giải. Nếu dùng điều kiện có nghiệm: $4 + m^2 \ge (1 - m)^2 \Leftrightarrow 4 \ge 1 - 2m \Leftrightarrow m \ge -\dfrac{3}{2}$ (đáp án A) thì sai hoàn toàn bởi vì $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ thì $\sin x$ quét hết tập giá trị $[-1;1]$ nhưng với $\cos x$ thì không.

Lời giải đúng. Đặt $t = \tan\dfrac{x}{2}$, với $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow t \in [-1;1]$.

Phương trình trở thành $2\dfrac{2t}{1 + t^2} + m\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} = 1 - m \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 = 2m.$

Xét hàm $f(t) = t^2 - 4t + 1$ trên đoạn $[-1;1]$. Tìm được $\begin{cases} \max\limits_{[-1;1]} f(t) = 6 \\ \min\limits_{[-1;1]} f(t) = -2 \end{cases}.$

Do đó yêu cầu bài toán $-2 \le 2m \le 6 \Leftrightarrow -1 \le m \le 3$. **Chọn C.**

Câu 57. Cho phương trình $mx^2 + 4\pi^2 = 4\pi^2 \cos x$. Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. -54. **B.** -35. **C.** 35. **D.** 51.

Lời giải. Vì $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên phương trình $\Leftrightarrow m = \dfrac{4\pi^2(\cos x - 1)}{x^2}$.

Xét hàm $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$ với $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, ta có $f'(x) = \dfrac{2(1 - \cos x) - x\sin x}{x^3} > 0,\ \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) < f(x) < \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) \longrightarrow -\dfrac{1}{2} < f(x) < -\dfrac{4}{\pi^2}$.

Vậy để phương trình đã cho có nghiệm thì $-2\pi^2 < m < -16$

$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-19;-18;-17\}$. **Chọn A.**

Câu 58. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-2		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$				$+$	0	$-$	0	$+$			
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f[\cos(x + 1) + 1] = -\dfrac{m}{2}$ có nghiệm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 13.

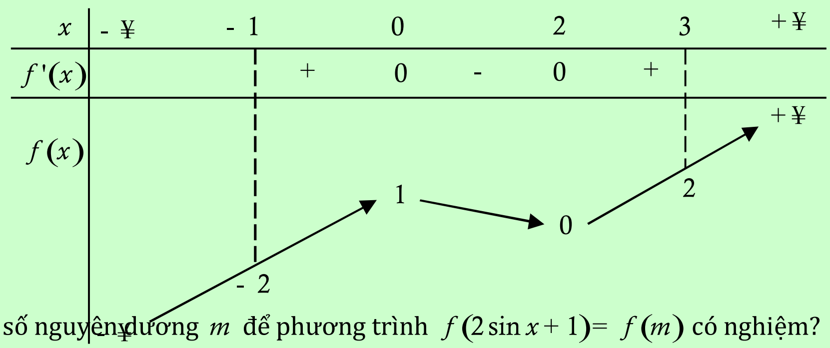
Lời giải. Đặt $t = 3\cos(x+1)+1 \longrightarrow -2 \le t \le 4.$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với $t \in [-2;4]$ thì $-1 \le f(t) \le 3.$

Do đó để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \le -\dfrac{m}{2} \le 3 \Leftrightarrow -6 \le m \le 2$

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m \in \{-6;-5;-4;\ldots;2\} \longrightarrow$ có 9 giá trị. **Chọn C.**

Câu 59. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ



Có bao nhiêu số nguyên dương m để phương trình $f(2\sin x+1) = f(m)$ có nghiệm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải. Đặt $t = 2\sin x + 1 \longrightarrow -1 \le t \le 3.$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với $t \in [-1;3]$ thì $-2 \le f(t) \le 2.$

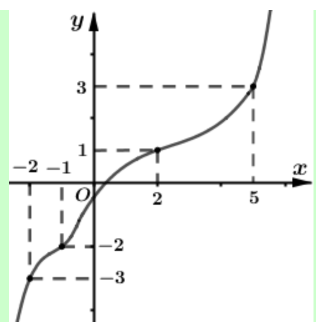
Do đó để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -2 \le f(m) \le 2.$ Cũng từ bảng biến thiên suy ta $f(m)$ nhận mọi giá trị từ -2 đến 2 khi và chỉ khi $-1 \le m \le 3.$

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}^+} m \in \{1;2;3\} \longrightarrow$ có 3 giá trị. **Chọn B.**

Câu 60. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa $f(x) > 3$ với mọi $x > 5$ và $f(x) < -3$ với mọi $x < -2$, có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(3\sin x + 2) = f(m)$ có nghiệm?

A. 6. **B.** 7.

C. 8. **D.** 9.



Lời giải. Đặt $t = 3\sin x + 2 \longrightarrow -1 \le t \le 5.$

Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x)$ đồng biến trên $[-1;5]$ nên $f(3\sin x + 2) = f(m) \Leftrightarrow 3\sin x + 2 = m.$

Mà $3\sin x + 2 \in [-1;5] \longrightarrow m \in [-1;5] \longrightarrow$ có 7 giá trị nguyên. **Chọn B.**

Vấn đề 7. Tìm m để phương trình có đúng n nghiệm thuộc khoảng $(a;b)$

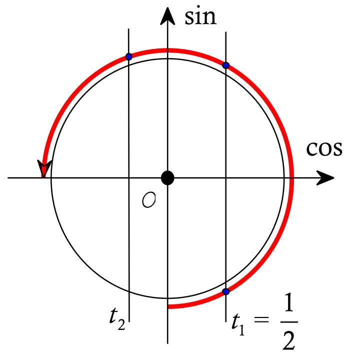
Câu 61. Cho phương trình $2\cos^2 3x + (3-2m)\cos 3x + m - 2 = 0.$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình có đúng 3 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right).$

A. $-1 \le m \le 1.$ **B.** $1 < m \le 2.$ **C.** $1 \le m \le 2.$ **D.** $1 \le m < 2.$

Lời giải. Với $x \in \left(-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right) \longrightarrow 3x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\pi\right).$

Đặt $t = \cos 3x$ $(-1 \le t \le 1)$. Phương trình trở thành $2t^2 + (3-2m)t + m - 2 = 0.$

Ta có $\Delta = (2m-5)^2 \longrightarrow$ phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{1}{2} \\ t_2 = m-2 \end{array}\right.$.



Ta thấy ứng với một nghiệm $t_1 = \dfrac{1}{2}$ thì cho ta hai nghiệm x thuộc khoảng $\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right)$

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -1 < t_2 \le 0$ (tham khảo hình vẽ)

$$\Leftrightarrow -1 < m-2 \le 0 \Leftrightarrow 1 < m \le 2. \text{ **Chọn B.**}$$

Cách 2. Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $2t^2 + (3-2m)t + m - 2 = 0$ có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $-1 < t_2 \le 0 < t_1 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} P \le 0 \\ a.f(1) > 0 \\ a.f(-1) > 0 \end{cases}$.

Câu 62. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sin 2x + \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\ 2 = m$ có đúng 2 nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\dfrac{3\pi}{4}\right)$

A. $-3 < m < -1+\sqrt{2}$. **B.** $-3 < m \le -1+\sqrt{2}$. **C.** $-1 < m \le -1+\sqrt{2}$. **D.** $-1 < m < -1+\sqrt{2}$.

Lời giải. Phương trình viết lại $\sin 2x + \sin x + \cos x - 2 = m$.

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ suy ra $\sin 2x = t^2 - 1$.

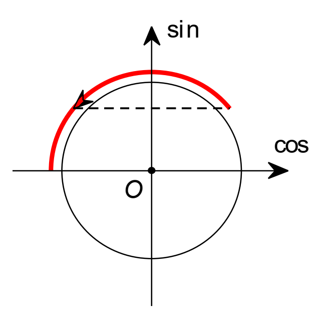
Với $x \in \left(0;\dfrac{3\pi}{4}\right) \longrightarrow x + \dfrac{\pi}{4} \in \left(\dfrac{\pi}{4};\pi\right) \longrightarrow t \in \left(0;\sqrt{2}\right]$

Phương trình trở thành $t^2 + t - 3 = m$. (*)

Xét hàm $f(t) = t^2 + t - 3$ trên $\left(0;\sqrt{2}\right]$. Ta có $f'(t) = 2t + 1 > 0,\ \forall t \in \left(0;\sqrt{2}\right)$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\left(0;\sqrt{2}\right]$ và kết luận $f(0) < m \le f\left(\sqrt{2}\right) \longrightarrow -3 < m \le -1+\sqrt{2}$.

Thử lại $m = -1+\sqrt{2} \longrightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \longrightarrow$ có một nghiệm $x = \dfrac{\pi}{4}$ duy nhất thuộc $\left(0;\dfrac{3\pi}{4}\right)$



Lí do dẫn đến sai lầm là bài toán yêu cầu có hai nghiệm khác với yêu cầu có nghiệm.

Dựa vào đường tròn lượng giác (hình vẽ bên) ta thấy yêu cầu bài toán $\Leftarrow$ phương trình (*) có đúng một nghiệm t thuộc $\left(1;\sqrt{2}\right)$

$\longrightarrow f(1) < m < f\left(\sqrt{2}\right) \longrightarrow -1 < m < -1+\sqrt{2}$. **Chọn D.**

Câu 63. Cho phương trình $m\sin^2 x - 3\sin x\cos x - m - 1 = 0$. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên m thuộc đoạn $[-5;5]$ để phương trình có đúng 3 nghiệm thuộc $\left(0;\frac{3\pi}{2}\right)$. Tổng các phần tử của S bằng

A. -15. **B.** -14. **C.** 0. **D.** 15.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow m\left(\sin^2 x-1\right)-3\sin x\cos x-1=0 \Leftrightarrow 3\sin x\cos x+m\cos^2 x+1=0.$

Nhận thấy $\cos x=0$ không thỏa phương trình. Chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta được

$$\tan^2 x+3\tan x+m+1=0.$$

Đặt $t=\tan x$, ta được phương trình bậc hai $t^2+3t+m+1=0$.

Để phương trình đã cho có ba nghiệm thuộc $\left(0;\frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$ phương trình $t^2+3t+m+1=0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow m+1<0 \Leftrightarrow m<-1 \xrightarrow[m\in[-5;5]]{m\in\mathbb{Z}} m=\{-5;-4;-3;-2\} \to S=-14$. **Chọn B.**

Câu 64. Cho phương trình $(\cos x+1)(4\cos 2x-m\cos x)=m\sin^2 x$. Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình có đúng 2 nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

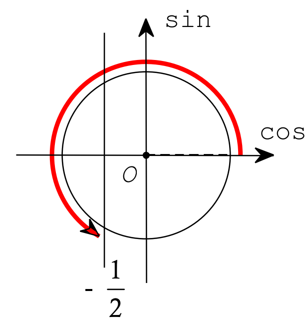
Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow (1+\cos x)(4\cos 2x-m\cos x)=m\left(1-\cos^2 x\right)$

$$\Leftrightarrow (1+\cos x)(4\cos 2x-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \cos 2x=\frac{m}{4}\end{array}\right..$$

- Với $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]\to$ phương trình $\cos x=-1$ vô nghiệm.
- Với $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]\to 2x\in\left[0;\frac{4\pi}{3}\right]$. Dựa vào đường tròn lượng giác,

ta thấy yêu cầu bài toán $-1<\frac{m}{4}\le-\frac{1}{2} \Leftrightarrow -4<m\le-2$.

Vì $m\in\mathbb{Z}\to m\in\{-3;-2\}$. **Chọn B**



Câu 65. Có bao nhiêu số thực m để phương trình $(\sin x-1)\left(2\cos^2 x-(2m+1)\cos x+m\right)=0$ có đúng 4 nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$?

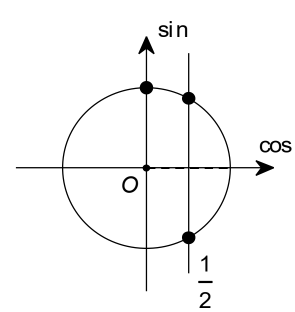
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow (\sin x-1)(2\cos x-1)(\cos x-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \cos x=\frac{1}{2}\\ \cos x=m\end{array}\right..$

- $\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$, mà $x\in[0;2\pi]\to x=\frac{\pi}{2}$.
- $\cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$, mà

$x\in[0;2\pi]\to x=\frac{\pi}{3}, x=\frac{5\pi}{3}$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $\cos x=m$ có đúng một nghiệm $[0;2\pi]$ khác $\left\{\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{3}\right\}$ (xem hình vẽ). Từ đường



tròn lượng giác ta suy ra chỉ có hai giá trị m thỏa mãn là $m = -1$ và $m = 0$. Bởi vì:
Với $m = -1$, phương rình $\cos x = -1$ chỉ có nghiệm duy nhất $x = \pi$ thuộc $[0;2\pi]$.

Với $m = 0$, phương rình $\cos x = 0$ có hai nghiệm $x = \frac{\pi}{2}$ (trùng với nghiệm đã tính) và $x = \frac{3\pi}{2}$ thuộc $[0;2\pi]$.

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 66. Cho phương trình $\sin^4 x + \cos^4 x + \cos^2 4x = m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có 4 nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Ta có $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$.

Phương trình $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x + \cos^2 4x = m \Leftrightarrow 4\cos^2 4x + \cos 4x = 4m - 3$.

Đặt $t = \cos 4x$, với $x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right] \to 4x \in [-\pi;\pi]$ nên $t \in [-1;1]$.

Khi đó phương trình trở thành $4t^2 + t = 4m - 3$. $(*)$

- Ứng với mỗi $t \in [-1;1)$ thì phương trình $\cos 4x = t$ sẽ cho ta hai giá trị của $x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$
- Với $t = 1$ thì phương trình $\cos 4x = t$ cho ta đúng một giá trị của $x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với $(*)$ có hai nghiệm t phân biệt thuộc $[-1;1)$.

Xét hàm $f(t) = 4t^2 + t$ trên $[-1;1)$. Ta có $f'(t) = 8t + 1 \to f'(t) = 8t + 1 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{8}$.

Bảng biến thiên

t	-1		$-\frac{1}{8}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	3	$\searrow$	$-\frac{1}{16}$	$\nearrow$	5

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow -\frac{1}{16} < 4m - 3 \le 3 \Leftrightarrow \frac{47}{64} < m \le \frac{3}{2}$

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m = 1$. Vậy có 1 giá trị nguyên. **Chọn A.**

Câu 67. Cho phương trình $(\sin x - 1)(\cos^2 x - \cos x + m) = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình có đúng 5 nghiệm thuộc đoạn $[0;2\pi]$

A. $0 \le m < \frac{1}{4}$. **B.** $-\frac{1}{4} < m \le 0$. **C.** $0 < m < \frac{1}{4}$. **D.** $-\frac{1}{4} < m < 0$.

Lời giải. Phương trình tương đương với $\left[\begin{array}{l}\sin x = 1\\ \cos^2 x - \cos x + m = 0.\quad (1)\end{array}\right.$

Đặt $t = \cos x$, với $x \in [0;2\pi] \to t \in [-1;1]$. Phương trình (1) trở thành $t^2 - t = -m$. (2)

Phương trình $\sin x = 1$ có đúng 1 nghiệm $x = \frac{\pi}{2}$ thuộc đoạn $[0;2\pi]$

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt (khác $\frac{\pi}{2}$) thuộc đoạn $[0;2\pi] \Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt thuộc $[-1;1] \setminus \{-1;0\}$.

Xét hàm $f(t) = t^2 - t$ trên $(-1;0) \cup (0;1]$. Ta có $f'(t) = 2t - 1 \to f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

34

t	-1		0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(t)$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	

Bảng biến thiên

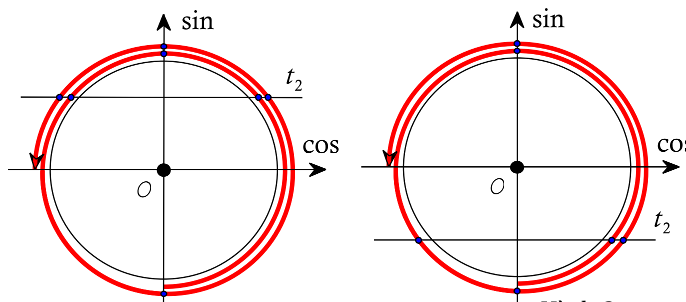
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy yêu cầu của bài toán $-\frac{1}{4} < -m < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} > m > 0$. **Chọn C.**

Câu 68. Biết rằng khi $m = m_0$ thì phương trình $2\sin^2 x - (5m+1)\sin x + 2m^2 + 2m = 0$ có đúng 5 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 3\pi\right)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $m_0 = -3$. **B.** $m_0 = \frac{1}{2}$. **C.** $m_0 \in \left(\frac{3}{5}; \frac{7}{10}\right]$. **D.** $m_0 \in \left(-\frac{3}{5}; -\frac{2}{5}\right)$.

Lời giải. Đặt $t = \sin x$ $(-1 \le t \le 1)$.

Phương trình trở thành $2t^2 - (5m+1)t + 2m^2 + 2m = 0.$ $(*)$



Hình 1 Hình 2

Yêu cầu bài toán tương đương với:

- **Trường hợp 1:** Phương trình $(*)$ có một nghiệm $t_1 = -1$ (cho ra một nghiệm x) và một nghiệm $0 < t_2 < 1$ (cho ra bốn nghiệm x) (Hình 1).
  - Do $t_1 = -1 \longrightarrow t_2 = -\frac{c}{a} = -m^2 - m$.
  - Thay $t_1 = -1$ vào phương trình $(*)$, ta được $\left[\begin{array}{l} m = -3 \longrightarrow t_2 = -6 \notin (0;1)\ (\text{loại}) \\ m = -\frac{1}{2} \longrightarrow t_2 = \frac{1}{4} \in (0;1)\ (\text{thoả}) \end{array}\right.$.
- **Trường hợp 2:** Phương trình $(*)$ có một nghiệm $t_1 = 1$ (cho ra hai nghiệm x) và một nghiệm $-1 < t_2 \le 0$ (cho ra ba nghiệm x) (Hình 2).
  - Do $t_1 = 1 \longrightarrow t_2 = \frac{c}{a} = m^2 + m$.
  - Thay $t_1 = 1$ vào phương trình $(*)$, ta được $\left[\begin{array}{l} m = 1 \longrightarrow t_2 = 2 \notin (-1;0]\ (\text{loại}) \\ m = \frac{1}{2} \longrightarrow t_2 = \frac{3}{4} \notin (-1;0]\ (\text{loại}) \end{array}\right.$.

Vậy $m = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Do $m = -\frac{1}{2} \in \left(-\frac{3}{5}; -\frac{2}{5}\right)$. **Chọn D.**

Câu 69. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $1 + 2\cos^2 2x - \sqrt{3}\sin 4x - m = m\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ trên đường tròn lượng giác là 4?

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow \left(\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x\right)^2-m=m\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

Đặt $t=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\longrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{t}{2}$. (điều kiện $-2\le t\le 2$).

Phương trình trở thành: $t^2-m=m\frac{t}{2}\Leftrightarrow 2t^2-mt-2m=0.$ $\qquad (*)$

- Ứng với mỗi $t\in(-2;2)$ thì phương trình $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{t}{2}$ cho ta các nghiệm có số vị trí biểu diễn trên đường tròn lượng giác là 4.
- Với $t=2$ thì phương trình $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1$ cho ta các nghiệm có số vị trí biểu diễn trên đường tròn lượng giác là 2.
- Với $t=-2$ thì phương trình $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$ cho ta các nghiệm có số vị trí biểu diễn trên đường tròn lượng giác là 2.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $(*)$ có duy nhất một nghiệm t thuộc khoảng $(-2;2)$ hoặc phương trình $(*)$ có hai nghiệm là -2 và 2.

✔ **Trường hợp 1:** Phương trình $(*)$ có đúng 1 nghiệm thuộc $(-2;2)$.

Với mọi $t\in(-2;2)$, ta có $(*)\Leftrightarrow m=\frac{2t^2}{t+2}=f(t)$.

Bảng biến thiên

t	-2		0		2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy yêu cầu của trường hợp này $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2\\ m=0\end{array}\right.$.

✔ **Trường hợp 2:** Phương trình $(*)$ nhận -2 và 2 làm nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(-2)^2-m(-2)-2m=0\\ 2.2^2-2m-2m=0\end{cases}: \text{vô lí.}$$

Vậy $\left[\begin{array}{l} m>2\\ m=0\end{array}\right.\xrightarrow[m\in[-10;10]]{m\in\mathbb{Z}} m\in\{0;3;4;5;\ldots;10\}\longrightarrow$ có 9 giá trị. **Chọn B.**

Câu 70. Cho phương trình $(m+1)\cos x+(m-1)\sin x=2m+3$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1-x_2|=\frac{2\pi}{3}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải. Điều kiện có nghiệm: $(m+1)^2+(m-1)^2\ge(2m+3)^2\Leftrightarrow \frac{-6-\sqrt{22}}{2}\le m\le\frac{-6+\sqrt{22}}{2}$.

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{m+1}{\sqrt{2m^2+2}}\cos x+\frac{m-1}{\sqrt{2m^2+2}}\sin x=\frac{2m+3}{\sqrt{2m^2+2}}$

$$\Leftrightarrow \cos(x-\alpha)=\cos\beta\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\beta+\alpha+k2\pi\\ x=-\beta+\alpha+l2\pi\end{array}\right. \text{ với } \cos\alpha=\frac{m+1}{\sqrt{2m^2+2}};\cos\beta=\frac{2m+3}{\sqrt{2m^2+2}}.$$

Yêu cầu bài toán: $|x_1-x_2|=\frac{2\pi}{3}\longrightarrow|2\beta+(k-l)2\pi|=\frac{2\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \cos|2\beta+(k-1)2\pi| = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \cos 2\beta = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2\beta - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{2m+3}{\sqrt{2m^2+2}}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{(2m+3)^2}{2m^2+2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \text{ (thoả mãn)} \\ m=-\dfrac{17}{7} \text{ (thoả mãn)} \end{array}\right.. \textbf{ Chọn C.}$$

Vấn đề 8. Kỹ thuật hàm đặc trưng

Câu 71. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $m+\sin(m+\sin 3x)=\sin(3\sin x)+4\sin^3 x$ có nghiệm thực?

A. 4. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải. Cộng thêm $\sin 3x$ vào hai vế phương trình ta được

$$m+\sin 3x+\sin(m+\sin 3x)=\sin(3\sin x)+4\sin^3 x+\sin 3x$$

$$\Leftrightarrow (m+\sin 3x)+\sin(m+\sin 3x)=(3\sin x)+\sin(3\sin x).$$

Xét hàm $f(t)=t+\sin t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=1+\cos t\geq 0,\ \forall t\in\mathbb{R} \longrightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến.

Suy ra $m+\sin 3x=3\sin x \longrightarrow m=4\sin^3 x\in[-4;4]$. **Chọn D.**

Câu 72. Cho phương trình $(8\sin^3 x-m)^3=162\sin x+27m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{\pi}{3}\right)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải. Đặt $u=2\sin x$, vì $x\in\left(0;\frac{\pi}{3}\right)\longrightarrow 2\sin x\in(0;\sqrt{3})$ nên $u\in(0;\sqrt{3})$.

Phương trình trở thành: $(u^3-m)^3=81u+27m$

$$\Leftrightarrow (u^3-m)^3+27(u^3-m)=(3u)^3+27.(3u).\quad (*)$$

Xét hàm $f(t)=t^3+27t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=3t^2+27>0,\ \forall t\in\mathbb{R}\rightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến.

Nhận thấy (*) có dạng $f(u^3-m)=f(3u)\Leftrightarrow u^3-m=3u\Leftrightarrow u^3-3u=m.$

Xét hàm $g(u)=u^3-3u,\ \forall u\in(0;\sqrt{3})$. Khảo sát ta được $-2\leq g(u)<0.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $-2\leq m<0$

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-2;-1\}$. **Chọn B.**

Câu 73. Cho phương trình $\sqrt[3]{m+3\sqrt[3]{m+3\sin x}}=\sin x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow m+3\sqrt[3]{m+3\sin x}=\sin^3 x$

$$\Leftrightarrow m+3\sin x+3\sqrt[3]{m+3\sin x}=\sin^3 x+3\sin x.$$

Xét hàm $f(t)=t^3+3t,\ \forall t\in\mathbb{R}$. Hàm này đồng biến nên suy ra

$$f\left(\sqrt[3]{m+3\sin x}\right)=f(\sin x)\Leftrightarrow \sqrt[3]{m+3\sin x}=\sin x\Leftrightarrow m=\sin^3 x-3\sin x.$$

Đặt $u=\sin x\ (-1\leq u\leq 1)$, phương trình trở thành $m=u^3-3u$.

Xét hàm $g(u)=u^3-3u,\ \forall u\in[-1;1]$. Ta tìm được $\left\{\begin{array}{l}\max\limits_{[-1;1]} g(u)=2\\ \min\limits_{[-1;1]} g(u)=-2\end{array}\right.$.

Do đó, để phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \min\limits_{[-1;1]} g(u)\leq m\leq \max\limits_{[-1;1]} g(u)\Leftrightarrow -2\leq m\leq 2$

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-2;-1;0;1;2\}$. **Chọn C.**

Câu 74. Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $m+\sqrt{m+1+\sqrt{1+\sin x}}=\sin x$ có nghiệm là $[a;b]$. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{1}{2}-\sqrt{2}$. **C.** 3. **D.** $-\frac{1}{4}-\sqrt{2}$.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow \left(m+1+\sqrt{1+\sin x}\right)+\sqrt{m+1+\sqrt{1+\sin x}}=(1+\sin x)+\sqrt{1+\sin x}$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+t$ với $t\in[0;+\infty)$. Hàm này đồng biến trên $[0;+\infty)$ nên suy ra

$$f\left(\sqrt{m+1+\sqrt{1+\sin x}}\right)=f\left(\sqrt{1+\sin x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m+1+\sqrt{1+\sin x}}=\sqrt{1+\sin x}$$

$$\Leftrightarrow m+1+\sqrt{1+\sin x}=1+\sin x$$

$$\Leftrightarrow m=\sin x-\sqrt{1+\sin x}.$$

Đặt $u=\sqrt{1+\sin x}$, vì $\sin x\in[-1;1]\longrightarrow u\in\left[0;\sqrt{2}\right]$

Phương trình trở thành: $m=u^2-u-1$.

Xét hàm $g(u)=u^2-u-1$ với $u\in\left[0;\sqrt{2}\right]$. Ta có $g'(u)=2u-1$; $g'(u)=0\Leftrightarrow u=\frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

u	0		$\frac{1}{2}$		$\sqrt{2}$
$g'(u)$		$-$	0	$+$	
$g(u)$	-1	↘	$-\frac{5}{4}$	↗	$1-\sqrt{2}$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -\frac{5}{4}\le m\le 1-\sqrt{2}$

$\longrightarrow \begin{cases} a=-\frac{5}{4} \\ b=1-\sqrt{2} \end{cases} \longrightarrow a+b=-\frac{1}{4}-\sqrt{2}$. **Chọn D.**

Câu 75. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$\sin x(2-\cos 2x)-2\left(2\cos^3 x+m+1\right)\sqrt{2\cos^3 x+m+2}=3\sqrt{2\cos^3 x+m+2}$$

có đúng một nghiệm thuộc $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Phương trình tương đương với

$$2\sin^3 x+\sin x=2\left(2\cos^3 x+m+2\right)\sqrt{2\cos^3 x+m+2}+\sqrt{2\cos^3 x+m+2}.$$

Xét hàm $f(t)=2t^3+t$ với $t\ge 0$. Ta có $f'(t)=6t^2+1>0\longrightarrow f(t)$ đồng biến.

Mà $f(\sin x)=f\left(\sqrt{2\cos^3 x+m+2}\right)$, suy ra $\sin x=\sqrt{2\cos^3 x+m+2}\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\ge 0\\ \sin^2 x=2\cos^3 x+m+2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \sin^2 x=2\cos^3 x+m+2$ (vì $\sin x\ge 0,\ \forall x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right)$)

$\Leftrightarrow 1-\cos^2 x=2\cos^3 x+m+2\Leftrightarrow m=-2\cos^3 x-\cos^2 x-1$.

Đặt $u=\cos x$, vì $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right)\Rightarrow u\in\left(-\frac{1}{2};1\right]$. Khi đó phương trình trở thành $m=-2u^3-u^2-1$.

Xét $g(u)=-2u^3-u^2-1$, có $g'(u)=-6u^2-2u$; $g'(u)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=0\in\left(-\frac{1}{2};1\right] \\ u=-\frac{1}{3}\in\left(-\frac{1}{2};1\right] \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

u	$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		0		1
$g'(u)$		$-$	0		0	$-$	
$g(u)$	1	↘	$\frac{38}{28}$	↗	1	↘	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình có nghiệm khi $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ 4 \le m < -\dfrac{28}{27} \end{array}\right.$

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m \in \{-4;-3;-2;-1\}$. **Chọn D.**

Câu 76. Cho phương trình $\sin 2x - \cos 2x + |\sin x + \cos x| - \sqrt{2\cos^2 x + m} - m = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm ?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải. Điều kiện: $2\cos^2 x + m \ge 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $1 + \sin 2x + |\sin x + \cos x| = 1 + \cos 2x + m + \sqrt{2\cos^2 x + m}$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 + |\sin x + \cos x| = 2\cos^2 x + m + \sqrt{2\cos^2 x + m}$

$\Leftrightarrow (|\sin x + \cos x|)^2 + |\sin x + \cos x| = \left(\sqrt{2\cos^2 x + m}\right)^2 + \sqrt{2\cos^2 x + m}$

Xét hàm $f(t) = t^2 + t$ với $t \ge 0$. Ta có $f'(t) = 2t + 1 > 0,\ \forall t \ge 0 \to$ hàm số $f(t)$ đồng biến.

Mà $f(|\sin x + \cos x|) = f\left(\sqrt{2\cos^2 + m}\right)$, suy ra $|\sin x + \cos x| = \sqrt{\cos^2 x + m}$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 = 2\cos^2 x + m \Leftrightarrow 1 + \sin 2x = 2\cos^2 x + m \Leftrightarrow \sin 2x - \cos 2x = m.$

Vì $\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2}\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

$\to$ phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow -\sqrt{2} \le m \le \sqrt{2} \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m \in \{-1;0;1\}$. **Chọn B.**

Câu 77. Cho phương trình $\sqrt[3]{4\sin x + m} + \sin x = \sqrt[3]{\sin^3 x + 4\sin x + m - 8} + 2$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm ?

A. 18. **B.** 19. **C.** 20. **D.** 21.

Lời giải. Đặt $\begin{cases} a = \sqrt[3]{4\sin x + m} \\ b = \sin x \end{cases}$.

Phương trình trở thành: $a + b = \sqrt[3]{a^3 + b^3 - 8} + 2$

$\Leftrightarrow (a + b - 2)^3 = a^3 + b^3 - 8$

$\Leftrightarrow (a+b)^3 - 6(a+b)^2 + 12(a+b) - (a+b)(a^2 - ab + b^2) = 0$

$\Leftrightarrow (a+b)(3ab - 6a - 6b + 12) = 0$

$\Leftrightarrow 3(a+b)(a-2)(b-2) = 0.$

· Với $b = 2 \to \sin x = 2$: vô nghiệm.

· Với $a = 2 \to \sqrt[3]{4\sin x + m} = 2 \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{8-m}{4}$.

Phương trình có nghiệm khi $-1 \le \dfrac{8-m}{4} \le 1 \Leftrightarrow 4 \le m \le 12 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m \in \{4;5;6;\ldots;12\}$.

· Với $a + b = 0 \to \sqrt[3]{4\sin x + m} + \sin x = 0 \Leftrightarrow m = -\sin^3 x - 4\sin x$.

Đặt $t = \sin x\ (-1 \le t \le 1)$, ta được $m = -t^3 - 4t$.

Xét hàm $f(t) = -t^3 - 4t$ trên đoạn $[-1;1]$ ta được $-5 \le f(t) \le 5$ với mọi $t \in [-1;1]$

Suy ra phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -5 \le m \le 5 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m \in \{-5;-4;\ldots;4;5\}$.

Hợp hai trường hợp ta được 18 giá trị nguyên của m (vì $m = 4$, $m = 5$ lặp lại). **Chọn A.**

Câu 78. Cho phương trình $3\sqrt{\tan x+1}\,(\sin x+2\cos x)=m(\sin x+3\cos x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thộc đoạn $[-2018;2018]$ để phương trình trên có đúng một nghiệm thuộc $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$?

A. 2015. **B.** 2016. **C.** 2018. **D.** 4036.

Lời giải. Điều kiện: $\cos x\neq 0$.

Vì $\cos x\neq 0$ nên phương trình tương đương với $\Leftrightarrow 3(\tan x+2)\sqrt{\tan x+1}=m(\tan x+3)$.

Đặt $t=\sqrt{\tan x+1}$, vì $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\to t\in(1;+\infty)$.

Khi đó phương trình trở thành $3t\left(t^2+1\right)=m\left(t^2+2\right)\Leftrightarrow m=\dfrac{3t^3+3t}{t^2+2}$.

Xét hàm $f(t)=\dfrac{3t^3+3t}{t^2+2}$ với $t\in(1;+\infty)$. Ta có $f'(t)=\dfrac{3\left(t^4+5t^2+2\right)}{\left(t^2+2\right)^2}>0,\ \forall t\in(1;+\infty)$.

Bảng biến thiên

t	1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình có nghiệm khi $m>2$

$\xrightarrow[m\in\mathbb{Z}]{m\in[-2018;2018]} m\in\{3,4,\ldots,2018\}\to$ có 2016 giá trị. **Chọn B.**

Câu 79. Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos^2 x+\sqrt{\cos x+m}=m$ có nghiệm là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải. Đặt $u=\sqrt{\cos x+m}$, ta có hệ $\begin{cases}\cos^2 x+u=m\\ u^2-\cos x=m\end{cases}$.

Trừ vế theo vế ta được $\cos^2 x-u^2+u+\cos x=0\Leftrightarrow (u+\cos x)(\cos x-u+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=-\cos x\\ u=\cos x+1\end{array}\right.$.

- $u=\cos x+1$, ta được $\sqrt{m+\cos x}=\cos x+1$

$(1)\Leftrightarrow m+\cos x=(\cos x+1)^2\Leftrightarrow m=\cos^2 x+\cos x+1\xrightarrow{\text{khao sat}} m\in\left[\frac{3}{4};3\right]$

- $u=-\cos x$, ta được $\sqrt{m+\cos x}=-\cos x\Leftrightarrow\begin{cases}-\cos x\geq 0\\ m+\cos x=\cos^2 x\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\leq 0\\ m=\cos^2 x-\cos x\xrightarrow{\text{khao sat}} m\in[0;2]\end{cases}$

Vậy $m\in\{0;1;2;3\}\to$ có 4 số nguyên dương thỏa mãn. **Chọn C.**

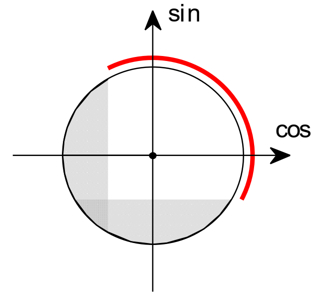
Câu 80. Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{1+2\cos x}+\sqrt{1+2\sin x}=\dfrac{m}{3}$ có nghiệm là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}1+2\cos x\geq 0\\ 1+2\sin x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\leq x\leq\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi$. (Hình vẽ)

Phương trình $\Leftrightarrow\begin{cases}m\geq 0\\ 2+2(\sin x+\cos x)+2\sqrt{1+2(\sin x+\cos x)+4\sin x\cos x}=\dfrac{m^2}{9}\end{cases}$.

Đặt $t=\sin x+\cos x\xrightarrow{\text{điều kiện}} t\in\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2};\sqrt{2}\right]$



Phương trình (1) trở thành $2+2t+2\sqrt{2t^2+2t-1}=\frac{m^2}{9}$.

Xét hàm $f(t)=2+2t+2\sqrt{2t^2+2t-1}$ với $t\in\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2};\sqrt{2}\right]$

Ta có $f'(t)=2+\frac{4t+2}{\sqrt{2t^2+2t-1}}>0,\ \forall t\in\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2};\sqrt{2}\right]$

Suy ra $\begin{cases}\max f(t)=f\left(\sqrt{2}\right)=4\sqrt{2}+4\\ \min f(t)=f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)=1+\sqrt{3}\end{cases}$.

Do đó để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{3}+1\le\frac{m^2}{9}\le 4\left(\sqrt{2}+1\right)\\ m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 3\sqrt{\sqrt{3}+1}\le m\le 6\sqrt{\sqrt{2}+1}$

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{5;6;7;8;9\}$. **Chọn D.**

Cách 2. Bài toán cô lập m một vế nên dùng MODE 7 nhanh hơn.

Nhập hàm $F(X)=\sqrt{1+2\cos X}+\sqrt{1+2\sin X}$ với Start $=-\frac{\pi}{6}$; End $=\frac{2\pi}{3}$; Step $=\frac{5\pi}{114}$.

Vấn đề 9. Tìm GTLN-GTNN của hàm số

Câu 81. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{3}|\sin x|\right)$ lần lượt là

A. -1 và 1. **B.** 0 và 1. **C.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ và $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** 0 và $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải. Vì $0\le|\sin x|\le 1\longrightarrow 0\le\frac{\pi}{3}|\sin x|\le\frac{\pi}{3}$.

Trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ hàm số $\sin$ luôn tăng nên suy ra $\sin 0\le\sin\left(\frac{\pi}{3}|\sin x|\right)\le\sin\frac{\pi}{3}$

hay $0\le\sin\left(\frac{\pi}{3}|\sin x|\right)\le\frac{\sqrt{3}}{2}$. **Chọn D.**

Câu 82. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=2\cos^3 x-\cos 2x$ trên đoạn $\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ lần lượt là

A. -3 và 1. **B.** $\frac{1}{4}$ và 1. **C.** $\frac{19}{27}$ và 1. **D.** -3 và $\frac{3}{4}$.

Lời giải. Ta có $f(x)=2\cos^3 x-\cos 2x=2\cos^3 x-2\cos^2 x+1$.

Đặt $t=\cos x$, vì $x\in\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]\longrightarrow t\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

Khi đó hàm số trở thành $f(t)=2t^3-2t^2+1$ với $t\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

Khảo sát hàm số $f(t)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};1\right]$, ta tìm được $\begin{cases}\min f(x)=\frac{19}{27}\\ \max f(x)=1\end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 83. Gọi $m,\ M$ lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y=(3-5\sin x)^{2018}$. Giá trị của $M+m$ bằng

A. $2^{2018}\left(1+2^{4036}\right)$. B. 2^{2018}. C. 2^{4036}. C. 2^{6054}.

Lời giải. Ta có $-1\le \sin x\le 1 \longrightarrow 5\ge -5\sin x\ge -5$

hay $-5\le -5\sin x\le 5 \longrightarrow -2\le 3-5\sin x\le 8 \longrightarrow 0\le (3-5\sin x)^{2018}\le 8^{2018}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $M=2^{6054}$, giá trị nhỏ nhất của hàm số là $m=0$. **Chọn D.**

Câu 84. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^2 x-4\sin x+5$. Tính $P=M-2m^2$.

A. $P=1$. B. $P=7$. C. $P=8$. D. $P=2$.

Lời giải. Ta có $y=\sin^2 x-4\sin x+5=(\sin x-2)^2+1$.

Do $-1\le \sin x\le 1 \longrightarrow -3\le \sin x-2\le -1 \longrightarrow 1\le (\sin x-2)^2\le 9$

$\longrightarrow 2\le (\sin x-2)^2+1\le 10 \longrightarrow \begin{cases} M=10 \\ m=2 \end{cases} \longrightarrow P=M-2m^2=2$. **Chọn D.**

Câu 85. Giá trị nhỏ nhất của $f(x)=\sin\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)+\cos\left(\dfrac{4x}{x^2+1}\right)+1$ gần nhất với số nào sau đây?

A. -1. B. $-\dfrac{1}{2}$. C. $-\dfrac{1}{4}$. D. $-\dfrac{1}{8}$.

Lời giải. Ta có $\cos\left(\dfrac{4x}{x^2+1}\right)=\cos 2\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)=1-2\sin^2\dfrac{2x}{x^2+1}$.

Do đó $f(x)=-2\sin^2\dfrac{2x}{x^2+1}+\sin\dfrac{2x}{x^2+1}+2$.

Đặt $t=\sin\dfrac{2x}{x^2+1}\in[-1;1]$, ta được $f(t)=-2t^2+t+2$.

Xét hàm $f(t)=-2t^2+t+2$ trên đoạn $[-1;1]$, ta được $\min\limits_{[-1;1]} f(t)=-1$. **Chọn A.**

Lời giải trên có vẻ hợp lý nhưng xét kỹ thì không ổn vì $-1\le \dfrac{2x}{x^2+1}\le 1$ (xét hàm).

Khi đó $t=\sin\dfrac{2x}{x^2+1}\in[-\sin 1;\sin 1]$. Tương tự như trên, xét hàm $f(t)=-2t^2+t+2$ trên đoạn $[-\sin 1;\sin 1]$, ta được $\min\limits_{[-\sin 1;\sin 1]} f(t)=f(-\sin 1)=-2(-\sin 1)^2+(-\sin 1)+2\approx 0,25$. **Chọn C.**

Nhận xét. Bài toán chỉ hay khi tự luận, nếu trắc nghiệm thì dùng MODE 7 rất nhanh.

Câu 86. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{\cos x+2\sin x+3}{2\cos x-\sin x+4}$. Tính $S=11m+M$.

A. $S=-10$. B. $S=4$. C. $S=6$. D. $S=24$.

Lời giải. Gọi y_0 là một giá trị của hàm số.

Khi đó phương trình $y_0=\dfrac{\cos x+2\sin x+3}{2\cos x-\sin x+4}$ có nghiệm.

Ta có $y_0=\dfrac{\cos x+2\sin x+3}{2\cos x-\sin x+4} \Leftrightarrow (2y_0-1)\cos x-(y_0+2)\sin x=3-4y_0$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (2y_0-1)^2+(y_0+2)^2\ge (3-4y_0)^2$

$\Leftrightarrow 11y_0^2-24y_0+4\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{11}\le y_0\le 2 \longrightarrow \begin{cases} M=2 \\ m=\dfrac{2}{11} \end{cases} \longrightarrow P=4$. **Chọn B.**

Câu 87. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\sin x+\cos x+1}{\sqrt{2+\sin 2x}}$. Khi đó, $M+\sqrt{3}m$ bằng

A. -1. B. 1. C. 2. D. $1+2\sqrt{2}$.

Lời giải. Ta có $y=\dfrac{\sin x+\cos x+1}{\sqrt{2+\sin 2x}}=\dfrac{\sin x+\cos x+1}{\sqrt{(\sin x+\cos x)^2+1}}.$

Đặt $u=\sin x+\cos x,$ điều kiện $|u|\le\sqrt{2}.$ Khi đó $y=\dfrac{u+1}{\sqrt{u^2+1}}.$

Xét hàm $y=\dfrac{u+1}{\sqrt{u^2+1}}$ trên đoạn $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right].$ Ta có $y'=\dfrac{1-u}{(u^2+1)\sqrt{u^2+1}};$ $y'=0\Leftrightarrow u=1.$

Tính $y\left(-\sqrt{2}\right)=\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$ $y\left(\sqrt{2}\right)=\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$ $y(1)=\sqrt{2}$

$\longrightarrow\begin{cases}M=\max y=\sqrt{2}\\ m=\min y=\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\end{cases}\longrightarrow M+\sqrt{3}m=1.$ **Chọn B.**

Câu 88. Biết giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2}{1-\cos^4 x}+\dfrac{1}{\cos^4 x}$ có dạng $a+b\sqrt{2}$ với $a,$ b là các số nguyên. Tính $S=a+b.$

A. $S=3.$ **B.** $S=4.$ **C.** $S=5.$ **D.** $S=7.$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức cộng mẫu, ta được

$$y=\frac{2}{1-\cos^4 x}+\frac{1}{\cos^4 x}\ge\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{1-\cos^4 x+\cos^4 x}=3+2\sqrt{2}.$$

Suy ra $\begin{cases}a=3\\ b=2\end{cases}\longrightarrow S=5.$ **Chọn C.**

Câu 89. Cho hàm số $y=\sqrt{1+2\sin^2 x}+\sqrt{1+2\cos^2 x}-1.$ Gọi $m,$ M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số. Khi đó giá trị của $M+m$ gần nhất với số nào sau đây?

A. $\dfrac{5}{2}.$ **B.** $\dfrac{7}{2}.$ **C.** $\dfrac{9}{2}.$ **D.** $\dfrac{11}{2}.$

Lời giải. ● Xét $t=\sqrt{1+2\sin^2 x}+\sqrt{1+2\cos^2 x}$

$\longrightarrow t^2=\left(1+2\sin^2 x\right)+\left(1+2\cos^2 x\right)+2\sqrt{\left(1+2\sin^2 x\right)\left(1+2\cos^2 x\right)}=4+2\sqrt{3+\sin^2 2x}$

$\longrightarrow t=\sqrt{4+2\sqrt{3+\sin^2 2x}}\ge\sqrt{4+2\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$

$\longrightarrow y=\sqrt{1+2\sin^2 x}+\sqrt{1+2\cos^2 x}-1\ge\sqrt{3}.$

Dấu "=" xảy ra khi $\sin 2x=0.$

● Lại có $\sqrt{1+2\sin^2 x}+\sqrt{1+2\cos^2 x}\le\sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left(1+2\sin^2 x+1+2\cos^2 x\right)}=2\sqrt{2}$

$\longrightarrow y=\sqrt{1+2\sin^2 x}+\sqrt{1+2\cos^2 x}-1\le 2\sqrt{2}-1.$

Dấu "=" xảy ra khi $\sin^2 x=\cos^2 x.$

Vậy $\begin{cases}m=\sqrt{3}\\ M=2\sqrt{2}-1\end{cases}\longrightarrow M+m=\sqrt{3}+2\sqrt{2}-1\approx 3,56.$ **Chọn B.**

Câu 90. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\sin^{2018}x+\cos^{2018}x$ lần lượt là

A. $\dfrac{1}{2^{1008}}$ và $2.$ **B.** $\dfrac{1}{2^{1009}}$ và $1.$ **C.** 0 và $1.$ **D.** $\dfrac{1}{2^{1008}}$ và $1.$

Lời giải. Đặt $a=\sin^2 x,$ $b=\cos^2 x.$ Ta có

● $\sin^{2018}x+\cos^{2018}x\le\sin^2 x+\cos^2 x=1.$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=k\dfrac{\pi}{2}.$

● $\sin^{2018}x+\cos^{2018}x=2.\left(\dfrac{a^{1009}+b^{1009}}{2}\right)\ge 2\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{1009}=\dfrac{1}{2^{1008}}.$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{1}{2^{1008}};$ giá trị lớn nhất bằng $1.$ **Chọn D.**

Vấn đề 10. Bài toán GTLN-GTNN có chứa tham số m

Câu 91. Có bao nhiêu giá trị của tham số thực a để hàm số $y=\dfrac{\cos x+a\sin x+1}{\cos x+2}$ có giá trị lớn nhất bằng 1 ?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải. Ta có $y=\dfrac{\cos x+a\sin x+1}{\cos x+2} \Leftrightarrow y(\cos x+2)=\cos x+a\sin x+1$

$$\Leftrightarrow a\sin x+(1-y)\cos x=2y-1.$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow a^2+(1-y)^2\ge(2y-1)^2 \Leftrightarrow 3y^2-2y-a^2\le 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{1+3a^2}}{3}\le y\le\frac{1+\sqrt{1+3a^2}}{3}.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \dfrac{1+\sqrt{1+3a^2}}{3}=1 \Leftrightarrow \sqrt{1+3a^2}=2 \Leftrightarrow 1+3a^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1\\a=-1\end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 92. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[0;10]$ để hàm số $y=\dfrac{1-m\sin x}{\cos x+2}$ có giá trị nhỏ nhất nhỏ hơn -2?

A. 5. **B.** 6. **C.** 11. **D.** 12.

Lời giải. Ta có $y=\dfrac{1-m\sin x}{\cos x+2} \Leftrightarrow y(\cos x+2)=1-m\sin x \Leftrightarrow m\sin x+y\cos x=1-2y.$

Phương trình có nghiệm $y^2+m^2\ge(2y-1)^2 \Leftrightarrow 3y^2-4y+1-m^2\le 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{3m^2+1}}{3}\le y\le\frac{2+\sqrt{3m^2+1}}{3}.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \dfrac{2-\sqrt{3m^2+1}}{3}<-2 \Leftrightarrow \sqrt{3m^2+1}>8 \Leftrightarrow m^2>21 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m>\sqrt{21}\\m<-\sqrt{21}\end{array}\right.$.

$\xrightarrow[m\in[0;10]]{m\in\mathbb{Z}} m\in\{5;6;7;8;9;10\}$. **Chọn B.**

Câu 93. Cho hàm số $y=2\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+2\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)-\sqrt{3}\sin x+a^2$ (với là tham số). Gọi $m,\ M$ lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{2\pi}{3}\right]$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để $m^2-M\le\dfrac{321}{4}$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải. Ta có $2\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)-\sqrt{3}\sin x=\cos x-\sqrt{3}\sin x+1=1-2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

Do đó $y=2\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)-2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+a^2+1.$

Đặt $t=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$, vì $x\in\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{2\pi}{3}\right]\longrightarrow t\in[0;1]$

Hàm số trở thành $y=2t^2-2t+a^2+1=2\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+a^2+\dfrac{1}{2}.$

Vì $0\le t\le 1\longrightarrow -\dfrac{1}{2}\le t-\dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{2}\longrightarrow 0\le\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2\le\dfrac{1}{4}$. Suy ra $a^2+\dfrac{1}{2}\le 2\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+a^2+\dfrac{1}{2}\le a^2+1.$

$\longrightarrow \begin{cases}m=a^2+\dfrac{1}{2}\\M=a^2+1\end{cases}\longrightarrow m^2-M\le\dfrac{321}{4}\Leftrightarrow\left(a^2+\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(a^2+1\right)\le\dfrac{321}{4}\Leftrightarrow -3\le a\le 3.$

Suy ra có 7 giá trị nguyên của thỏa. **Chọn D.**

Câu 94. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|\sin^4 x+\cos 2x+m\right|$ bằng 2. Hỏi tập S có bao nhiêu phần tử?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải. Ta có $\sin^4 x+\cos 2x=\sin^4 x-2\sin^2 x+1=\left(1-\sin^2 x\right)^2=\cos^4 x \longrightarrow y=\left|\cos^4 x+m\right|$.

Vì $0\le \cos^4 x\le 1 \longrightarrow m\le \cos^4 x+m\le 1+m$.

Suy ra $\min y=\min\left\{|m|,|m+1|\right\}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}|m|\ge |m+1|\\ |m+1|=2\end{cases}\\ \begin{cases}|m+1|\ge |m|\\ |m|=2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-3\\ m=2\end{array}\right.$. Vậy $S=\{-3;2\}$. **Chọn B.**

Câu 95. Cho $x,\ y$ là các số thực thỏa mãn $\cos 2x+\cos 2y=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\tan^2 x+\tan^2 y$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$. **C.** 3.

Lời giải. Ta có $P=\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)+\left(\frac{1}{\cos^2 y}-1\right)=2\left(\frac{1}{1+\cos 2x}+\frac{1}{1+\cos 2y}\right)-2$.

Áp dụng BĐT cộng mẫu, ta được $P\ge 2\left(\frac{(1+1)^2}{2+\cos 2x+\cos 2y}\right)-2=2.\frac{4}{2+1}-2=\frac{2}{3}$. **Chọn B.**

Câu 96. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(\tan x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\cos 2x$ với mọi $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Với $a,\ b$ là hai số thực thay đổi thỏa mãn $a+b=1$, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=f(a).f(b)$ bằng

A. $\frac{1}{25}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{5-3\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\frac{5+3\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải. Theo giả thiết, ta có $f(\tan x)=\frac{\tan x}{1+\tan^2 x}-\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\frac{\tan^2 x+\tan x-1}{1+\tan^2 x}$

$\longrightarrow f(t)=\frac{t^2+t-1}{t^2+1}$.

Do đó $S=f(a).f(b)=f(a).f(1-a)=\frac{a^2+a-1}{a^2+1}.\frac{(1-a)^2+(1-a)-1}{(1-a)^2+1}\overset{\text{khao sat}}{\ge}\frac{5-3\sqrt{5}}{2}$. **Chọn C.**

Câu 97. Cho hai số thực $x,\ y$ thuộc $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ và thỏa mãn $\cos 2x+\cos 2y+2\sin(x+y)=2$. Giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{\cos^4 x}{y}+\frac{\cos^4 y}{x}$ bằng

A. $\frac{2}{3\pi}$. **B.** $\frac{3}{\pi}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{5}{\pi}$.

Lời giải. Ta có $\cos 2x+\cos 2y+2\sin(x+y)=2 \Leftrightarrow \sin^2 x+\sin^2 y=\sin(x+y)$.

Suy ra $x+y=\frac{\pi}{2}$.

Áp dụng BĐT cộng mẫu $\frac{a^2}{m}+\frac{b^2}{n}\ge\frac{(a+b)^2}{m+n}$, ta được

$$P \ge \frac{\left(\cos^2 x+\cos^2 y\right)^2}{x+y}=\frac{\left[\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]^2}{x+y}=\frac{\left[\cos^2 x+\sin^2 x\right]^2}{x+y}=\frac{2}{\pi}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=\frac{\pi}{4}$. **Chọn C.**

Nhận xét. Việc suy ra $x+y=\frac{\pi}{2}$ được chứng minh như sau:

Với $x,\ y\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ suy ra $\frac{\pi}{2}-x,\ \frac{\pi}{2}-y$ cùng thuộc $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ hàm $y=\sin x$ đồng biến.

● Nếu $x+y>\frac{\pi}{2}\Rightarrow\begin{cases} x>\frac{\pi}{2}-y \longrightarrow \sin x>\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\cos y\\ y>\frac{\pi}{2}-x \longrightarrow \sin y>\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\end{cases}$

$\longrightarrow \sin^2 x+\sin^2 y=\sin x.\sin x+\sin y.\sin y>\sin x.\cos y+\sin y.\cos x=\sin(x+y)$: mâu thuẫn.

● Tương tự cho $x+y<\frac{\pi}{2}$.

● Trường hợp $x+y=\frac{\pi}{2}$: thỏa mãn.

Câu 98. Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=4$. Tìm giá trị lớn nhất M trong tất cả các hàm số $y=a+b\sqrt{\sin x}+c\sqrt{\cos x}$ với $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

A. $M=\sqrt{1+\sqrt{2}}$. **B.** $M=1+\sqrt{2}$. **C.** $M=2\sqrt{1+\sqrt{2}}$. **D.** $M=2\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Lời giải. Ta có $\left(a+b\sqrt{\sin x}+c\sqrt{\cos x}\right)^2\le\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(1+\sin x+\cos x\right)$

$$=4\left[1+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]\le 4\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Suy ra $a+b\sqrt{\sin x}+c\sqrt{\cos x}\le 2\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases} a=\frac{b}{\sqrt{\sin x}}=\frac{c}{\sqrt{\cos x}}\\ a^2+b^2+c^2=4\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1,\ x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=\frac{2\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}};b=c=\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\\ x=\frac{\pi}{4}\end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 99. Cho hai số thực dương $a,\ b$ thỏa mãn $\sin(2-2ab)-\sin(a+b)=2ab+a+b-2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=a+2b$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{10}-3}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{10}-7}{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{10}-1}{2}$. **D.** $\frac{2\sqrt{10}-5}{2}$.

Lời giải. Ta có $\sin(2-2ab)-\sin(a+b)=2ab+a+b-2$

$\Leftrightarrow \sin(2-2ab)+(2-2ab)=\sin(a+b)+(a+b)$

Xét hàm $f(t)=\sin t+t$ với $t\in\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=\cos t+1\ge 0\longrightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến.

Mà $f(2-2ab)=f(a+b)$ nên $2-2ab=a+b\Leftrightarrow b=\frac{2-a}{2a+1}$ (vì $b>0\Rightarrow a<2$).

Khi đó $S=a+2b=a+\frac{4-2a}{2a+1}$. Khảo sát hàm số trên $(0;2)$ ta được $\min S=\frac{2\sqrt{10}-3}{2}$. **Chọn A.**

Câu 100. Cho hai số thực dương $a,\ b$ thỏa mãn $\cos(x+y+1)+3=\cos(3xy)+9xy-3x-3y$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=x(y+2)$ bằng

A. $\dfrac{11+4\sqrt{7}}{9}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{28+8\sqrt{7}}{21}$. **D.** $\dfrac{7+2\sqrt{7}}{21}$.

Lời giải. Ta có $\cos(x+y+1)+3=\cos(3xy)+9xy-3x-3y$

$\Leftrightarrow \cos(x+y+1)+3(x+y+1)=\cos(3xy)+3(3xy)$

Xét hàm $f(t)=\cos t+3t$ với $t\in\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=-\sin t+3>0 \longrightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến.

Mà $f(x+y+1)=f(3xy)$ nên $x+y+1=3xy \Leftrightarrow x=\dfrac{y+1}{3y-1}$.

Khi đó $S=\dfrac{(y+1)(y+2)}{3y-1}=\dfrac{y^2+3y+2}{3y-1}$. Khảo sát ta tìm được $\min S=\dfrac{11+4\sqrt{7}}{9}$. **Chọn A.**

---------- **HẾT** ----------